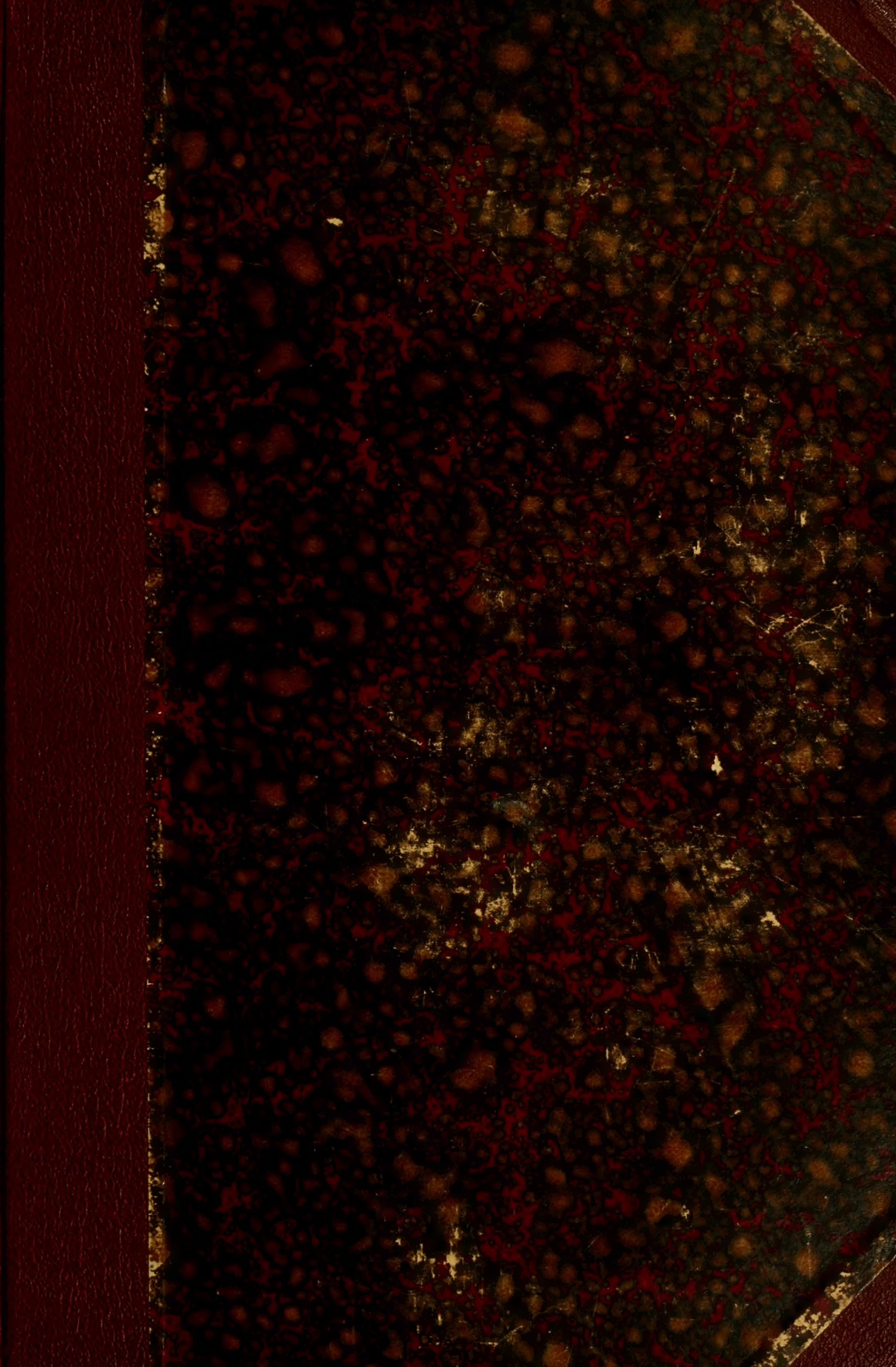
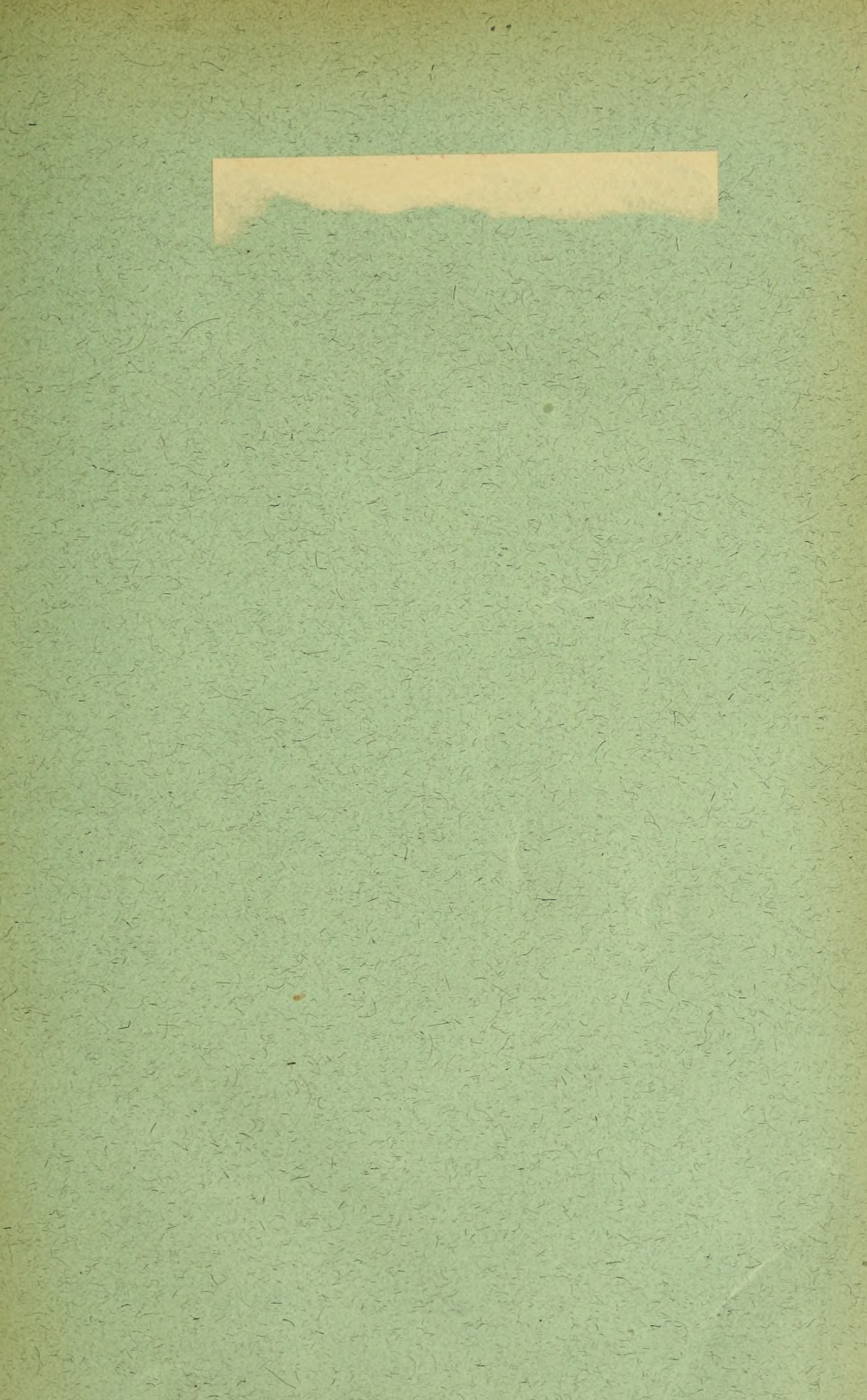
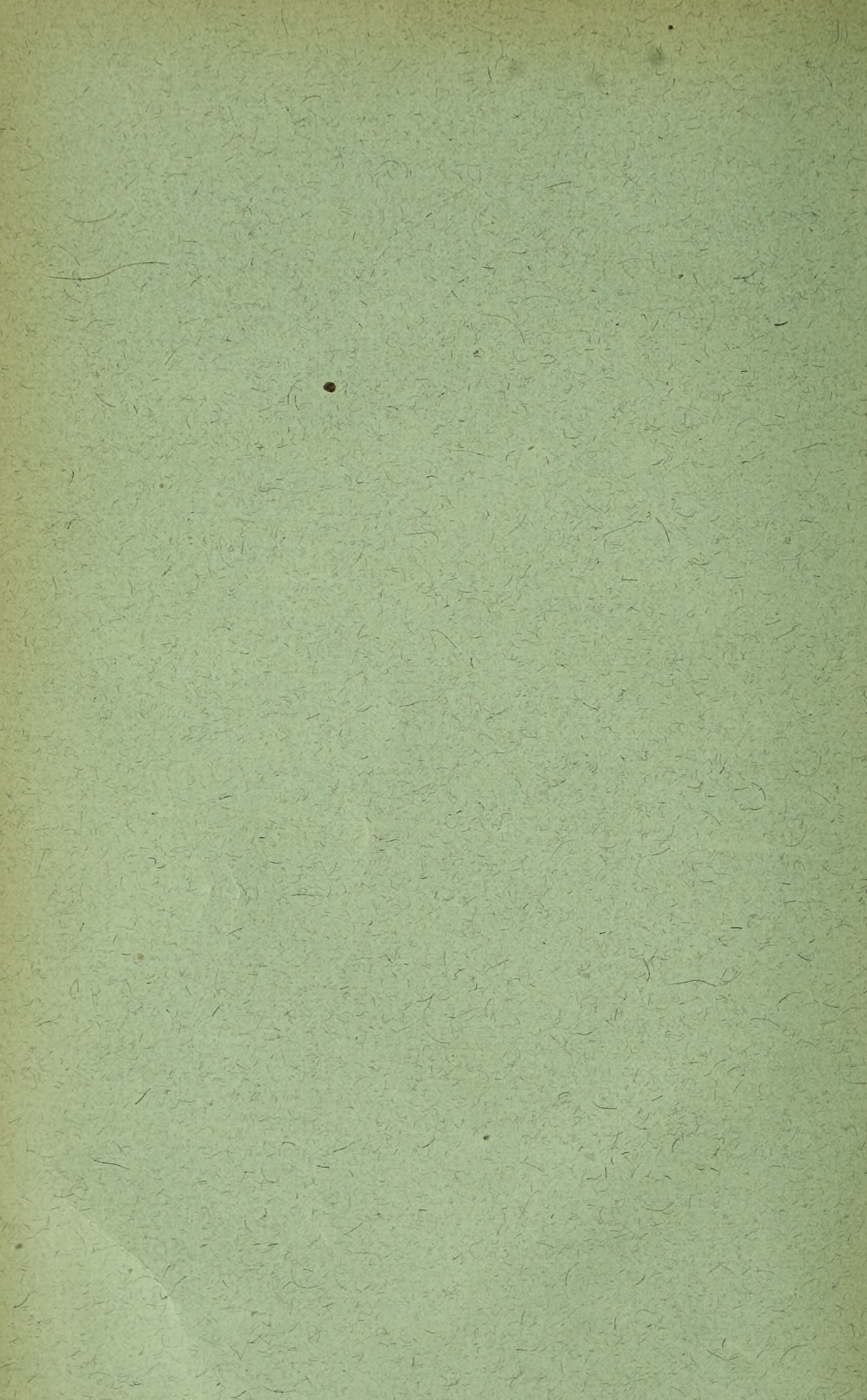






VORLESUNGEN ÜBER GEOMETRIE.

VON

ALFRED CLEBSCH.

BEARBEITET UND HERAUSGEGEBEN

VON

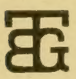
DR. FERDINAND LINDEMANN.

MIT EINEM VORWORTE VON FELIX KLEIN.

ERSTER BAND.

GEOMETRIE DER EBENE.

MIT 78 HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Vorrede.

Als Clebsch vor nunmehr drei Jahren, auf der Höhe seiner Wirksamkeit, durch einen plötzlichen Tod dahingerafft wurde, entstand im Kreise seiner Freunde und Schüler alsbald der Plan, eine Herausgabe wenigstens seiner geometrischen Vorlesungen zu veranstalten. Waren sie doch das hauptsächliche Mittel gewesen, durch welches er einen immer wachsenden Kreis von Zuhörern um sich gesammelt hatte.

Aber die Aufgabe erwies sich grösser und umfassender, als man zu Anfang hatte glauben können. Die Vorlesungen Clebsch's enthalten in der Form, in welcher sie in verschiedenen nachgeschriebenen Heften vorliegen, nicht eigentlich Abgeschlossenes; Clebsch hatte wechselnd bald diesen, bald jenen Gegenstand berührt, ohne systematische Vollständigkeit anzustreben. Bei einem Werke, das zugleich ein Lehrbuch sein sollte, musste der Stoff nach einheitlichen Principien durchgearbeitet, es musste manche Lücke ergänzt werden; es konnte endlich nur in Clebsch's eigenem Sinne liegen, wenn der Versuch gemacht wurde, die Darstellung bis zu dem neuesten, von der Wissenschaft in den letzten Jahren gewonnenen Standpunkte durchzuführen.

Man wird Herrn Dr. Lindemann hohen Dank wissen, dass er diese umfangreiche und schwierige Aufgabe mit ebensoviel Hingebung als Verständniss in Angriff genommen hat. Es ist das Werk dadurch, zumal in den späteren Partieen, namentlich auch sein eigen geworden; verschiedene Abschnitte mussten von ihm, auf Grund der Originalarbeiten, überhaupt erst entworfen werden. Aber der Name Clebsch durfte voranstehen — nicht bloss, weil Clebsch die Veranlassung zum Entstehen des Buches abgegeben, und weil die Umgränzung des

Stoffes doch immer seinen Vorlesungen conform bemessen wurde — sondern weil der innere Gehalt des Buches durchaus auf ihn zurückgeht: sein ist die Art der Darstellung, die durchgehends angestrebt wurde, — von ihm lernten wir Anderen die Tendenz, auch fremde Untersuchungen umfassend in Betracht zu ziehen und mit den eigenen zu verweben, — aus Dankbarkeit gegen ihn entstand der Plan des Werkes und gelang die seitherige Durchführung.

München, Februar 1876.

Felix Klein.

Vorbemerkungen des Herausgebers.

Die nachstehenden Bemerkungen sollen dazu dienen, die Entstehungsweise des vorliegenden Bandes und die bei Abfassung desselben befolgten Gesichtspunkte darzulegen; insbesondere muss ich dabei angeben, in wie weit der Inhalt desselben den Vorlesungen und nachgelassenen Manuscripten meines hochverehrten Lehrers entnommen ist, in wie weit ich entsprechend dem für das Ganze angenommenen Plane genöthigt war, das vorhandene Material, sei es durch Darstellung fremder, sei es durch Einschaltung eigener Untersuchungen zu ergänzen.

Die folgenden Vorlesungen von Clebsch bilden die Grundlage des Buches:

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Sommer 1871.
2) Theorie der algebraischen Curven. Winter 1871/72.
3) Theorie der algebraischen Formen. Sommer 1872.

Für die Bearbeitung derselben sind mir neben eigenen Aufzeichnungen besonders die Hefte der Herren Ahlborn und Godt von Nutzen gewesen. Ausserdem standen mir für die in früheren Jahren von Clebsch gehaltenen Vorlesungen Hefte der Herren Baule, Dieckmann, Klein und Riecke zu Gebote; letztere behandeln ebenfalls die genannten Gegenstände, jedoch in gedrängterer Fassung, überdies die Theorie der Abel'schen Integrale. Ferner konnte ich für die Vorlesungen 1) und 2) ein kurz gehaltenes Manuscript von Clebsch benutzen, welches zunächst für die letzterwähnten früheren Vorträge entworfen zu sein scheint und wohl mit demjenigen identisch ist, auf das sich Herr Fiedler für einige Stellen seiner Bearbeitung von Salmon's Kegelschnitttheorie bezieht (vgl. die Vorrede zu diesem Buche). Endlich wurde der Inhalt eines Manuscriptes über die Theorie der Connexe, welches von Clebsch unvollendet hinterlassen wurde, möglichst verwerthet.

Um diesen reichen, doch mannigfach getheilten Stoff zu einem Ganzen zusammenzufügen, waren selbstverständlich manche Aenderungen in Anordnung desselben, sowie gelegentliche Ergänzungen nothwendig. Ueberdies aber erweiterte sich mir während der Arbeit allmälig der Plan des Werkes; immer mehr erschien es wünschens-

werth, auch neuere Untersuchungen unter die algebraischen Gesichtspunkte einzuordnen, von denen der Gedankengang in Clebsch's Vorträgen beherrscht ward, insbesondere solche Theorien in ihrer neueren Entwicklung zu verfolgen, deren Ausbildung auch eine naturgemässe Erweiterung des in jenen Vorlesungen gebotenen Stoffes zu fordern schien, und so *im Anschlusse an* Clebsch einen in gewisser Richtung vollständigen Ueberblick über die heutige geometrisch-algebraische Forschung zu geben. Eben diese allmälige Verrückung des gesteckten Zieles bezeichnet zum grossen Theile den Charakter des vorliegenden Buches und damit auch manche Mängel desselben. Es ist keineswegs ein in sich vollendetes Werk, an welchem alle Unebenheiten mit sorgfältig bessernder Hand vermieden wären; vielleicht war bei Auswahl des Stoffes in den zugefügten Ergänzungen die Richtung meines Interesses und des Fortschreitens meiner Entwicklung von grösserem Einflusse, als eine rein objective Beurtheilung des Ganzen für zulässig halten dürfte. Immerhin hoffe ich jedoch, gewisse Anschauungen und Methoden, die sonst nur in dem engeren Kreise von Clebsch's Freunden und Schülern gekannt und benutzt wurden, allgemeiner zugänglich gemacht zu haben; und dies um so mehr, als diejenigen Gebiete, in denen sie am meisten zum Ausdrucke gelangen, in den seitherigen Lehrbüchern nicht behandelt oder doch nur kurz berührt sind.

Sollte es mir schliesslich gelungen sein, mich dem bezeichneten Ziele einigermassen zu nähern, so habe ich dies zu nicht geringem Theile der freundschaftlichen und stets bereitwilligen Unterstützung des Herrn Klein zu verdanken, mit welchem mich sowohl während meines Aufenthaltes in Erlangen (Ostern 1873 bis dahin 1875), als nachher in München (bis Ostern 1876) ein reger wissenschaftlicher Verkehr immer enger verband, und dessen wohlthätiger Einfluss auf meine Arbeiten daher wohl grösser ist, als dass er sich mit Worten, durch Anführung von Einzelheiten, würde schildern lassen. Ich beschränke mich darauf, dankbar hervorzuheben, dass es vor Allem sein Bestreben war, mir bei Anordnung und Sichtung des reichen Stoffes und beim Zusammenfassen verschiedenartiger Untersuchungen unter einheitliche Gesichtspunkte fördernd zur Seite zu stehen. In München hat Herr Brill sich mit gleicher Bereitwilligkeit um die Förderung meines Unternehmens bemüht (besonders für einzelne Abschnitte der vierten und sechsten Abtheilung); auch ihm spreche ich daher meinen lebhaft gefühlten Dank aus. Im Winter 1874/75 hatte ich überdies Gelegenheit, mit Herrn Gordan in persönlichen Verkehr zu treten, und so verdanke ich ihm ebenfalls manch' schätzenswerthe Bemerkung, wie auch an einzelnen Stellen des Buches besonders hervorgehoben ist. —

Im Folgenden möge noch kurz geschildert werden, wie der gegebene Stoff geordnet und verarbeitet wurde; diejenigen Gegenstände, welche nicht den Vorlesungen von Clebsch oder den betreffenden Originalaufsätzen desselben entnommen wurden, will ich kurz als „hinzugefügt" bezeichnen.

Die *ersten beiden Abtheilungen* sind eine Wiedergabe der oben unter 1) genannten Vorlesung von Clebsch.

In der *dritten Abtheilung* findet man im Grossen und Ganzen den Inhalt der Vorlesung 3) wieder, insoweit letztere die Theorie der binären Formen, der ternären Formen im Allgemeinen und der ternären quadratischen Formen behandelte. Es mussten indess verschiedene Umstellungen, Abkürzungen und Erweiterungen vorgenommen werden, um den geometrischen Inhalt der algebraischen Theorien mehr hervortreten zu lassen; und dies konnte um so eher geschehen, als die Algebra der binären Formen von Clebsch selbst in einem grösseren Werke behandelt ist. Die Theorie der Polaren binärer Formen und der Involutionen (p. 203 ff.) ist einem besonderen Manuscripte von Clebsch entnommen. Der Abschnitt über Collineationen im ternären Gebiete (p. 250—264) bildete ursprünglich die Einleitung zu den oben unter 2) genannten Vorträgen. Die Theorie der algebraischen Formen habe ich, abweichend von der zeitlichen Aufeinanderfolge obiger Vorträge, *vor* die der algebraischen Curven gestellt, um mich in letzterer gelegentlich der durch erstere gewonnenen Vorstellungen, Bezeichnungsweisen und Rechnungsmethoden bedienen zu können. Hinzugefügt sind (p. 272 f.) in etwas modificirter Form die Untersuchungen über die Darstellung invarianter Eigenschaften durch Verschwinden von Functionalinvarianten und (p. 288 ff.) die Ableitung des vollständigen Systems zweier ternären quadratischen Formen (nach einer Mittheilung des Herrn Gordan), ferner die Aufstellung der Invariantenrelationen, durch welche die besonderen Lagen zweier Kegelschnitte gegen einander charakterisirt werden. Die Berechnung der Relationen zwischen ihren verschiedenen quadratischen Covarianten dagegen ist wieder den Vorträgen von Clebsch entnommen.

In der *vierten Abtheilung* sind die ersten vier Abschnitte (p. 305—372) eine Bearbeitung der ersten Hälfte der Vorlesung 2), an einzelnen Stellen modificirt in Folge der voraufgeschickten Theorie der algebraischen Formen, zum grösseren Theile aber wohl ohne Kenntniss der letzteren verständlich. Es sind hinzugefügt die Sätze von Nöther über die Gleichung $f = A\varphi + B\psi$ (p. 338 ff.), die mittelst symbolischer Rechnung geführten Beweise für das Verhalten der Hesse'schen Curve in den singulären Punkten der Grundcurve (p. 354), die directe Bestimmung der Wendetangenten der Steiner-

schen Curve (p. 365) und eine Erweiterung des Satzes über die Spitzen der letzteren. Die Abschnitte über Systeme von Curven, über das erweiterte Correspondenzprincip und über die eindeutige Abbildung zweier Ebenen auf einander sind ihrem ganzen Umfange nach auf Grund der betreffenden Originalaufsätze ausgearbeitet; nur die algebraische Behandlung der Elementarsysteme von Kegelschnitten (p. 393—395) ist einem Seminarvortrage von Clebsch aus dem Winter 1870/71 entnommen; über die Cremona'schen Transformationen gab derselbe eine kurze Uebersicht in seinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen (Winter 1870/71) und über Raumgeometrie (Winter 1868/69). In den genannten Abschnitten wird man vielleicht, wenn nicht in den Resultaten, doch in den Beweisen einiges Neue finden; ich darf hier erwähnen: die Bestimmung des Verhaltens der Jacobischen Curve in gemeinsamen Punkten der drei Grundcurven (p. 377), die Beweise für die Sätze von Chasles und Cremona über Kegelschnittsysteme (p. 398 ff.), die algebraischen Erörterungen über Zeuthen's Theorie der Curvensysteme (p. 419 ff.), die Berechnung der Coincidenzcurve für die einfachsten Fälle der Correspondenz auf einer Curve beliebigen Geschlechts (p. 446 ff.), die Untersuchungen über Schaaren von Curven, welche dieselbe feste Curve berühren (p. 454 ff.) und die Ableitung des Brill'schen Reciprocitätsgesetzes für solche Schaaren mit Hülfe des erweiterten Correspondenzprincips.

Die *fünfte Abtheilung* enthält in ihren ersten drei Abschnitten die Fortsetzung der Vorlesung 2); hinzugefügt habe ich die Untersuchungen über Kegelschnitt-Netze und -Gewebe (p. 519 ff. nach Rosanes) und die Bemerkungen über den Zusammenhang der Grassmann'schen Erzeugungsweise mit der Chasles'schen. Die Theorie der ternären cubischen Formen ist eine Darstellung des betreffenden Theiles von Vorlesung 3), doch über die Grenzen der letzteren hinaus fortgeführt und durch Einschaltung geometrischer Ueberlegungen erweitert. Der sechste Abschnitt bildete seinem geometrischen Inhalte nach den Schluss der Vorlesung 2). Die Abschnitte über die Anwendung der elliptischen Functionen und über die Parameterdarstellung sind selbstständig von mir ausgearbeitet. Erstere berührte Clebsch nur kurz am Schlusse seiner Vorlesung über elliptische Functionen (Sommer 1872); der letzteren ist die Einführung der Hermite'schen H-Functionen direct entnommen (p. 627). Ich hebe noch den Versuch hervor, gewisse algebraische Eliminationsaufgaben durch Benutzung der Theilungsgleichungen für elliptische Functionen zu lösen (p. 652 ff.).

Die *sechste Abtheilung* ist eine vollständig selbstständige Bearbeitung des in ihr gegebenen Stoffes; eine solche glaubte ich um so

mehr unternehmen zu dürfen, als der Zusammenhang der Theorie der Abel'schen Functionen mit der Geometrie eine der schönsten Entdeckungen ist, welche wir Clebsch verdanken, und als diese Anwendungen in dem Werke von Clebsch und Gordan über Abel'sche Functionen nur beiläufig berücksichtigt werden. Die rein algebraischen Untersuchungen sind zum Theile als Ergänzungen der betreffenden Abschnitte in der vierten Abtheilung aufzufassen. Man findet auch hier einige vielleicht neue Gesichtspunkte und Beweise; ich nenne: die Darstellung des directen Beweises für die Erhaltung des Geschlechts bei eindeutiger Transformation (p. 662 ff.), die Ableitung der Brill'schen Formeln für simultane Correspondenzen auf einer Curve (p. 720 ff.), die Zerlegung algebraischer Differentialausdrücke in Summen von Normaldifferentialen (p. 778 ff.), die Ableitung des Jacobi'schen Satzes und des Abel'schen Theorems aus ihm (p. 818 ff.), die Erledigung des erweiterten Umkehrproblems für den Fall $p = 2$ auf Grund Riemann'scher Principien (p. 867 ff.) und die Behandlung der Curven vom Geschlechte Null (p. 889 ff.).

In der *siebenten Abtheilung* ist auf Grund des Schlusses der Vorlesung 3) und des oben erwähnten Manuscriptes von Clebsch die Theorie der Connexe dargestellt; da letztere noch durchaus in ihren Anfängen steht, ist die ganze Abtheilung mehr als Anhang zu betrachten. Hinzugefügt habe ich einige Abzählungen auf p. 940 und 957, die Ableitung der Eigenschaften der durch $F = 0$ und $\Phi = 0$ bezeichneten Curven (p. 969), die Beispiele für die Bestimmung von Hauptcoincidenzcurven (p. 978 ff.), eine ausführlichere Behandlung des Connexes (1, 1) auf Grund der im Texte genannten Aufsätze, die allgemeinen Sätze über den Connex $(1, n)$ und Godt's Untersuchungen über den Connex (1, 2). Dem Manuscripte von Clebsch sind insbesondere entnommen: Die Berechnung des conjugirten Connexes eines Connexes (2, 2), die Bemerkungen über die Differentiale mehrfacher algebraischen Integrale und die Entwicklung auf p. 977. Den begrifflichen Entwicklungen über die Integration einer Differentialgleichung, sowie der Behandlung der Lie'schen Berührungstransformationen liegt ein schriftlicher Entwurf des Herrn Klein zu Grunde, welchen mir derselbe gütigst zur Benutzung überliess.

Endlich muss ich hier noch einige Worte über die *Literaturnachweise* anschliessen. Clebsch pflegte in seinen Vorträgen nur die allerwichtigsten Originalaufsätze zu erwähnen, und demgemäss habe ich mich in den betreffenden Theilen dieses Werkes auf nur kurze historische Notizen beschränkt, die durchaus nicht den Anspruch auf Vollständigkeit machen, die aber hinreichen werden, um den Leser in die Literatur einzuführen. In den von mir selbstständiger bearbeiteten Abschnitten dagegen hielt ich es für meine Pflicht, die benutzten

Quellen vollständig anzugeben; und so musste in den Citaten hinsichtlich ihrer Vertheilung auf die letztgenannten und die ersteren Abschnitte nothwendig eine gewisse Ungleichmässigkeit entstehen. Einige derselben habe ich in den „Verbesserungen und Zusätzen“ noch vervollständigen können. Diese Verbesserungen wurden leider in grösserer Zahl nöthig; manche derselben verdanke ich den gütigen Mittheilungen der Herren Nöther, Wedekind und Zeuthen.

Dem Herrn Verleger bin ich für die Bereitwilligkeit, mit welcher derselbe meinen Wünschen stets entgegengekommen ist, in ausserordentlicher Weise verpflichtet, um so mehr, als der seit October 1873 begonnene Druck in Folge der Entstehungsweise des Werkes, und in letzterer Zeit durch störende Ortsveränderungen meinerseits, wiederholt für längere Zeit unterbrochen werden musste.

Seedorf in Lauenburg, 10. Septb. 1876.

F. Lindemann.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Einleitende Betrachtungen. — Punktreihen und Strahlbüschel.

I. Darstellung geometrischer Oerter durch Gleichungen. — Vorbereitende Aufgaben.

Die *analytische Geometrie*, mit der wir uns vorwiegend beschäftigen werden, basirt auf der geregelten Benutzung gewisser einfacher Hülfsmittel, durch welche es gelingt, geometrische Probleme in eine algebraische Form einzukleiden, ja geradezu alle krummen Linien und Flächen durch Gleichungen darzustellen. Diese Behandlungsweise der Geometrie unterscheidet sich wesentlich von der Anwendung der Rechnung, wie sie z. B. in der Lehre von den Proportionen üblich ist. Während letztere schon sehr alt ist, datirt die eigentliche analytische Geometrie aus der Mitte des 17. Jahrhunderts: es ist Descartes, welcher sich das ausserordentliche Verdienst erworben hat, die Wissenschaft um die von uns bezeichnete Disciplin bereichert zu haben, um so für alle Zeiten die Schranken der alten Geometrie zu brechen. Durch Einführung der sogenannten *Coordinaten**) schuf er ein Werkzeug, durch welches, wie er sich ausdrückte, die Möglichkeit gegeben war, eine jede geometrische Aufgabe zu lösen, d. h. für jede den Anzatz zu machen, sie in bestimmter Weise zu formuliren. Und in der That ist noch immer durch diese Form der Fragestellung der Charakter analytisch-geometrischer Untersuchungen bedingt, hauptsächlich auch gegenüber den Methoden der neueren *synthetischen* Geometrie, die wir später berühren werden.

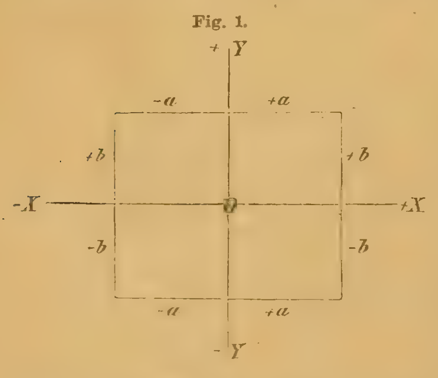
Die Grundlage der analytischen Geometrie bildet demnach die Auffindung eines Mittels, welches uns in den Stand setzt, jeden Punkt der Ebene durch Zahlen zu charakterisiren; und diese Aufgabe löst sich einfach durch Analogie mit der Trigonometrie. In letzterer bestimmen wir jeden Punkt eines mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises durch zwei Strecken, den sinus und den cosinus, welche stets der Bedingung genügen müssen, dass die Summe ihrer Quadrate gleich

---

*) Das grundlegende Werk von Descartes erschien 1637 unter dem Titel: Géométrie.

der Einheit ist. Lassen wir dagegen diese Bedingungsgleichung bei Seite, so können wir ebenso jeden Punkt der Ebene durch zwei Strecken charakterisiren: seinen Abstand von einer festen Geraden, *der Ordinate*, und das Stück, welches auf dieser festen Geraden von einem festen Punkte derselben aus gerechnet, durch den Fusspunkt der Ordinate abgeschnitten wird, *die Abscisse*. Lässt man dann zwischen diesen beiden Grössen wieder die Bedingung bestehen, dass die Summe ihrer Quadrate gleich der Einheit sei, so erhält man alle Punkte eines mit dem Radius 1 um jenen festen Punkt beschriebenen Kreises. Der augenscheinlichen Gleichberechtigung zwischen Ordinate und Abscisse entsprechend nahm man später zwei in einem willkührlich gewählten Punkte der Ebene, *dem Anfangspunkte*, sich senkrecht durchschneidende Gerade als *Coordinatenaxen*, und charakterisirte einen Punkt durch seine Abstände von diesen Axen: *seine Coordinaten*. In Folge dieser Festsetzungen gehört nun zwar zu jedem Punkte ein bestimmtes Paar von Coordinaten; es ist aber nicht umgekehrt durch Angabe zweier Coordinaten ein Punkt eindeutig bestimmt; sondern es gibt je vier Punkte, deren Coordinaten dieselben Grössen sind, entsprechend den vier Quadranten, in welche die Ebene durch die Coordinatenaxen getheilt wird. Es muss also noch ein Mittel hinzutreten, diese vier Punkte zu trennen; und dies geschieht wieder analog, wie in der Trigonometrie, durch Vorsetzen verschiedener Vorzeichen. Man unterscheidet nämlich die beiden Erstreckungen jeder Coordinatenaxe zu beiden Seiten des Anfangspunktes als die positive und die negative und bezeichnet eine Coordinate als positiv oder negativ, jenachdem das betreffende Loth sich auf der Seite der positiven oder der negativen Erstreckung der parallelen Axe befindet. Die beiden Axen unterscheidet man als X- und Y-Axe; die von dem zu bestimmenden Punkte aus auf sie gefällten Lothe werden dann die Y- und X-Coordinate genannt und in der Regel durch y und x bezeichnet (vergl. Fig. 1). Das somit aufgestellte Coordinatensystem, in dem nunmehr jedes Coordinatenpaar einschliesslich des Vorzeichens nur *einen* Punkt der Ebene definirt, wird in neuerer Zeit nur in den angewandten Zweigen der Mathematik, besonders also in der Mechanik, noch ausschliesslich verwendet; für unsere rein geometrischen Speculationen dagegen werden wir uns später eines allgemeineren Coordinatensystems bedienen. Es ist überhaupt nicht schwer, eine unbegrenzte Reihe

Fig. 1.



verschiedener Systeme der Art aufzustellen; es kommt nur darauf an, für die jedesmal vorliegenden Probleme das möglichst passende zu wählen.

An die hier gegebene Coordinatenbestimmung schliesst sich sofort eine andere, in der ein Punkt nicht durch die beiden Grössen x und y, sondern durch seine Entfernung r von einem festen Punkte, *dem Anfangspunkte*, und den Winkel α dieser Strecke gegen eine durch den Anfangspunkt gehende feste Gerade bestimmt wird. Dabei wird man freilich r mit einem bestimmten Vorzeichen und α zwischen 0 und 360^0 nehmen müssen, wenn man will, dass zu jedem Punkte nur ein Coordinatenpaar gehört. Der Uebergang von diesem sogenannten *Polarcoordinatensysteme* zu unserem rechtwinkligen ist einfach gegeben; es ist nämlich die *Entfernung eines Punktes* x, y *vom Anfangspunkte:*

$$(1) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

und *der Winkel dieser Linie gegen die X-Axe* bestimmt durch

$$(2) \qquad r \cos \alpha = x\,, \quad r \sin \alpha = y\,, \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{x}\,,$$

Gleichungen, welche uns die Coordinaten x, y durch die Polarcoordinaten r, α ausdrücken lehren, und umgekehrt.

Welches Coordinatensystem wir aber auch wählen mögen, immer sind *zwei* Grössen nöthig, um einen einzelnen Punkt zu bestimmen; ist nur eine solche Grösse, nur eine Bedingung für einen Punkt gegeben, so gibt es eine unendliche Anzahl von Punkten, die alle dieser Bedingung genügen und in ihrer Gesammtheit *einen geometrischen Ort, eine Curve,* darstellen. Halten wir z. B. die Richtung α fest und lassen die Entfernung r unbestimmt, so beschreibt der Punkt, dessen Coordinaten der letzten Gleichung (2) genügen, eine Gerade, die durch den Anfangspunkt geht; halten wir dagegen die Entfernung r fest und lassen α unbestimmt, so stellt die Gleichung (1) einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt und dessen Radius gleich r ist, es ist die *Gleichung des Kreises*, wie (2) *die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie.* Ebenso stellen die Gleichungen

$$x = 0\,, \quad y = 0\,,$$

wo das eine Mal y das andere Mal x unbestimmt bleibt, die Y- resp. X-Axe dar, während

$$x = a$$

die Gleichung einer in der Entfernung a zur Y-Axe gezogenen Parallelen ist.

Der Begriff des geometrischen Ortes, für welchen wir soeben einige Beispiele betrachteten, ist für die analytische Geometrie fundamental: das Studium dieser Oerter, d. h., für die Ebene, der Curven und ihrer

Eigenschaften, können wir geradezu als Aufgabe derselben bezeichnen. Eine Curve wird also gebildet von allen Punkten, die nur *einer* Bedingung genügen, welche wir durch eine Beziehung zwischen ihren Coordinaten gegeben denken. Der fundamentale Begriff des geometrischen Ortes fällt sonach zusammen mit dem Begriffe einer Gleichung zwischen den Coordinaten x, y; d. h. eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

stellt eine Linie in der Ebene dar, und die Eintheilung der Curven kommt zurück auf die der Gleichungen. Die heutige Geometrie der Ebene beschränkt sich jedoch wesentlich auf die Untersuchung der *algebraischen Curven*, d. h. derjenigen, in deren Gleichungen nur positive und ganze Potenzen von x und y vorkommen. So interessant nämlich auch gewisse andere, transcendente Curven in ihren Eigenschaften sind, so wichtig dieselben auch für gewisse Anwendungen erscheinen, so ist uns die wahre Natur der transcendenten Functionen noch zu sehr verschlossen, als dass wir die durch sie darstellbaren Curven in ihrem inneren Zusammenhange behandeln könnten, während besonders durch neuere Untersuchungen in der Kenntniss der algebraischen Functionen wesentliche Fortschritte gemacht sind, so dass hier der rein geometrischen Speculation ein weites, aber durch allgemeine Principien übersichtliches Gebiet eröffnet ist.

Man theilt die algebraischen Curven zunächst ein nach ihrer Ordnung, d. h. nach der grössten Anzahl von Factoren x oder y, welche in der Gleichung der Curve mit einander multiplicirt vorkommen *(höchste vorkommende Dimension)*. Bei dieser Abzählung richten wir zuvor die Gleichung durch passende Multiplication so ein, dass eine ganze, rationale Function von x und y gleich Null gesetzt wird. So ist also z. B. nach (1) der Kreis eine Curve der zweiten, nach (2) die gerade Linie eine Curve von der ersten Ordnung. Die Curven der ersten und zweiten Ordnung werden uns zunächst vorwiegend beschäftigen; wir werden auf die Theorie derselben aber erst dann ausführlicher eingehen, nachdem wir im Folgenden durch einige vorbebereitende Aufgaben mit den wichtigsten bei ihnen auftretenden Gestalten bekannt geworden sind. Von ganz anderem, allgemeinerem Gesichtspunkte werden wir später auf dieselben zurückkommen.

1. Es sind zwei Punkte (1 und 2) gegeben, es soll ihre Entfernung (r) und die Richtung ihrer Verbindungslinie bestimmt werden.

Wir unterscheiden die Coordinaten der beiden Punkte durch beigefügte Indices; sie seien also x_1, y_1 und x_2, y_2. Die Lösung der Aufgabe folgt dann unmittelbar aus beistehender Fig. 2; es ist

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,;$$

und zwar überzeugt man sich leicht, dass diese Formel ungeändert

bleibt, wenn auch die beiden Punkte nicht, wie in der Zeichnung, in dem positiven Quadranten des Coordinatensystems liegen.

Die *Richtung der Strecke 1-2**) dagegen, d. h. ihr Winkel gegen die X-Axe ist bestimmt durch:

$$x_2 - x_1 = r \cos \varphi$$

$$y_2 - y_1 = r \sin \varphi ,$$

also $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

Fig. 2.

Ist der Punkt 2 nicht selbst gegeben, sondern nur seine Entfernung von 1, so haben wir für ihn nur *eine* Bedingung, er beschreibt also einen geometrischen Ort, den mit dem Halbmesser r um 1 beschriebenen Kreis. *Die Gleichung des letzteren* ist demnach, wenn wir die Coordinaten des beweglichen Punktes ohne Index schreiben:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 .$$

Es sei zweitens die Richtung der Linie 1-2 gegeben, aber nicht die Entfernung r; dann muss, wenn 1 fest angenommen wird, der Punkt 2 immer auf einer bestimmten durch 1 gehenden Geraden bleiben, die unter dem Winkel φ gegen die X-Axe geneigt ist, und es ist also

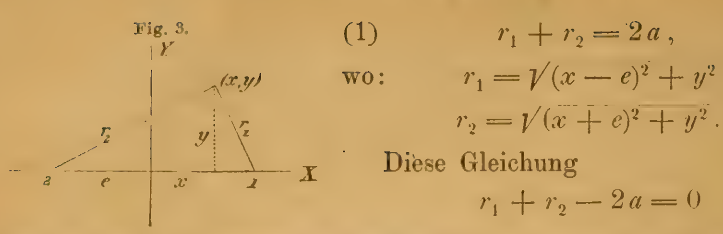
$$(y - y_1) \cos \varphi - (x - x_1) \sin \varphi = 0$$

die *Gleichung dieser Geraden.*

2. *Es seien zwei Punkte (1 und 2) gegeben, es soll der geometrische Ort eines Punktes bestimmt werden, für welchen die Summe der Abstände von den beiden gegebenen Punkten constant ist.*

Bei Lösung dieser Aufgabe machen wir von dem besonderen Hülfsmittel Gebrauch, welches die analytische Geometrie mit Rücksicht auf die Wahl des Coordinatensystems bietet, und dessen geschickte Anwendung nicht selten die Lösung gestellter Probleme wesentlich vereinfacht. Hier nehmen wir die Verbindungslinie der gegebenen Punkte zur X-Axe, und die Y-Axe legen wir der Symmetrie wegen durch den Mittelpunkt dieser Verbindungslinie. Die Entfernung eines jeden der beiden Punkte vom Anfangspunkte sei c, die constante Summe ihrer Entfernungen von dem beweglichen Punkte sei $2a$. Bezeichnen wir ferner die letzteren Entfernungen selbst mit r_1 und r_2, so ist für den dritten Punkt:

*) Wir unterscheiden die Strecke 1-2 von der Strecke 2-1, je nach der Richtung, in welcher wir sie durchlaufen denken.



$$(1) \qquad r_1 + r_2 = 2a,$$

wo:

$$r_1 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}.$$

Diese Gleichung

$$r_1 + r_2 - 2a = 0$$

können wir aber durch Multiplication mit geeigneten Factoren von den in r_1 und r_2 enthaltenen Irrationalitäten befreien. Multipliciren wir nämlich zunächst mit

$$r_1 - r_2 - 2a,$$

so verschwindet die Irrationalität von r_2; die von r_1 wird aufgehoben, wenn wir weiter mit

$$(r_1 - r_2 + 2a)(r_1 + r_2 + 2a)$$

multipliciren.

Wir setzen also an Stelle von (1) die Gleichung:

$$(2) \quad (r_1 + r_2 - 2a)(r_1 - r_2 - 2a)(r_1 - r_2 + 2a)(r_1 + r_2 + 2a) = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$(3) \qquad 0 = 16a^4 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2.$$

Diese Gleichung ist aber nicht mehr die ursprüngliche, sondern sie ist noch mit Factoren multiplicirt. Es kann daher die Frage entstehen, ob die neue Gleichung auch stets die Bedingung der Aufgabe darstellt; und das ist in der That nicht immer der Fall. Der durch die Gleichung (2) dargestellte geometrische Ort sagt nur aus, dass das Product der vier Factoren Null ist, dass also einer von ihnen verschwindet, wobei aber keineswegs der erste Factor ausgezeichnet ist; und nur *sein* Verschwinden wird ja in unserer Aufgabe gefordert. Der letzte Factor kann nicht verschwinden, da r_1 und r_2 wesentlich positiv sind. Es ist also entweder

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

oder es verschwindet einer der beiden anderen Factoren, d. h. es ist:

$$r_1 - r_2 = 2a \quad \text{oder} \quad r_2 - r_1 = 2a,$$

was nicht wesentlich verschieden ist. Unser geometrischer Ort stellt also eine Curve dar, bei der entweder die Summe oder die Differenz der Entfernungen des beschreibenden Punktes von zwei festen Punkten constant, $= 2a$, ist; und wir haben somit diese beiden Aufgaben gleichzeitig behandelt. Welcher dieser beiden Fälle eintritt, entscheidet sich aus dem Grössenverhältnisse von $2a$ zu $2e$ mit Hülfe der Sätze über Summe und Differenz zweier Seiten im Dreieck. Ist nämlich $a > e$, so ist in dem durch den beweglichen und die beiden festen Punkte bestimmten

Dreieck $2a$ nothwendig die *Summe* der Seiten, da ihre Differenz nicht grösser, als die dritte sein darf; ist aber $a < e$, so kann $2a$ nur die *Differenz* der beiden Entfernungen sein, da sonst die Summe zweier Seiten kleiner, als die dritte wäre. *Die Gleichung (3) stellt also eine Curve dar, für deren Punkte die Summe oder Differenz der Abstände von zwei festen Punkten constant ist, je nachdem $a > e$ oder $a < e$ ist.*

Drücken wir r_1, r_2 wieder durch x, y und e aus, so wird diese Gleichung (3):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0\,.$$

Ist hier $a > e$, so wird $a^2 - e^2$ positiv, $= b^2$, also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{4}$$

eine Curve, die den Namen *Ellipse* führt. Im zweiten Falle, d. h. für $a < e$, ist $a^2 - e^2$ negativ, $= - b^2$, und unsere Gleichung wird:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{5}$$

eine Curve, welche man als *Hyperbel* zu bezeichnen pflegt. Was die Gestalt beider Curven angeht, so erhellt aus ihren Gleichungen, welche nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten, sofort, dass immer 4 symmetrisch gegen die Coordinatenaxen liegende Punkte ihnen genügen, d. h. 4 Punkte, deren Coordinaten sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden. Jede der Curven besteht also aus vier congruenten Theilen, und wir brauchen dieselben nur in einem Quadranten des Coordinatensystems zu untersuchen.

Bei der Ellipse sehen wir ferner, dass x nie grösser als a, y nie grösser als b werden kann, dass also die Curve ganz im Endlichen liegt, begrenzt von vier Geraden, die wir in den Abständen a und b respective zur Y- und X-Axe parallel zu ziehen haben. Punkt für Punkt können wir die Ellipse auch einfach construiren, wenn wir die Aehnlichkeit ihrer Gleichung mit der Identität:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

beachten. Setzen wir nämlich

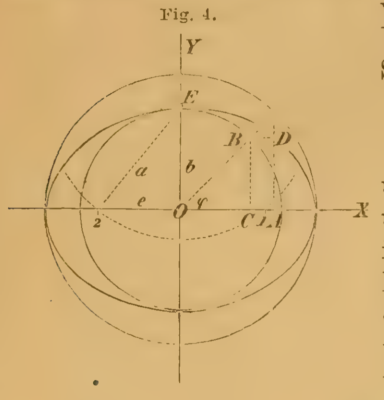
$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi\,, \end{aligned} \tag{6}$$

so wird die Gleichung (4) unabhängig von φ erfüllt, und wir erhalten alle Punkte der Curve, wenn wir φ von 0 bis 2π variiren lassen. Diese Darstellungsweise eines Punktes, bei welcher seine Coordinaten von einer dritten Variabeln, *einem Parameter*, abhängig gemacht werden, ist der Darstellung der von dem Punkte beschriebenen Curve durch eine *Gleichung* völlig gleichberechtigt; die letztere ergiebt sich wieder durch Elimination des Parameters. Diese neue Form, in der ein geome-

trischer Ort hier auftritt, wird uns später sogar ein wichtiges Hülfsmittel zur Eintheilung der Curven höherer Ordnung sein, indem wir dabei auf die Natur der Functionen, welche den Parameter mit den Coordinaten verknüpfen, Gewicht legen.

Unsere Gleichungen (6) ergeben nun unmittelbar folgende Construction für die Ellipse: wir beschreiben um den Anfangspunkt O einen Kreis mit dem Radius a, einen zweiten mit dem Radius b und ziehen von O aus einen unter beliebigem Winkel φ gegen die X-Axe geneigten Strahl; alsdann ist (vergl. Fig. 4):

Fig. 4.



$$OA = x = a \cos \varphi$$

$$BC = y = b \sin \varphi\,,$$

und also ist D ein Punkt der Ellipse, und in dieser Weise ist die Curve nach ihrer ganzen Erstreckung zu zeichnen. Die Construction der *Brennpunkte*, d. h. der beiden festen Punkte, von denen aus wir ursprünglich zu der Ellipse geführt wurden, ergibt sich aus der Relation

$$e^2 = a^2 - b^2;$$

sie werden also durch einen mit dem Radius a um den Punkt E beschriebenen Kreis auf der X-Axe ausgeschnitten. Die Entfernung e eines Brennpunktes vom Anfangspunkte wird *Excentricität der Ellipse genannt*; verschwindet dieselbe, ist also $a = b$, so geht die Gleichung in die des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2$$

über. Die Grössen a und b werden bezüglich als *grosse und kleine halbe Axe der Ellipse* bezeichnet.

Bei der Hyperbel haben wir ebenfalls vier congruente Theile; es kann ferner, wie der Anblick der Gleichung zeigt, x nie kleiner als a werden, während wir für das Wachsthum von y keine Grenze angeben können. In dem Streifen, den wir erhalten, wenn wir zur Y-Axe im Abstande $\pm a$ von ihr Parallele ziehen, befindet sich folglich kein Punkt der Curve. Im Uebrigen wird x und y in Betreff der Grösse nicht beschränkt; die Hyperbel erstreckt sich demnach in's Unendliche.

Um ihren Verlauf näher kennen zu lernen, ziehen wir durch den Anfangspunkt, unter irgend einem Winkel φ gegen die X-Axe geneigt, eine Linie und suchen die auf ihr befindlichen Punkte der Curve. Bezeichnen wir die Entfernung eines solchen Punktes vom Anfangspunkte mit r, setzen also

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi\,,$$

so ergibt die Gleichung der Curve (5) für r eine quadratische Gleichung:

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}};$$

und auf jedem solchen Strahle liegen also im Allgemeinen 2 Punkte. Lassen wir φ von 0 an wachsen, so wird im Nenner das erste Glied immer kleiner, das zweite immer grösser, d. h. r wächst von a an constinuirlich und erreicht für

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} = \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$$

einen unendlich grossen Werth, während r für noch grössere Werthe von φ imaginär wird. Nennen wir diesen Winkel, der die Richtung der unendlich fernen Punkte der Hyperbel gibt, α, so ist

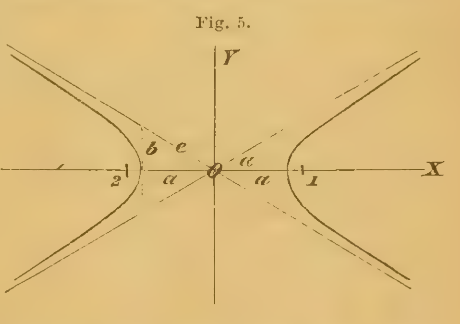
$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{b}{a}.$$

Es gibt somit zwei symmetrisch gegen die Coordinatenaxen liegende Linien, denen sich die Curve unbegrenzt nähert, ohne sie jemals zu erreichen, zwei Linien, welche aus diesem Grunde *Asymptoten der Hyperbel* genannt werden. Ihr geometrischer Zusammenhang mit den beiden *Brennpunkten*, wie wir wieder unsere festen Ausgangspunkte nennen, ergibt sich aus der Gleichung:

$$a^2 + b^2 = e^2,$$

mit deren Hülfe wir die Asymptoten einfach construiren können (vergl. Fig. 5).

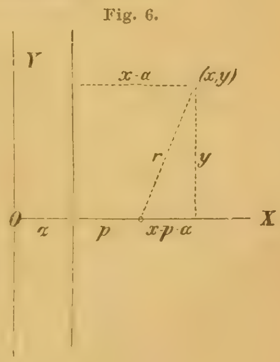
Fig. 5.



Nehmen wir $a = b$ an, so erhalten wir eine Curve, *die gleichseitige Hyperbel*, welche zu der Hyperbel in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zur Ellipse; sie ist besonders dadurch ausgezeichnet, dass ihre beiden Asymptoten zu einander rechtwinklig sind.

3. Es soll der geometrische Ort eines Punktes gefunden werden, für welchen der Quotient seiner Abstände von einem gegebenen festen Punkte und einer gegebenen festen Geraden constant ist.

Fig. 6.



Wir legen zunächst wieder das Coordinatensystem so, dass die analytischen Operationen eine möglichst einfache Gestalt gewinnen: Zur X-Axe wählen wir die von dem gegebenen Punkte auf die gegebene Gerade gefällte Senkrechte, deren Länge p sein möge; den Anfangspunkt nehmen wir,

um gleichzeitig alle hier möglichen Fälle zu erhalten, zunächst noch beliebig, etwa im Abstande α von der Geraden, an; für den constanten Quotienten sei der Werth m gegeben. Alsdann wird die Gleichung unseres geometrischen Ortes (vergl. Fig. 6):

$$r = \sqrt{(x - p - \alpha)^2 + y^2} = m\,(x - \alpha),$$

oder, wenn wir das Wurzelzeichen fortschaffen:

$$0 = (m^2 - 1)\,x^2 - 2\,((m^2 - 1)\,\alpha - p)\,x + m^2\alpha^2 - (p + \alpha)^2 - y^2,$$

eine Gleichung, welche in ihrer Ordnung mit der obigen für Ellipse und Hyperbel übereinstimmt, auch, abgesehen von dem Gliede mit x, ihnen ganz analog gebaut ist. Dies Glied aber lässt sich, wenn nicht $m = 1$ ist, welchen Fall wir nachher behandeln werden, durch passende Wahl von α herausschaffen. In der That brauchen wir nur

$$\alpha = \frac{p}{m^2 - 1}$$

zu setzen, um die Gleichung des Ortes in der uns bekannten Form

$$\frac{x^2}{\frac{m^2}{(1 - m^2)^2}\,p^2} + \frac{y^2}{\frac{m^2}{1 - m^2}\,p^2} - 1 = 0$$

zu erhalten: es ist die Gleichung der Ellipse für $m < 1$, der Hyperbel für $m > 1$. Es folgt also:

Ist ein Punkt und eine Gerade gegeben, und ein zweiter Punkt bewegt sich so, dass der Quotient seiner Abstände von jenem Punkte und jener Geraden constant bleibt, so beschreibt der Punkt eine Ellipse, wenn er immer dem gegebenen Punkte, eine Hyperbel, wenn er immer der gegebenen Geraden näher bleibt.

Wir sehen hier einen gewissen Punkt und eine gewisse Gerade in enger Beziehung zu unseren beiden Curven zweiter Ordnung, und eine kleine Rechnung wird zeigen, dass der Punkt einer der uns schon bekannten Brennpunkte ist. Es sei zuerst $m < 1$ (Ellipse); dann sind die Quadrate der halben grossen und der halben kleinen Axe gegeben durch

$$a^2 = \frac{m^2}{(1 - m^2)^2}\,p^2, \quad b^2 = \frac{m^2}{1 - m^2}\,p^2,$$

und es ist also:

$$e^2 = a^2 - b^2 = \frac{m^4}{(1 - m^2)^2}\,p^2,$$

oder:

$$e = \frac{m^2 p}{1 - m^2}.$$

Ferner ist die Entfernung des gegebenen festen Punktes vom Anfangspunkte

$$= p + a = \frac{m^2 p}{1 - m^2} = e,$$

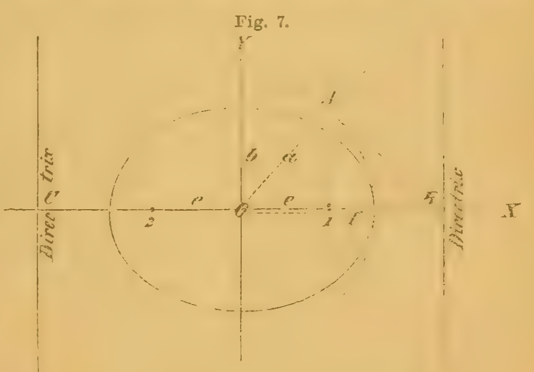
also gleich der Entfernung des Brennpunktes vom Anfangspunkte; beide Punkte sind folglich identisch. Ebenso steht natürlich eine zweite Gerade zu dem andern Brennpunkte in derselben Beziehung, wie es die Symmetrie der Curve gegen die Y-Axe erfordert; beide Linien werden als *Directricen der Ellipse* bezeichnet. Die Berechnung des Abstandes f einer solchen vom *Mittelpunkte der Ellipse* (d. h. dem Anfangspunkte bei unserer Coordinatenbestimmung) führt zu einer einfachen Construction der Directrix. Es ist nämlich

$$b^2 = ep, \text{ folglich:}$$

$$f = e + p = \frac{b^2 + e^2}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d. h. *die halbe grosse Axe ist mittlere Proportionale zwischen der Excentricität und der Entfernung der Directrix vom Mittelpunkte.* Zur Construction errichtet man also (vergl. Fig. 7) in einem Brennpunkte (1) ein Loth auf der X-Axe, schneidet dies in A mit einem um O mit dem Radius a beschriebenen Kreise, und errichtet auf OA ein Loth, welches in B den Schnittpunkt der Directrix mit der X-Axe bestimmt. Die zweite Linie der Art ist parallel zu dieser in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte; beide nehmen die Curve in ihre Mitte ($CO = OB$).

Fig. 7.



Ganz ähnlich gestalten sich diese Verhältnisse bei der Hyperbel ($m > 1$), nur liegen die Directricen hier in dem *inneren* Raume so, dass sie die Curve ebenfalls nicht treffen. In der That, setzen wir, um zur Hyperbel überzugehen, in den für die Ellipse geltenden Gleichungen $-b^2$ statt b^2, so erhalten wir für den Abstand der Directrix vom Anfangspunkte:

$$f = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

die halbe grosse Axe ist also wieder mittlere Proportionale zwischen der Entfernung des Brennpunktes und der Entfernung der Directrix vom Mittelpunkte, und daraus ergibt sich eine einfache Construction der letzteren, ähnlich wie bei der Ellipse.

Es bleibt uns noch übrig, den Fall $m = 1$ zu untersuchen, *wo*

also der bewegliche Punkt von dem festen Punkte und der festen Geraden gleich weit entfernt bleibt. Unsere ursprüngliche Gleichung wird dann:

$$y^2 - 2\,px + p\,(p + 2\,\alpha) = 0\,;$$

setzt man also:

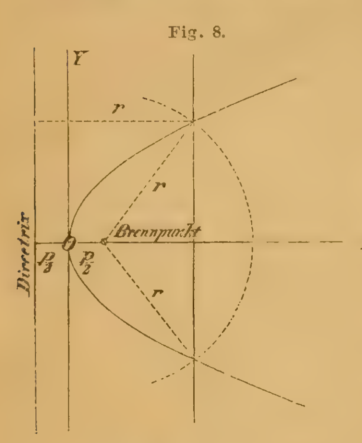
$$\alpha = -\frac{p}{2}\,,$$

so geht sie über in:

$$y^2 = 2\,px\,,$$

ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung, *die Parabel*, deren Gleichung x nicht im Quadrate enthält. Ferner zeigt die Form der Gleichung, dass x nie negativ werden kann; die Curve liegt also ganz auf einer Seite der Y-Axe und erstreckt sich auf dieser, vom Anfangspunkte als Scheitel beginnend, in's Unendliche. Die Eigenschaft der Parabel, von welcher wir ausgingen, ergibt eine einfache Construction derselben: Man beschreibt um den festen Punkt, *den Brennpunkt der Parabel*, mit beliebigem Radius (r) einen Kreis und schneidet diesen mit einer Parallelen zur Y-Axe, welche von der festen Geraden, *der Directrix der Parabel*, um die Länge jenes Radius entfernt ist: die beiden Schnittpunkte sind dann Punkte der Curve (vergl. Fig. 8).

Fig. 8.



4. *Es soll der Flächeninhalt des durch drei gegebene Punkte bestimmten Dreiecks berechnet werden.*

Nehmen wir zunächst den Anfangspunkt der Coordinaten als in einem der Punkte gelegen an. Ziehen wir durch jeden der beiden anderen (1 und 2) eine Parallele zur X- und Y-Axe (vgl. Fig. 9), so sieht man sofort, dass der Inhalt des fraglichen Dreiecks gegeben ist durch:

Fig 9.

$$\begin{aligned} \varDelta &= x_1 y_2 - \tfrac{1}{2} x_2 y_2 - \tfrac{1}{2} x_1 y_1 - \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)\,. \end{aligned}$$

Ertheilen wir nunmehr dem dritten Punkte die Coordinaten x_0, y_0, so haben wir in diesem Ausdrucke nur $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $y_1 - y_0$, $y_2 - y_0$ statt x_1, x_2, y_1, y_2 einzusetzen, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varDelta &= \tfrac{1}{2}\left[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 + x_0 y_1 + x_2 y_0 - x_0 y_2 - x_1 y_0 - x_2 y_1)\,. \end{aligned}$$

Der vor uns stehende Ausdruck ist wegen der Anordnung seiner Glie-

der besonders beachtenswerth, es ist eine sogenannte *Determinante.* Man versteht hierunter im Allgemeinen eine nach gewissem Gesetze aufgebaute, algebraische Combination einer quadratischen Anzahl von Elementen, deren Natur am besten an Beispielen zu erläutern sein wird. Das einfachste Beispiel liefert die *zweigliedrige Determinante aus vier Elementen:*

$$ab' - ba',$$

wofür man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

schreibt; und auf diese werden alle mehrgliedrigen Determinanten durch ein recurrirendes Verfahren zurückgeführt. Die nächst höhere Stufe würde die *aus 9 Elementen zu bildende dreigliedrige Determinante:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

ergeben. Der Uebersichtlichkeit wegen gebraucht man jedoch in einer Determinante, d. h. in einem Schema der vor uns stehenden Art, für die einzelnen Elemente besser denselben Buchstaben und unterscheidet sie durch obere und untere Indices, von denen der eine die Verticalreihe, der andere die Horizontalreihe angibt, welcher das Glied in unserem Schema angehört. Man schreibt also eine dreigliedrige Determinante in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{,}^{\prime} & a_{,}^{\prime\prime} & a_{,}^{\prime\prime\prime} \\ a_{,,}^{\prime} & a_{,,}^{\prime\prime} & a_{,,}^{\prime\prime\prime} \\ a_{,,,}^{\prime} & a_{,,,}^{\prime\prime} & a_{,,,}^{\prime\prime\prime} \end{vmatrix}.$$

Die Bildung des hierdurch repräsentirten algebraischen Ausdruckes lässt sich nunmehr in folgender Weise aussprechen:

Die Determinante ist gleich dem Aggregate der Glieder, welche aus dem Diagonalgliede obigen Schema's durch Permutation der oberen (oder unteren) Indices entstehen, wenn man bei jeder Vertauschung zweier Indices das Vorzeichen des betreffenden Gliedes ändert; es darf dabei natürlich kein Glied zweimal vorkommen. Wir haben hiernach:

$$\begin{vmatrix} a_{,}^{\prime} & a_{,}^{\prime\prime} & a_{,}^{\prime\prime\prime} \\ a_{,,}^{\prime} & a_{,,}^{\prime\prime} & a_{,,}^{\prime\prime\prime} \\ a_{,,,}^{\prime} & a_{,,,}^{\prime\prime} & a_{,,,}^{\prime\prime\prime} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{,}^{\prime\prime\prime}\ a_{,,}^{\prime\prime}\ a_{,,,}^{\prime} - a_{,,}^{\prime}\ a_{,}^{\prime\prime}\ a_{,,,}^{\prime\prime\prime} \\ - a_{,}^{\prime}\ a_{,,,}^{\prime\prime}\ a_{,,}^{\prime\prime\prime} - a_{,,,}^{\prime}\ a_{,,}^{\prime\prime}\ a_{,}^{\prime\prime\prime} \\ + a_{,,}^{\prime}\ a_{,,,}^{\prime\prime}\ a_{,}^{\prime\prime\prime} + a_{,,,}^{\prime}\ a_{,}^{\prime\prime}\ a_{,,}^{\prime\prime\prime}. \end{array}$$

Analoges gilt für n-gliedrige Determinanten, bei denen $n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ Permutationen nöthig sein werden; eine einfache Ueberlegung zeigt, dass dabei immer *gleich viel positive und negative*

Glieder vorkommen müssen. Doch wollen wir hier auf die allgemeine Determinantentheorie nicht näher eingehen*), wir beschränken uns auf die Angabe einiger Sätze, welche wir im Folgenden wiederholt gebrauchen werden.

Zunächst bemerkt man, dass unsere Entwicklung der Determinante sich nicht ändert, wenn wir obere und untere Indices vertauschen, d. h. *die Determinante behält denselben Werth, wenn man Horizontal- und Verticalreihen vertauscht*:

$$R = \begin{vmatrix} a_,' & a_,'' & a_,''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_,' & a_{,,}' & a_{,,,}' \\ a_,'' & a_{,,}'' & a_{,,,}'' \\ a_,''' & a_{,,}''' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Ferner ist es charakteristisch für die Entwicklung der Determinante, dass *in jedem Gliede nur ein Element aus jeder Horizontal- oder Vertical-Reihe vorkommt*; wir können demnach diese Glieder nach den Elementen einer Reihe ordnen, also z. B. schreiben:

$$R = a_,'(a_{,,}''a_{,,,}''' - a_{,,}'''a_{,,,}'') + a_,''(a_{,,}'''a_{,,,}' - a_{,,}'a_{,,,}''')$$
$$+ a_,'''(a_{,,}'a_{,,,}'' - a_{,,}''a_{,,,}').$$

Ein Blick auf diese Entwicklung zeigt, dass der (untere) Index der Glieder der bevorzugten Reihe in ihren Factoren nicht vorkommt, dass ferner die letzteren selbst wieder zweigliedrige Determinanten sind; und analog gelingt bei mehrgliedrigen Determinanten durch Wiederholung des Verfahrens die Zurückführung auf Determinanten von weniger Gliedern, die man dann selbst wieder in ähnlicher Weise zerlegen kann. Diese niederen Determinanten werden in ihrer Stellung zu der gegebenen Determinante als *Unterdeterminanten* bezeichnet; einem jeden Elemente von R entspricht eine solche: sie ist der Factor, mit welchem dasselbe in der Entwicklung von R multiplicirt erscheint. Wir bezeichnen sie mit einem grossen Buchstaben und setzen diesem dieselben Indices bei, welche dem entsprechenden Elemente zukommen. Die so resultirenden 9 Unterdeterminanten können wir dann in dem Schema:

$$\begin{matrix} A_,' & A_,'' & A_,''' \\ A_{,,}' & A_{,,}'' & A_{,,}''' \\ A_{,,,}' & A_{,,,}'' & A_{,,,}''' \end{matrix}$$

*) Die Determinantentheorie ist in neuerer Zeit, auch in elementarer Weise, so vielfach behandelt, dass es wohl überflüssig ist, sie nochmals zu wiederholen; es kann daher für die späteren Abtheilungen dieser Vorlesungen auf die bezüglichen Lehrbücher verwiesen werden. Vgl. besonders:

Hesse: Die Determinanten, elementar behandelt. Leipzig 1871.

Hattendorf: Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Hannover 1872, und das ausführlichere Werk von Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. Im Texte sind nur die in der ersten Abtheilung gebrauchten Sätze angegeben.

zusammenstellen, wo z. B.

$$A_{,}' = \begin{vmatrix} a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}, \quad A_{,,}''' = \begin{vmatrix} a_{,}'' & a_{,}' \\ a_{,,,}'' & a_{,,,}' \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

Zufolge unserer Definition der Unterdeterminanten *können wir R aus ihnen erzeugen, indem wir eine Reihe von Elementen resp. mit den Unterdeterminanten der entsprechenden Reihe multipliciren und diese Producte addiren.* Wir erhalten so, wenn wir nach den Horizontalreihen ordnen:

$$\begin{aligned} R &= a_{,}' A_{,}' + a_{,}'' A_{,}'' + a_{,}''' A_{,}''' \\ &= a_{,,}' A_{,,}' + a_{,,}'' A_{,,}'' + a_{,,}''' A_{,,}''' \\ &= a_{,,,}' A_{,,,}' + a_{,,,}'' A_{,,,}'' + a_{,,,}''' A_{,,,}''', \end{aligned}$$

oder wenn wir nach den Verticalreihen ordnen:

$$\begin{aligned} R &= a_{,}' A_{,}' + a_{,,}' A_{,,}' + a_{,,,}' A_{,,,}' \\ &= a_{,}'' A_{,}'' + a_{,,}'' A_{,,}'' + a_{,,,}'' A_{,,,}'' \\ &= a_{,}''' A_{,}''' + a_{,,}''' A_{,,}''' + a_{,,,}''' A_{,,,}'''. \end{aligned}$$

Für dreigliedrige Determinanten lässt sich ein einfaches mechanisches Gesetz angeben, um die Bildung der Unterdeterminanten, und somit die Entwicklung der Determinante selbst zu erleichtern; man schreibe nämlich die ersten beiden Verticalreihen noch einmal rechts neben die Determinante, also:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' & a_{,}' & a_{,}'' \\ \diagdown & \times & > & < & \diagup \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' & a_{,,}' & a_{,,}'' \\ \diagup & \times & > & < & \diagdown \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' & a_{,,,}' & a_{,,,}'' \end{array}\right.,$$

und verbinde die Elemente durch schräg durchlaufende Linien, wie es hier geschehen ist. Je drei auf einer solchen Linie stehende Glieder geben dann, mit einander multiplicirt, ein Glied der Determinante, und zwar ist es positiv, wenn die betreffende Linie von links oben nach rechts unten, negativ, wenn sie von rechts oben nach links unten läuft. Dies lässt uns sofort die Richtigkeit des Satzes erkennen:

Wenn zwei Horizontal- oder Vertical-Reihen mit einander vertauscht werden, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen; also ist:

$$R' = \begin{vmatrix} a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,}' & a_{,}'' & a_{,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} = -R.$$

Man erkennt nämlich bei Anwendung der eben angegebenen Regel zur Entwickelung von R' sofort, dass ein Glied, welches früher auf einer von links nach rechts laufenden Linie stand, nunmehr auf einer von rechts nach links laufenden steht und umgekehrt. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist der andere:

Wenn in einer Determinante zwei parallele Reihen Glied für Glied einander gleich sind, so verschwindet dieselbe; eine Vertauschung der beiden Reihen nämlich würde eine Vorzeichenänderung erfordern, ohne dass die Determinante selbst doch verändert wird. Hieraus folgt unmittelbar: *Multiplicirt man die Unterdeterminanten einer Reihe respective mit den Elementen einer zu der entsprechenden Elementenreihe parallelen Reihe, so ist die Summe der Producte stets Null.* Also z. B.:

$$0 = a_,' A_{,,}' + a_,'' A_{,,}'' + a_,''' A_{,,}''', \text{ oder:}$$
$$0 = a_,' A_,'' + a_{,,}' A_{,,}'' + a_{,,,}' A_{,,,}''.$$

Und als eine Folge dieses Satzes erscheint der folgende, welcher zur Berechnung einer Determinante oft von Wichtigkeit wird: *Der Werth einer Determinante wird nicht geändert, wenn man die Elemente einer Reihe um ein Vielfaches der Elemente einer parallelen Reihe vermehrt oder vermindert*, d. h. es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_,' & a_,'' & a_,''' \\ a_{,,}' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_,' + m a_,''' & a_,'' & a_,''' \\ a_{,,}' + m a_{,,}''' & a_{,,}'' & a_{,,}''' \\ a_{,,,}' + m a_{,,,}''' & a_{,,,}'' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Denn entwickelt man nach den Gliedern der ersten Verticalreihe und ihren Unterdeterminanten, so liefern die mit m multiplicirten Glieder einen verschwindenden Beitrag.

Eine der wichtigsten Anwendungen für die Determinantentheorie bietet die *Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen*, welche durch sie in einfacher Weise ermöglicht wird. Wir beschränken uns auch hier auf die Behandlung von *drei* linearen Gleichungen mit *drei* Unbekannten: x_1, x_2, x_3. Diese Gleichungen seien in der Form gegeben:

$$a_,' x_1 + a_{,,}' x_2 + a_{,,,}' x_3 = y'$$
$$a_,'' x_1 + a_{,,}'' x_2 + a_{,,,}'' x_3 = y''$$
$$a_,''' x_1 + a_{,,}''' x_2 + a_{,,,}''' x_3 = y''',$$

und wir setzen:

$$R = \begin{vmatrix} a_,' & a_{,,}' & a_{,,,}' \\ a_,'' & a_{,,}'' & a_{,,,}'' \\ a_,''' & a_{,,}''' & a_{,,,}''' \end{vmatrix}.$$

Die Lösung obiger Gleichungen erhalten wir dann unmittelbar in folgender Weise: wir multipliciren dieselben bezüglich mit den Unterdeterminanten $A_,'$, $A_,''$, $A_,'''$ und addiren; alsdann fallen nach einem früheren Satze alle anderen Glieder fort, und es bleibt nur:

$$R x_1 = A_,' y' + A_,'' y'' + A_,''' y'''.$$

Ebenso erhält man durch Multiplication mit $A_{,,}'$, $A_{,,}''$, $A_{,,}'''$ und $A_{,,,}'$, $A_{,,,}''$, $A_{,,,}'''$ respective:

$$Rx_2 = A_{,,}{}' y' + A_{,,}{}'' y'' + A_{,,}{}''' y'''$$
$$Rx_3 = A_{,,,}{}' y' + A_{,,,}{}'' y'' + A_{,,,}{}''' y''',$$

und damit ist unsere Aufgabe gelöst. Die Bildung der rechts stehenden Ausdrücke geschieht demnach dadurch, dass man in R die Elemente der ersten, zweiten, dritten Verticalreihe durch y', y'', y''' ersetzt.

Ist insbesondere $y' = 0$ und $y'' = 0$ gegeben, so haben wir:

$$x_1 = \frac{y'''}{R} A_{,}{}'''$$
$$x_2 = \frac{y'''}{R} A_{,,}{}'''$$
$$x_3 = \frac{y'''}{R} A_{,,,}{}''',$$

und daraus ergibt sich:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_{,}{}''' : A_{,,}{}''' : A_{,,,}{}''',$$

eine Gleichung, welche unabhängig von dem Werthe von y''' besteht. Sind uns demnach nur zwei homogene lineare Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben:

$$a_{,}{}' x_1 + a_{,,}{}' x_2 + a_{,,,}{}' x_3 = 0$$
$$a_{,}{}'' x_1 + a_{,,}{}'' x_2 + a_{,,,}{}''' x_3 = 0,$$

so können wir diese selbst zwar nicht daraus bestimmen, wohl aber ihre Verhältnisse; *dieselben sind nach wie vor gleich den betr. Unterdeterminanten*, wie man auch finden würde, wenn man die gegebenen Gleichungen als zwei nicht homogene mit den Unbekannten $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ ansehen wollte. Die Unterdeterminanten mit 3 oberen Indices hängen ja auch nur von den in den beiden ersten Gleichungen vorkommenden Constanten ab.

Verschwindet endlich auch y''', so haben wir nach der Division mit x_3 drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die im Allgemeinen nicht gleichzeitig zu befriedigen sein werden; sondern es muss, damit sie zusammen bestehen können, den Coëfficienten eine Bedingung auferlegt werden: es muss eine gewisse Function derselben, *ihre Resultante*, verschwinden, eine Gleichung, welche man aus den 3 Gleichungen durch Elimination der Unbekannten erhält. Ist nämlich gegeben:

$$a_{,}{}' x_1 + a_{,,}{}' x_2 + a_{,,,}{}' x_3 = 0$$
$$a_{,}{}'' x_1 + a_{,,}{}'' x_2 + a_{,,,}{}'' x_3 = 0$$
$$a_{,}{}''' x_1 + a_{,,}{}''' x_2 + a_{,,,}{}''' x_3 = 0,$$

so finden wir durch unsere allgemeine Lösung für lineare Gleichungen:

$$Rx_1 = 0, \quad Rx_2 = 0, \quad Rx_3 = 0.$$

Es muss also entweder

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

sein, eine Lösung, durch die alle homogenen Gleichungen unserer Art selbstverständlich erfüllt sind, oder es muss die Gleichung

$$R = 0$$

bestehen; und diese ist das Resultat der Elimination der Unbekannten aus den gegebenen Gleichungen. Ganz Analoges gilt für n Variable und n-gliedrige Determinanten; wir haben:

Wenn n homogene lineare Gleichungen zusammen bestehen sollen, so muss die Determinante ihrer Coëfficienten verschwinden.

Aus der allgemeinen Lösung, welche wir für die 3 nicht homogenen Gleichungen fanden, indem wir die x durch die y ausdrückten, müssen wir natürlich rückwärts die y wieder aus den x berechnen können, und zwar durch ein ganz analoges Verfahren. Statt der Determinante R werden wir dabei die aus den Unterdeterminanten A zu bildende Determinante nöthig haben, nämlich:

$$S = \begin{vmatrix} A_{,}' & A_{,}'' & A_{,}''' \\ A_{,,}' & A_{,,}'' & A_{,,}''' \\ A_{,,,}' & A_{,,,}'' & A_{,,,}''' \end{vmatrix},$$

die Determinante des adjungirten Systems; denn mit diesem Ausdrucke bezeichnet man das System der Unterdeterminanten A gegenüber dem der ursprünglichen Elemente a. Bezeichnen wir ferner die Unterdeterminanten von S durch obere und untere Indices, setzen also z. B.

$$S_{,}' = \begin{vmatrix} A_{,,}'' & A_{,,}''' \\ A_{,,,}'' & A_{,,,}''' \end{vmatrix},$$

so erhalten wir als Auflösung die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Sy' &= R\,(S_{,}'\,x_1 + S_{,,}'\,x_2 + S_{,,,}'\,x_3) \\ Sy'' &= R\,(S_{,}''\,x_1 + S_{,,}''\,x_2 + S_{,,,}''\,x_3) \\ Sy''' &= R\,(S_{,}'''x_1 + S_{,,}'''x_2 + S_{,,,}'''x_3)\,. \end{aligned}$$

Da diese wieder mit den ursprünglich gegebenen identisch sein müssen, so folgt:

$$a_{,}' = \frac{R}{S}\,S_{,}', \quad a_{,,}' = \frac{R}{S}\,S_{,,}', \quad a_{,,,}' = \frac{R}{S}\,S_{,,,}', \text{ u. s. f.}$$

Nun ist aber nach dem sogleich zu erwähnenden Multiplicationssatze der Determinanten:

$$S = R^2,$$

und somit erhalten wir die Relationen:

$$\begin{aligned} S_{,}' &= Ra_{,}', & S_{,,}' &= Ra_{,,}', & S_{,,,}' &= Ra_{,,,}' \\ S_{,}'' &= Ra_{,}'', & S_{,,}'' &= Ra_{,,}'', & S_{,,,}'' &= Ra_{,,,}'' \\ S_{,}''' &= Ra_{,}''', & S_{,,}''' &= Ra_{,,}''', & S_{,,,}''' &= Ra_{,,,}'''\,. \end{aligned}$$

Das soeben benutzte *Multiplicationstheorem* besteht aber in Folgendem: Sind zwei Determinanten mit den Elementen a und b gegeben, so ist ihr Product:

$$\begin{vmatrix} a_{\prime}' & a_{\prime\prime}' & a_{\prime\prime\prime}' \\ a_{\prime}'' & a_{\prime\prime}'' & a_{\prime\prime\prime}'' \\ a_{\prime}''' & a_{\prime\prime}''' & a_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{\prime}' & b_{\prime\prime}' & b_{\prime\prime\prime}' \\ b_{\prime}'' & b_{\prime\prime}'' & b_{\prime\prime\prime}'' \\ b_{\prime}''' & b_{\prime\prime}''' & b_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix}$$

selbst eine Determinante, nämlich:

$$\begin{vmatrix} a_{\prime}' b_{\prime}' + a_{\prime}'' b_{\prime}'' + a_{\prime}''' b_{\prime}''', & a_{\prime}' b_{\prime\prime}' + a_{\prime}'' b_{\prime\prime}'' + a_{\prime}''' b_{\prime\prime}''', & a_{\prime}' b_{\prime\prime\prime}' + a_{\prime}'' b_{\prime\prime\prime}'' + a_{\prime}''' b_{\prime\prime\prime}''' \\ a_{\prime\prime}' b_{\prime}' + a_{\prime\prime}'' b_{\prime}'' + a_{\prime\prime}''' b_{\prime}''', & a_{\prime\prime}' b_{\prime\prime}' + a_{\prime\prime}'' b_{\prime\prime}'' + a_{\prime\prime}''' b_{\prime\prime}''', & a_{\prime\prime}' b_{\prime\prime\prime}' + a_{\prime\prime}'' b_{\prime\prime\prime}'' + a_{\prime\prime}''' b_{\prime\prime\prime}''' \\ a_{\prime\prime\prime}' b_{\prime}' + a_{\prime\prime\prime}'' b_{\prime}'' + a_{\prime\prime\prime}''' b_{\prime}''', & a_{\prime\prime\prime}' b_{\prime\prime}' + a_{\prime\prime\prime}'' b_{\prime\prime}'' + a_{\prime\prime\prime}''' b_{\prime\prime}''', & a_{\prime\prime\prime}' b_{\prime\prime\prime}' + a_{\prime\prime\prime}'' b_{\prime\prime\prime}'' + a_{\prime\prime\prime}''' b_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix} \cdot$$

wobei die Elemente der resultirenden Determinante gebildet werden aus den Summen der Producte der Elemente irgend einer Reihe der einen Determinante in die entsprechenden Elemente irgend einer Reihe der andern. Ber Beweis dafür ergibt sich durch Zerlegung der grossen Determinante in eine Summe von lauter einzelnen, einfacher gebildeten, und zwar in folgender Weise. Entwickeln wir zunächst nach den Elementeu einer Verticalreihe, so erhalten wir ersichtlich, da jedes der drei Elemente aus einer Summe von drei Grössen besteht, eine Summe von 9 Gliedern, die wir auch als Summe von drei Determinanten schreiben können, der Art, dass in ihnen jedesmal die erste Verticalreihe aus drei in der ersten Verticalreihe der grossen Determinante unter einander stehenden Elementen besteht, während die beiden andern Verticalreihen ungeändert bleiben. Lösen wir weiter auch diese nach einander in Summen neuer Determinanten auf, so erhalten wir schliesslich ein Aggregat von 27 einzelnen dreigliedrigen Determinanten: Wir können uns dieselben entstanden denken, indem wir jede der 9 Verticalreihen der grossen Determinante mit je zwei anderen dieser Reihen, welche überhaupt mit ihr multiplicirt vorkommen können, zu einer Determinante vereinigen. Man überzeugt sich nun leicht, dass alle diese Partialdeterminanten bis auf sechs verschwinden, indem in den übrigen je zwei identische Elementenreihen vorkommen. Diese sechs Determinanten entstehen, inden man aus den drei Verticalreihen der grossen Determinante je eine erste, eine zweite und eine dritte (nur noch einfache Producte ab enthaltende) Verticalreihe zu einer Determinante vereinigt. Eine solche ist z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_{\prime}' b_{\prime}' & a_{\prime}'' b_{\prime\prime}'' & a_{\prime}''' b_{\prime\prime\prime}''' \\ a_{\prime\prime}' b_{\prime}' & a_{\prime\prime}'' b_{\prime\prime}'' & a_{\prime\prime}''' b_{\prime\prime\prime}''' \\ a_{\prime\prime\prime}' b_{\prime}' & a_{\prime\prime\prime}'' b_{\prime\prime}'' & a_{\prime\prime\prime}''' b_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix} = b_{\prime}' b_{\prime\prime}'' b_{\prime\prime\prime}''' \begin{vmatrix} a_{\prime}' & a_{\prime}'' & a_{\prime}''' \\ a_{\prime\prime}' & a_{\prime\prime}'' & a_{\prime\prime}''' \\ a_{\prime\prime\prime}' & a_{\prime\prime\prime}'' & a_{\prime\prime\prime}''' \end{vmatrix} .$$

Ebenso wie in diesem Gliede erkennt man in den übrigen fünf sofort die eine ursprünglich gegebene Determinante der a als Factor; dass

das Aggregat der anderen Factoren dann nichts anderes, als die Determinante der b in entwickelter Gestalt ist, sieht man am einfachsten, wenn man insbesondere setzt:

$$\begin{array}{lll} a_{,}' = 1 & a_{,}'' = 0 & a_{,}''' = 0 \\ a_{,,}' = 0 & a_{,,}'' = 1 & a_{,,}''' = 0 \\ a_{,,,}' = 0 & a_{,,,}'' = 0 & a_{,,,}''' = 1\,. \end{array}$$

Dadurch wird die Determinante der a gleich der Einheit und obige grosse Determinante geht direct in die der b über, womit unser Multiplicationssatz bewiesen ist. —

Setzen wir nun, um das Theorem zum Beweise der obigen Behauptung zu verwerthen, für die Elemente b die Unterdeterminanten A von R, so erhalten wir:

$$R \cdot S = \begin{vmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = R^3;$$

denn alle anderen Glieder der resultirenden Determinante verschwinden nach einem früheren Satze, und somit folgt in der That:

$$S = R^2.$$

II. Die Curve erster Ordnung: die gerade Linie.

Wir kehren nunmehr zu dem Ausdrucke zurück, welchen wir für den Flächeninhalt eines durch 3 Ecken gegebenen Dreiecks gefunden hatten, und erkennen, dass er sich in der That in Form einer Determinante schreiben lässt. Es ist nämlich:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\,(x_0 y_1 + x_2 y_0 + x_1 y_2 - x_0 y_2 - x_1 y_0 - x_2 y_1)\,.$$

Die Bedingung nun, dass der Inhalt des Dreiecks verschwinde, ist offenbar identisch mit der anderen, dass die drei gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen. Lassen wir daher den Punkt x_0, y_0 unbestimmt, so wird uns *das Verschwinden der Determinante die Gleichung der durch die Punkte 1 und 2 bestimmten Geraden geben*, nämlich:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

sie ist wieder vom ersten Grade, wie die oben in anderer Weise gewonnene Form. Dass die Linie durch die gegebenen Punkte geht, erhellt sofort aus einem der obigen Determinantensätze, wenn man die Coordinaten derselben für x und y einsetzt.

Statt durch zwei beliebige Punkte können wir die Gerade auch durch die Strecken a, b bestimmen, welche sie auf den Coordinatenaxen vom Anfangspunkte aus abschneidet; wir haben zu dem Zwecke die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit diesen Axen $a, 0$ und $0, b$ in (1) einzusetzen, wodurch wir erhalten:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = ab - bx - ay\,,$$

oder:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0\,, \tag{2}$$

eine Gleichung, welche für die Theorie der Geraden und insbesondere für unsere späteren allgemeineren Erörterungen von hoher Bedeutung ist. Indem wir nämlich die Gleichung einer jeden Geraden auf diese Form bringen können, sind uns bei jeder auch sofort ihre Abschnitte auf den Axen gegeben. Die Gleichung (1) z. B. in dieser Weise umgeformt, ergibt:

$$\frac{x}{\dfrac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_1 - y_2}} + \frac{y}{\dfrac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}} - 1 = 0\,.$$

Eine durch die Punkte 1 und 2 gegebene Gerade schneidet also auf den Coordinatenaxen Stücke ab, bestimmt durch:

$$a = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_1 - y_2}\,, \quad b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Besonders ausgezeichnet sind durch diese Darstellung die Fälle, wo die Linie durch den Anfangspunkt geht oder parallel zu einer der Coordinatenaxen verläuft. Im letzteren Falle haben wir a, respective b unendlich gross anzunehmen, je nachdem die Gerade der X- oder der Y-Axe parallel ist, und erhalten dann für sie, wie schon oben bemerkt, bezüglich die Gleichungen:

$$y = b\,,$$
$$x = a\,.$$

Geht endlich die Gerade durch den Anfangspunkt, so können wir sie nur durch ihre Richtung, d. h. durch eine ihr parallele Linie bestimmen. Eine solche, zu einer Geraden, welche in der Form (2) gegeben ist, gezogen, schneidet auf den Axen wegen der Aehnlichkeit der auftretenden Dreiecke Stücke von der Grösse ma, mb ab, und wir erhalten also alle Parallellinien zu (2), wenn wir in der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - m = 0$$

die Grösse m als Parameter auffassen, d. h. ihr successive alle möglichen Werthe beilegen: eine Darstellung eines Systems von Geraden, wie wir sie in der Folge öfter anwenden werden. Ist $m = 0$, so erhalten wir hieraus die durch den Anfangspunkt gehende Gerade, welche nunmehr durch die Richtung des Parallelensystems völlig bestimmt ist.

Zur Feststellung dieser Richtung können wir uns natürlich auch, wie früher schon einmal, statt der Abschnitte a, b des von der Linie mit der X-Axe gebildeten Winkels bedienen, den wir mit α bezeichnen wollen. Es kommt dies darauf hieraus, dass wir die Coordinaten eines zweiten, der Geraden angehörigen Punktes angeben, nämlich des unendlich fernen Punktes, in welchem sich alle Parallellinien der betr. Richtung schneiden. Diese Coordinaten sind aber $r \cos \alpha$ und $r \sin \alpha$ für $r = \infty$, wenn r den Abstand des Punktes vom Anfangspunkte bedeutet; also nur ihr Verhältniss hat einen endlichen Werth. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (1) für x_2, y_2 ein, dividiren durch r und nehmen dann r unendlich gross, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

oder entwickelt:

$$(x - x_1) \sin \alpha - (y - y_1) \cos \alpha = 0: \tag{4}$$

unsere erste Form für die Gleichung einer Geraden, die wir in die beiden anderen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r \cos \alpha \\ y &= y_1 + r \sin \alpha \end{aligned} \tag{5}$$

zerlegt hatten, wo r ein Parameter ist (p. 5).

Die Gleichungen (1) bis (5) geben uns die verschiedenen Formen, in denen die Gleichung einer Geraden je nach der Wahl ihrer Bestimmungsstücke aufzutreten pflegt. Ihnen allen gemeinsam ist die Dimension, in welcher die Variabeln vorkommen; alle sind von der ersten Ordnung, und es drängt sich daher die Frage auf, ob auch jede Gleichung erster Ordnung uns eine Gerade darstellt. Wir werden sehen, dass dies in der That der Fall ist. Hat man nämlich die allgemeinste Form einer linearen Gleichung:

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

so kann man dieselbe auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} - 1 = 0,$$

und dies ist nach (2) die Gleichung einer Geraden, welche auf den Coordinatenaxen bezüglich die Stücke $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ abschneidet; also:

Jede Gleichung ersten Grades zwischen x und y stellt eine gerade Linie dar.

Soll die durch unsere *allgemeine Form* (6) dargestellte Gerade insbesondere durch den Anfangspunkt gehen, so haben wir

$$C = 0$$

zu setzen; soll sie zur X- oder Y-Achse parallel sein, so müssen wir A, respective B verschwinden lassen. —

Während wir bisher zwei Punkte zur Bestimmung einer Geraden benutzten, sei es, dass dieselben beliebig waren, oder besondere Lagen hatten (z. B. auf den Axen, oder im Unendlichen), können wir eine gerade Linie auch durch zwei andere Stücke charakterisiren. Auf eine besonders wichtige Gleichungsform werden wir noch geführt, wenn wir dazu *den Abstand p der Geraden vom Anfangspunkte und die Richtung ihrer Normalen*, d. h. deren Winkel α gegen die X-Axe wählen. Die Abschnitte auf den Axen sind dann, wie man leicht aus einer Figur ersieht:

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{p}{\sin\alpha},$$

und somit ist nach (2) die Gleichung der Geraden:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{7}$$

die sogenannte Hesse'*sche Normalform**), deren weitere Bedeutung wir sogleich an einem Beispiele erkennen werden.

Die Vergleichung dieser Form mit der allgemeinen Form (6) legt die Frage nach Zurückführung der einen auf die andere nahe. Die Gleichung (7) ist aber besonders dadurch charakterisirt, dass die Quadratsumme der beiden ersten Coëfficienten gleich der Einheit ist; wir werden daher (6) mit einem solchen Factor multipliciren, dass dies auch hier der Fall ist, d. h. mit $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, wo das Vorzeichen der Wurzel so zu wählen ist, dass das letzte Glied (wie in (7)) negativ wird. Hieraus ergeben sich für die verlangte Umformung die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{8}$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{9}$$

*) Vgl. hier, wie für diesen ganzen Abschnitt: Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Leipzig 1865.

Je nach der Natur eines gestellten Problems werden wir nun eine der jetzt entwickelten Gleichungsformen der geraden Linie benutzen, um die Lösung möglichst einfach zu erhalten; einige *Aufgaben* werden uns dies erkennen lassen:

1. *Es soll der Abstand eines Punktes* (x_0, y_0) *von einer Geraden gefunden werden*; die letztere sei in der Normalform (7) gegeben. Ist dann P die gesuchte Entfernung, so ist ist die Gleichung einer durch den gegebenen Punkt gehenden Parallelen zu der Geraden:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p - P = 0,$$

wenn wir voraussetzen, dass der Punkt auf der dem Anfangspunkte abgewandten Seite der Linie liegt. Da die Gerade aber durch ihn gehen soll, so folgt:

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p - P = 0,$$

also:

$$P = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p.$$

Das Resultat können wir folgendermassen aussprechen:

Wenn man in die Normalform der Gleichung einer Geraden die Coordinaten eines beliebigen Punktes einsetzt, so gibt die linke Seite den Abstand des Punktes von der Geraden an, und zwar unmittelbar, wenn der Punkt auf der dem Anfangspunkte abgewandten Seite der Geraden liegt; sonst ist das Vorzeichen zu ändern. Letzteres wird nur unbestimmt, wenn die Linie durch den Anfangspunkt geht, (d. h. $p = 0$), weil dann die Richtung der Normale zweideutig wird.

Ist die Gleichung der Geraden in der allgemeinen Form gegeben, so hat man, um den Abstand zu finden, wieder durch die Wurzel aus der Quadratsumme der ersten Coëfficienten zu dividiren und die Coordinaten des Punktes einzusetzen; man erhält also:

$$P = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2. *Es sollen die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden bestimmt werden.* Die Gleichungen derselben seien:

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

aus ihnen haben wir x und y zu berechnen. Um dem Resultate eine symmetrische Form zu geben, werden wir die Gleichungen homogen schreiben; wir fügen daher dem dritten Coëfficienten noch einen Factor, den wir gleich der Einheit setzen, hinzu:

$$Ax + By + C \cdot 1 = 0$$
$$A'x + B'y + C' \cdot 1 = 0,$$

und berechnen nunmehr hieraus die Verhältnisse von $x, y, 1$. Es wird dann:

$$x : y : 1 = BC' - CB' : CA' - AC' : AB' - BA',$$

also:

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Verschwindet der Nenner, so können nicht beide Zähler verschwinden, denn sonst wären die gegebenen Gleichungen identisch; daher liegt dann der Schnittpunkt im Unendlichen: die Linien sind parallel. *Die Bedingung des Parallelismus* ist also:

$$AB' - BA' = 0.$$

3. *Es soll die Gleichung einer durch zwei gegebene Punkte gehenden Geraden gefunden werden.* Wir können dieselbe nach der ersten Form (1) unserer Gleichungen sofort hinschreiben; sie mag aber noch einmal in anderer Weise abgeleitet werden, um ein Beispiel zu geben, wie das Homogenmachen der Gleichungen durch Hinzufügen eines gleich der Einheit gesetzten Factors den Eliminationsprocess erleichtert. Die Gleichung der Geraden ist die Bedingung, dass ein beweglicher Punkt (x, y) mit den beiden festen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf derselben Geraden liege. Es müssen also zugleich die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} Ax + By + C \cdot 1 &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + C \cdot 1 &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C \cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

daher erhalten wir durch Elimination von A, B, C wieder:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir können diese Gleichung nun umgekehrt benutzen, um den Inhalt des von drei Punkten gebildeten Dreiecks zu finden, wovon wir ursprünglich ausgingen: wir fällen von dem einem Eckpunkte (x_0, y_0) auf die Verbindungslinie der beiden andern, deren Länge r sei, ein Loth h, so ist der gesuchte Inhalt:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} rh,$$

wo
$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Das Loth h aber bestimmt sich nach Früherem, indem wir unsere Gleichung der Geraden auf die Normalform bringen und die Coordinaten x_0, y_0 einsetzen; es ist also:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}},$$

und daher, wie oben:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. *Es soll der von zwei geraden Linien eingeschlossene Winkel v bestimmt werden.* Sind beide Gerade in der Normalform gegeben:

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$$
$$x \cos \beta' + y \sin \beta' - p' = 0$$

so sind β, β' die Winkel ihrer Normalen mit der X-Axe; diese schliessen aber denselben Winkel ein, wie die gegebenen Linien, und es ist daher:

$$v = \beta' - \beta.$$

Wie sich dieser Winkel aus den Coëfficienten der allgemeinen Form berechnet, folgt unmittelbar aus den Gleichungen (8); es wird nämlich:

$$\sin v = \sin (\beta' - \beta) = \frac{AB' - BA'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$\cos v = \cos (\beta' - \beta) = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Für den *Parallelismus* beider Linien ($\sin v = 0$) folgt also wieder

$$AB' - BA' = 0,$$

während sie *zu einander senkrecht* sind ($\cos v = 0$), wenn:

$$AA' + BB' = 0.$$

5. Diese Bemerkungen erlauben uns, *die Gleichung einer Geraden anzugeben, welche durch einen Punkt (x_0, y_0) parallel oder senkrecht zu einer gegebenen gezogen werden kann.* Diese letztere sei:

$$Ax + By + C = 0,$$

dann müssen im ersten Falle die Gleichungen zusammen bestehen:

$$\begin{aligned} A'x + B'y + C' &= 0 \\ A'x_0 + B'y_0 + C' &= 0 \\ A'B - B'A &= 0, \end{aligned}$$

also durch Elimination von A', B', C' wird die Gleichung der gesuchten Parallelen:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ B & -A & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Um die Normale zu finden, haben wir in der dritten Bedingungsgleichung nur B mit A und A mit $-B$ zu vertauschen, wodurch wir erhalten:

$$B\,(x - x_0) - A\,(y - y_0) = 0.$$

III. Liniencoordinaten. Punktreihen und Strahlbüschel.

Bei unsern bisherigen Betrachtungen war ein Punkt stets durch zwei von einander unabhängige Stücke (seine Coordinaten) bestimmt; ebenso aber auch die Gerade, sei es, dass wir sie durch ihre Abschnitte auf den Coordinatenaxen oder durch ihre Entfernung vom Anfangspunkte und die Richtung ihrer Normalen gegeben annahmen.

Ist für den Punkt nur eine Bedingung gegeben, so kann derselbe noch unendlich viele Lagen annehmen: er beschreibt bei seiner Bewegung eine Curve, und auf diesen Ortsbegriff gründeten sich unsere obigen Untersuchungen. Ebenso bei der Geraden: wenn zwischen ihren Bestimmungsstücken eine Gleichung gegeben ist, so gibt es noch unendlich viele Geraden, die derselben genügen; als geometrischen Ort derselben fassen wir die Curve auf, welche von der Geraden in allen ihren Lagen berührt wird. Wir können somit jede Curve in verschiedener Weise entstanden denken, einerseits als *beschrieben* durch unendlich viele Lagen eines Punktes, anderseits als *umhüllt* (vgl. z. B. unten Fig. $13,_b$) durch unendlich viele Lagen einer Geraden. Je zwei unendlich benachbarte Geraden dieses Systems *(Tangenten der Curve)* schneiden sich dann auf der Curve, so dass bei letzterer Anschauung die Curve als Punktgebilde entsteht durch die Aufeinanderfolge der Schnittpunkte benachbarter Tangenten. Umgekehrt ist die Tangente einer Curve in Punktcoordinaten definirt als die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte der Curve. Um dieser doppelten Erzeugungsweise ebener geometrischer Gebilde auch einen analytischen Ausdruck zu geben, *um eine Curve als Enveloppe ihrer Tangenten durch eine Gleichung darzustellen*, müssen wir die beiden Bestimmungsstücke einer Geraden ebenso als veränderlich betrachten, wie bisher die Coordinaten eines Punktes; wir sprechen daher ebensowohl von den Coordinaten einer geraden Linie, als von denen eines Punktes: eine Gleichung zwischen den letzteren stellt eine Curve als Ort ihrer Punkte, eine solche zwischen den ersteren als Enveloppe ihrer Tangenten dar. Welche Bestimmungsstücke der Geraden man dabei benutzen will, ist zunächst gleichgültig, aber unsere weiteren Betrachtungen werden die folgende Wahl als die zweckmässigste erscheinen lassen:

Wir verstehen unter den Coordinaten u, v einer Geraden die nega-

tiven reciproken Werthe ihrer Abschnitte auf den Coordinatenaxen; es ist also nach unserer obigen Bezeichnung:

$$u = -\frac{1}{a}, \quad v = -\frac{1}{b}.$$

Die Einführung gerade dieser Bestimmungsstücke der Geraden hängt mit einem der wichtigsten Principien der analytischen Geometrie zusammen, *dem Principe der Dualität**), zu welchem jene doppelte Auffassung der Curven hinführt. Zuvörderst: es gibt doppelt unendlich viele**) Punkte und doppelt unendlich viele Gerade in der Ebene; sieht man dann einmal die Punkte, einmal die Geraden derselben als die Grundelemente an, aus denen man die zu betrachtenden Gebilde erzeugt, so zeigt sich auch im Einzelnen eine gewisse Gleichartigkeit beider Anschauungen. Zwischen beiden Entwicklungen der Geometrie, der nach der Geraden und der nach dem Punkte, besteht aber neben der Analogie auch bis ins Einzelne eine vollständige Wechselbeziehung. Dieselbe findet ihren Ausdruck in Folgendem: gehen wir vom Punkte aus, so entsteht die Gerade durch Verbindung zweier Punkte; gehen wir von der Geraden aus, so entsteht der Punkt durch den Schnitt zweier Geraden. Der einfachste geometrische Ort für den Punkt ist die Gerade, beschrieben von dem sie durchlaufenden Punkte, für die Gerade der Punkt, den sie bei einer Drehung um ihn umhüllt. Durch Bewegung eines Punktes jedoch können wir keinen Punkt, durch Bewegung einer Geraden keine Gerade erzeugen. *Alle diese Relationen fassen wir in dem Principe der Dualität zusammen; dasselbe sagt uns, dass gewisse Sätze, welche für Punktgebilde gelten, sich auf Liniengebilde übertragen lassen; diese Uebertragung gibt die Verbindung zweier Punkte und den Schnitt zweier Geraden, sowie für alle Constructionen, die sich aus solchen Operationen zusammensetzen lassen*, sie gilt nicht mehr, wenn andere Hülfsmittel verwandt werden, also z. B. nicht, sobald eine Massbestimmung in die Aufgabe eintritt. Aber deshalb ist das Princip keineswegs als ein beschränktes aufzufassen;

*) Auf dieses Princip wurden zuerst Poncelet (Traité des propriétés projectives des figures; 1822) und Gergonne (Sur la théorie des surfaces réciproques; Annales de mathématiques, VIII, 1817—18, Crelle's Journal Bd. IV.), ausgehend von der unten zu besprechenden Polarentheorie bei Kegelschnitten, geführt. Unabhängig von der Kegelschnitttheorie wurde dasselbe aufgestellt von Gergonne und Möbius (Barycentrischer Calcul, 1827); die *Coordinaten* der Geraden benutzte zuerst Plücker (Crelle's Journal Bd. 5, 1829 und Analytisch-geometrische Entwicklungen 2. Bd., 1831). In Frankreich wurde dasselbe beinahe gleichzeitig von Chasles entwickelt: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837.

**) Mit einer solchen Ausdrucksweise ist gemeint, dass der Punkt und die Gerade von je zwei Bestimmungsstücken abhängen, deren jedes unabhängig vom andern alle möglichen Werthe durchlaufen kann.

wir werden vielmehr Mittel kennen lernen, auch solche metrische Relationen auf jene einfachsten zurückzuführen. —

Führen wir nunmehr die Coordinaten der Geraden in ihre Gleichung ein, so wird dieselbe:

$$(1) \qquad ux + vy + 1 = 0.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung können wir jetzt besser so ausdrücken, dass sie die *vereinigte Lage des Punktes* x, y *mit der Geraden* u, v anzeigt, d. h. die Lage, bei welcher der Punkt auf der Geraden liegt, die Gerade durch den Punkt geht, wobei wir dann nach Belieben die Coordinaten des Punktes oder die der Geraden als veränderlich denken. Im ersteren Falle haben wir in (1) die *Gleichung einer Geraden*, im andern die *Gleichung eines Punktes* vor uns, d. h. die Bedingung, welcher die Coordinaten einer Geraden genügen müssen, damit dieselbe durch einen gegebenen Punkt (x, y) geht. Die Gleichung ändert ihre Form nicht, wenn man u, v mit x, y vertauscht; durch passende Wahl der Coordinaten einer Geraden hat man also erreicht, *dass in der Gleichung, welche die vereinigte Lage des Grundelementes der einen und des Grundelementes der andern Anschauung angibt, diese Grundelemente symmetrisch auftreten.**) Der Punkt nimmt somit in der Geometrie der Geraden dieselbe Stelle ein, wie die Gerade in der Geometrie des Punktes:

Eine lineare Gleichung in Punktcoordinaten x, y *stellt eine gerade Linie dar.*	*Eine lineare Gleichung in Liniencoordinaten* u, v *stellt einen Punkt dar.*

In der Gleichung (1) waren jedesmal die constanten Coëfficienten zugleich die Coordinaten des durch sie dargestellten Gebildes; legen wir dagegen eine allgemeine lineare Gleichung zu Grunde:

Gleichung der Geraden	Gleichung des Punktes
$Ax + By + C = 0,$	$Au + Bv + C = 0,$

so sind die

Coordinaten der Geraden:	Coordinaten des Punktes:
(2) $\quad u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{C},$	$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C},$

eine Reciprocität, welche nicht stattfinden würde, wenn wir direct die Abschnitte auf den Axen als Coordinaten der Geraden genommen hätten.

Versuchen wir nunmehr die in der Theorie der geraden Linie

---

*) Dadurch ist es noch nicht begründet, dass wir die *negativen* reciproken Abschnitte als Coordinaten wählten; dies wird erst im folgenden Abschnitte seine Erklärung finden.

gefundenen Sätze dualistisch auf die des Punktes zu übertragen, so gelingt dies nur mit einer der dort gelösten Aufgaben.

Es seien nämlich gegeben:

zwei Punkte	zwei Gerade
$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1),$	$(u_0, v_0), \quad (u_1, v_1),$

dann ist *die Gleichung*

ihrer Verbindungslinie:	*ihres Schnittpunktes:*
$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

(3)

Das analytische Resultat und die dazu führenden Operationen sind also in beiden Fällen dieselben, nur die Bedeutung der Variabeln ist eine andere. Die übrigen Formen der Gleichung der Geraden können wir hier nicht unmittelbar umformen, da dieselben von Winkel- und Streckengrössen abhängen. Wir wollen indess die sich daran schliessenden Aufgaben mit Hülfe der Gleichungen (2) in ihrer Abhängigkeit von den Coordinaten der betreffenden Linien darstellen, um so Beispiele für den Gebrauch von Liniencoordinaten zu haben. Es wird nämlich *der Abstand eines Punktes von einer Geraden:*

$$r = \frac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \tag{4}$$

der *von zwei Geraden eingeschlossene Winkel:*

$$= \arccos \frac{u_0 u_1 + v_0 v_1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

die *Bedingung des Parallelismus:*

$$u_1 v_0 - v_1 u_0 = 0$$

und die *Bedingung des Senkrechtstehens:*

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0.$$

Der Ausdruck für r gibt uns ein einfaches Beispiel zur Darstellung einer Curve als Enveloppe ihrer Tangenten, wenn wir u und v als variabel betrachten, x, y und r dagegen als constant; dann stellt nämlich (4) die Bedingung dar, dass eine Linie (u, v) von einem festen Punkte (x, y) die constante Entfernung r habe. Die Gesammtheit dieser Geraden umhüllt aber bekanntlich einen Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkte (x, y); legen wir letzterem, wie schon früher, die Coordinaten a, b bei, so wird also *die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten, d. h. die Bedingung, welcher alle seine Tangenten genügen müssen:*

$$(ua + vb + 1)^2 = r^2 (u^2 + v^2),$$

während die Gleichung desselben Kreises in Punktcoordinaten ist:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Beide sind vom zweiten Grade, die letztere trägt aber einen wesentlich anderen Charakter, als die Gleichung in Liniencoordinaten, was wieder in den metrischen Eigenschaften des Kreises seinen Grund hat. In ähnlicher Weise gibt es für jede Curve zwei Darstellungsweisen: *ihre Gleichung in Punktcoordinaten:*

$$f(x, y) = 0,$$

und *ihre Gleichung in Liniencoordinaten:*

$$\varphi(u, v) = 0;$$

und zwar sind beide Gleichungen im Allgemeinen verschieden, sowohl, wie beim Kreise, hinsichtlich ihrer Form, als auch hinsichtlich des Grades in Bezug auf die Variabeln. Daraus ergibt sich eine zwiefache Eintheilung der algebraischen Curven, einmal nach dem Grade ihrer Gleichung in Punktcoordinaten, das andere Mal nach dem ihrer Gleichung in Liniencoordinaten, und zwar

nennt man die höchste Dimension, in welcher die Variabeln x, y in der Gleichung in Punktcoordinaten vorkommen, die Ordnung der Curve.

Die Curven erster Ordnung sind also Gerade; eine Curve erster Ordnung ist daher nie als Klassencurve darstellbar; die Gerade stellt sich in Punktcoordinaten durch eine, in Liniencoordinaten durch zwei Gleichungen dar.

nennt man die höchste Dimension, in welcher die Variabeln u, v in der Gleichung in Liniencoordinaten vorkommen, die Klasse der Curve.

Die Curven erster Klasse sind also Punkte; eine Curve erster Klasse ist daher nie als Ordnungscurve darstellbar; der Punkt stellt sich in Liniencoordinaten durch eine, in Punktcoordinaten durch zwei Gleichungen dar.

— Die fundamentale Bedeutung des hier entwickelten Princips wird sogleich in den folgenden Betrachtungen hervortreten, welche von um so grösserer Wichtigkeit werden, als sie den Zusammenhang der neueren synthetischen und analytischen Geometrie zu vermitteln bestimmt sind. Wir untersuchen nämlich zunächst Beziehungen zwischen verschiedenen Punkten auf einer Geraden und entsprechend zwischen verschiedenen Strahlen durch einen Punkt: wir beschränken uns so zu sagen auf die Geometrie *auf* einer Geraden und die *in* einem Punkte. Wir lösen dabei die Gerade in die Reihe von Punkten auf, welche auf ihr liegen, den Punkt in die Schaar von Geraden, welche sich in ihm schneiden, und bezeichnen in dieser Auffassung die Gesammtheit der Punkte auf einer Geraden als *Punktreihe*, die der Geraden durch einen Punkt als *Strahlbüschel.* Es ist dann unsere

Aufgabe, jeden Punkt einer Reihe, d. h., welcher mit zwei gegebenen auf einer Geraden liegt, individuell darzustellen, ebenso jeden Strahl eines Büschels, d. h. welcher mit zwei gegebenen Strahlen durch einen Punkt geht. Die erstere dieser Aufgaben wurde schon oben gelöst, indem wir die Punkte einer Reihe darstellten durch die Gleichungen (vgl. p. 5):

$$x = x_0 + r \cos \alpha$$
$$y = y_0 + r \sin \alpha\,;$$

in ihnen ist die Punktreihe, wenn r einen Parameter bedeutet, durch einen Punkt (x_0, y_0) und ihre Richtung (d. h. einen unendlich fernen Punkt) bestimmt. Analog wollen wir nun allgemein jeden Punkt der Reihe durch zwei feste Punkte derselben mit Hülfe eines Parameters ausdrücken. Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte 0, 1 war:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dieselbe wird nach einem bekannten Determinantensatze identisch erfüllt, wenn wir setzen (vergl. p. 16):

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= px_0 + qx_1 \\ y &= py_0 + qy_1 \\ 1 &= p \quad + q \quad ; \end{aligned}$$

jene Determinante ist dann das Resultat der Elimination von p, q, 1 aus diesen Gleichungen. Dividiren wir mit der letzten Gleichung in die beiden ersten und führen einen Parameter $\lambda = \frac{q}{p}$ ein, so erhalten wir, indem wir einmal die Punktcoordinaten durch Liniencoordinaten ersetzt denken, die Resultate:

$$(6)\qquad x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda} \qquad\qquad u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}$$
$$y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \qquad\qquad v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda},$$

zwei Gleichungen, welche die Coordinaten eines Punktes der Reihe darstellen, ausgedrückt durch die Coordinaten zweier Punkte derselben und den Parameter λ. *Es ist dies die allgemeinste Darstellung der Geraden als Träger der Punktreihe.*

zwei Gleichungen, welche die Coordinaten eines Strahles des Büschels darstellen, ausgedrückt durch die Coordinaten zweier Strahlen desselben und den Parameter λ. *Es ist dies die allgemeinste Darstellung des Punktes als Mittelpunkt des Strahlbüschels.*

In den Gleichungen (6) ist der Begriff der Punktreihe, bez. des Strahlbüschels deutlich ausgesprochen: legen wir λ nach einander alle

Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so erhalten wir successive alle Punkte der Reihe, bez. alle Strahlen des Büschels.

Die Zahl λ hat aber auch eine einfache *geometrische* Bedeutung. Aus den Gleichungen (5) folgt nämlich:

$$q = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad p = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1},$$

oder wenn wir durch r, s die Entfernungen der Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) von (x, y) bezeichnen und beide positiv nehmen, so lange (x, y) zwischen den festen Punkten 0, 1 liegt:

$$q = \frac{r}{r + s}, \quad p = \frac{s}{r + s},$$

$$\lambda = \frac{r}{s} \cdot$$

Es ist also λ der Quotient der Abstände des beweglichen Punktes von zwei festen Punkten der Reihe, eine Deutung, welche wir nicht unmittelbar auf Strahlbüschel übertragen können, da sie wesentlich auf metrischen Begriffen beruht. Man sieht hieraus auch leicht, dass jedem Punkte der Geraden nur ein Werth von λ zukommt, und wie sich diese Werthe auf die ganze Gerade vertheilen. Zwischen den festen Punkten sind r und s, also auch λ positiv; bewegt sich der Punkt von 0 nach 1, so geht λ von 0 bis ∞, und hat für den Mittelpunkt dieser Strecke $(r = s)$ den Werth 1. Ausserhalb der festen Punkte dagegen wird links r, rechts s negativ, folglich in beiden Fällen auch λ (vgl. Fig. 10). Während der Punkt von 0 bis in's Unendliche fortschreitet, geht λ von 0 bis -1, im Unendlichen ist $\lambda = -1$, und während der Punkt sich vom Unendlichen nach 1 bewegt, geht λ von -1 bis $-\infty$, wodurch dann der Kreis von Werthen geschlossen ist. Besonders bemerkenswerth ist es, dass λ im Unendlichen nur den *einen* Werth -1 hat; man spricht deshalb von *einem unendlich fernen Punkte der Geraden;* d. h. jede gerade Linie verhält sich analytisch so, als wenn sie nur *einen* unendlich fernen Punkt habe.

Fig. 10.

Die Gleichungen (6) dienten uns dazu, die Coordinaten eines beliebigen Elementes einer Punktreihe oder eines Strahlbüschels durch die von zwei festen Elementen darzustellen. Um die Gleichung eines solchen Elementes zu erhalten, müssen wir diese Coordinaten in die Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0$$

einsetzen, wodurch wir finden:

Punkt der Reihe:	*Strahl des Büschels:*
$(ux_0 + vy_0 + 1) + \lambda(ux_1 + vy_1 + 1) = 0$	$(u_0x + v_0y + 1) + \lambda(u_1x + v_1y + 1) = 0.$

Wir erhalten also die Gleichung des beweglichen Elementes, indem wir die des einen festen Elementes mit einem Parameter λ multiplicirt zu der des andern addiren. Dabei haben wir jedoch die Gleichung der festen Gebilde in der besonderen Form vorausgesetzt, wo das constante Glied gleich der Einheit ist; dies ist im Allgemeinen nicht nöthig. Sind uns nämlich die *Grundelemente* (d. h. die Punkte 0, 1) gegeben durch

zwei Punkte:	zwei Strahlen:
$A\,u + B\,v + C\;\; = 0$	$A\,x + B\,y + C\;\; = 0$
$A_1 u + B_1 v + C_1 = 0$	$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

so stellen die Gleichungen:

$$Au + Bv + C + \mu\,(A_1 u + B_1 v + C_1) = 0\,,$$
$$Ax + By + C + \mu\,(A_1 x + B_1 y + C_1) = 0$$

wieder ein beliebiges Element der Reihe, bez. des Büschels dar, nur die Bedeutung des Parameters μ ist eine andere geworden; denn setzen wir

$$\mu = \lambda\,\frac{C}{C_1}\,,$$

so erhalten wir wieder die frühere Form. Der Parameter μ ist also nicht obiges Abstandsverhältniss selbst, sondern das Product desselben in eine von der Lage des beweglichen Punktes unabhängige Constante, wodurch im Wesen der Sache nichts geändert wird.

Die letztere Bedeutung von μ lässt sich auch dualistisch für den Strahl eines Büschels übertragen. Fällen wir nämlich von einem Punkte des beweglichen Strahls Lothe auf die beiden festen von der Länge r und s (vergl. Fig. 11), so ist das Verhältniss $\frac{r}{s}$ für alle Punkte des beweglichen Strahls dasselbe, und wir wollen es als das *Abstandsverhältniss* des beweglichen Strahls von den beiden festen bezeichnen; von ihm ist dann wieder der Parameter λ nur um einen constanten Factor verschieden, wie jetzt gezeigt werden soll. Sei x, y irgend ein Punkt der Geraden u, v, welche dem Büschel angehört, das durch die beiden Geraden u_0, v_0 und u_1, v_1 bestimmt wird; dann ist nach einer oben gegebenen Regel (vgl. p. 30):

Fig. 11.

(x,y) s r (u1,v1) (u,v) (u0,v0)

$$r = \frac{u_0 x + v_0 y + 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$

$$s = \frac{u_1 x + v_1 y + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}\,,$$

und die Gleichung des Strahles selbst:

$$ux + vy + 1 = 0$$

geht über in:

$$r\sqrt{u_0^2 + v_0^2} + \lambda s\,(\sqrt{u_1^2 + v_1^2}) = 0\,,$$

also wird

$$\lambda = -\frac{r}{s} \cdot \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}\,.$$

Der Werth von λ variirt ganz analog, wie bei der Punktreihe, und es entspricht wieder jedem Strahle nur ein Werth von λ. Nehmen wir die Strecken r und s für einen Strahl in einem Winkel der Grundstrahlen positiv, so werden sie im Scheitelwinkel beide negativ, während sie in den beiden Nebenwinkeln verschiedene Zeichen annehmen. Für die festen Elemente ist λ wieder einmal Null, einmal unendlich, und für die zwischen diesen beiden Grenzen liegenden Strahlen hat λ einen zwischen Null und $+\infty$ oder $-\infty$ liegenden Werth. Ein Unterschied gegenüber der Vertheilung der Werthe des Parameters auf der Punktreihe zeigt sich jedoch darin, dass wir im Büschel von einem uneigentlichen, unendlich fernen Elemente nicht reden können. — Als wesentliches Resultat dieser Betrachtung erkennen wir also, dass im Strahlbüschel der Parameter schon, wenn die beiden Grundelemente in der Form

$$u_0 x + v_0 y + 1 = 0$$
$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$$

gegeben sind, sich um einen constanten Factor von dem Abstandsverhältnisse unterscheidet, so dass bei der allgemeinen Form noch ein zweiter constanter Factor $\frac{C}{C_1}$ hinzutritt.

Die Darstellung dieser Verhältnisse können wir sehr vereinfachen, wenn wir eine *abgekürzte Bezeichnung* beim Schreiben der Gleichungen einführen. Wir werden nämlich die linke Seite einer linearen Gleichung durch einen einzigen Buchstaben ersetzen, ein Verfahren, von dessen Fruchtbarkeit wir uns noch wiederholt werden überzeugen können.*) Wir wollen demnach in der Folge durch $G, H, \ldots$ lineare Ausdrücke in x, y, durch $P, Q, \ldots$ solche in u, v bezeichnen, d. h. wir setzen z. B.:

$$G = Ax + By + C \qquad\qquad P = Au + Bv + C$$
$$H = A_1 x + B_1 y + C_1. \qquad\qquad Q = A_1 u + B_1 v + C_1.$$

Es sind dann

*) Diese Methode wurde von Plücker zuerst principiell angewandt und ausgebildet, vgl. dessen Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1. Th. 1828; gleichzeitig auch von Bobillier aufgestellt: Gergonne, Annales, t. 18, 1827—28.

die Gleichungen zweier Geraden:

$$G = 0, \quad H = 0,$$

und die eines Strahles durch ihren Schnittpunkt:

$$G + \mu H = 0.$$

die Gleichungen zweier Punkte:

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

und die eines Punktes auf ihrer Verbindungslinie:

$$P + \mu Q = 0.$$

Es ist natürlich wieder μ in beiden Fällen bis auf einen constanten Factor, welcher von der zufälligen Form der Gleichungen der Grundelemente abhängt, gleich dem erwähnten Abstandsverhältnisse.

VI. Die Grundlagen der synthetischen Geometrie.*)

Auf das Studium der Punktreihen und Strahlbüschel stützt sich die sogenannte neuere synthetische Geometrie; diese einfachsten Gebilde geben für sie insbesondere die Grundlage für eine rein geometrische Erzeugung der algebraischen Curven, sei es dass man sie von ihren Punkten beschrieben oder von ihren Tangenten umhüllt denkt. Wir werden diese Verhältnisse auch in unserer analytischen Darstellung erkennen, wenn wir eine Function des eben benutzten Parameters μ herstellen, welche von dem in ihm enthaltenen constanten Factor unabhängig ist und demnach eine rein geometrische Bedeutung hat. Eine solche Function ergibt sich aber sofort, wenn wir ausser den beiden Grundelementen der Punktreihe, bez. des Strahlbüschels gleichzeitig noch *zwei* andere Elemente betrachten; in der That wird der Quotient der beiden ihnen entsprechenden Werthe des Parameters μ von jener Constanten unabhängig.

Sind uns zwei Punkte

$$P = 0, \quad Q = 0$$

gegeben, und nehmen wir auf ihrer Verbindungslinie zwei beliebige andere Punkte:

$$P + \mu Q = 0 \qquad P + \mu' Q = 0,$$

so sind nach dem Früheren ihre Abstandsverhältnisse von den Grundpunkten:

$$\frac{r}{s} = \mu \cdot C, \quad \frac{r'}{s'} = \mu' \cdot C,$$

wo C eine Constante bedeutet; also wird

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\frac{r}{s}}{\frac{r'}{s'}}$$

unabhängig von C, eine rein geometrische Grösse, die wir als *das*

*) Vgl. für die Darstellung im Folgenden: Clebsch, Theorie der binären lagebraischen Formen, Leipzig. 1872 p. 58 ff.

*Doppelverhältniss der gewählten vier Punkte**) bezeichnen. Aus letzteren lassen sich auch noch andere Doppelverhältnisse ableiten, denn bei unserer Darstellung sind nicht alle 4 Punkte gleichmässig benutzt; sondern zwei sind dadurch ausgezeichnet, dass wir sie als Grundelemente der Reihe annahmen, und dieselben treten wieder verschieden in die Rechnung ein, da wir die beiden andern Punkte ebensowohl in der Form

$$Q + \mu_1 P = 0 \qquad Q + \mu_1' P = 0$$

hätten voraussetzen und dann $\frac{\mu_1}{\mu_1'}$ als Doppelverhältniss bezeichnen dürfen. Wir können aber das Doppelverhältniss auch für irgend vier Punkte der Reihe ohne Rücksicht auf die Grundpunkte bilden. Es seien dieselben bestimmt durch:

$$P + \mu_1 Q = 0 \qquad P + \mu_2 Q = 0$$
$$P + \mu_3 Q = 0 \qquad P + \mu_4 Q = 0,$$

man kann dann die Aufgabe auf den vorigen Fall reduciren, indem man gewissermassen zwei der Punkte als neue Fundamentalpunkte einführt, d. h. indem man für den Augenblick setzt:

$$R = P + \mu_1 Q, \quad S = P + \mu_2 Q.$$

Wir finden hieraus:

$$(\mu_1 - \mu_2) Q = R - S, \quad (\mu_2 - \mu_1) P = \mu_2 R - \mu_1 S,$$

also sind die vier Punkte dargestellt durch:

$$R = 0 \qquad\qquad S = 0$$
$$R + \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2} S = 0 \qquad S + \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2} S = 0,$$

und dies ist wieder die frühere Form, wenn wir die mit S multiplicirten Grössen als Werthe eines neuen Parameters betrachten. Es wird demnach *das Doppelverhältniss der vier Punkte:*

$$\alpha = \frac{\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_2}}{\frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_4 - \mu_2}},$$

also eine Function der vier Parameter, ganz unabhängig von den Fundamentalpunkten.

Genau auf denselben Ausdruck wären wir gekommen, wenn wir vier Strahlen eines Büschels:

*) Doppelverhältnisse finden sich in ihrer Bedeutung für projectivische Beziehungen schon gelegentlich in Poncelet's Traité des propriétés projectives des figures (z. B. p. 11). Principiell eingeführt wurde das Doppelverhältniss von Möbius (1827, in dessen barycentrischem Calcul), und in Frankreich (als anharmonisches Verhältniss) von Chasles (1837, in dessen Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie).

$$G + \mu_1 H = 0 \qquad G + \mu_2 H = 0$$
$$G + \mu_3 H = 0 \qquad G + \mu_4 H = 0$$

zu Grunde gelegt hätten; auch hier wird *das Doppelverhältniss der vier Strahlen* unabhängig von der Lage der Fundamentalstrahlen und unabhängig von den in dem Parameter enthaltenen Constanten, *es ist ebenfalls eine rein geometrische Grösse.*

In dem Werthe von α sind aber die Parameter der vier Elemente (seien es Punkte oder Strahlen) verschieden benutzt; ändern wir ihre Reihenfolge, so kann auch α sich ändern; und wir erhalten alle möglichen Werthe von α, wenn wir die 4 Indices auf alle möglichen Weisen permutiren. Die dadurch entstehenden 24 Permutationen würden somit auf 24 verschiedene Werthe des aus denselben 4 Elementen zu bildenden Doppelverhältnisses führen, während sich dieselben thatsächlich, wie eine nähere Ueberlegung zeigt, *auf nur 6 verschiedene Werthe reduciren.*

Setzen wir nämlich fest, dass zur Aufstellung des obigen Werthes:

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_3 \cdot \mu_4 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2 \cdot \mu_1 - \mu_4}$$

die Indices in der Ordnung 1, 2, 3, 4 benutzt worden seien, so sieht man, dass α dasselbe bleibt für die Anordnungen

1234, 2143, 3412, 4321;

d. h. das Doppelverhältniss ändert sich nicht, wenn man gleichzeitig die Indices des ersten und des zweiten Paares je unter sich vertauscht, und wenn man die beiden Paare vertauscht. Dies gilt, von welchem Werthe man auch ausgehen mag; immer vier Permutationen geben also dasselbe Doppelverhältniss, es bleiben folglich nur noch 6 verschiedene Werthe desselben übrig, *und diese lassen sich alle einfach durch eines derselben ausdrücken.* Wir erhalten sie alle, wenn wir einen Index, etwa 4, ungeändert lassen und die übrigen drei unter einander permutiren, und zwar findet man durch leichte Rechnung:

für die Anordnung 1 2 3 4 : $\alpha = \dfrac{\mu_1 - \mu_3 \cdot \mu_4 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2 \cdot \mu_1 - \mu_4}$

" " " 2 1 3 4 : $\alpha' = \dfrac{\mu_2 - \mu_3 \cdot \mu_4 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1 \cdot \mu_2 - \mu_4} = \dfrac{1}{\alpha}$

" " " 1 3 2 4 : $\alpha'' = \dfrac{\mu_1 - \mu_2 \cdot \mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3 \cdot \mu_1 - \mu_4} = 1 - \alpha$

" " " 2 3 1 4 : $\alpha''' = 1 - \alpha' = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$

" " " 3 1 2 4 : $\alpha^{(4)} = \dfrac{1}{\alpha''} = \dfrac{1}{1 - \alpha}$

" " " 3 2 1 4 : $\alpha^{(5)} = \dfrac{1}{\alpha'''} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

Es ist hier α' aus α durch Vertauschung von μ_1 mit μ_2, α'' aus α durch Versauschung von μ_2 mit μ_3 gebildet. Vertauscht man ferner in α' μ_1 und μ_3, in α'' μ_1 und μ_3, in α''' μ_2 und μ_3, so entstehen bez. die Werthe α''', $\alpha^{(4)}$ und $\alpha^{(5)}$.

Die sechs zusammengehörigen Werthe eines Doppelverhältnisses sind also, wenn einer derselben α genannt wird:

$$\alpha, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad 1-\alpha, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Während dieselben im Allgemeinen sämmtlich von einander verschieden sind, kann es in Folge besonderer Lagen der vier Elemente gegen einander eintreten, dass einige unter ihnen identisch werden. Dadurch sind, jenen Lagen entsprechend, ausgezeichnete Werthe des Doppelverhältnisses bedingt. Es können hier folgende Fälle vorkommen:

1. $\alpha = \alpha' = \frac{1}{\alpha}$, oder $\alpha = \pm 1$

2. $\alpha = \alpha'' = 1 - \alpha$, oder $\alpha = \frac{1}{2}$

3. $\alpha = \alpha''' = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, oder $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

4. $\alpha = \alpha^{(4)} = \frac{1}{1-\alpha}$, oder $\alpha^2 - \alpha + 1 = 1$

5. $\alpha = \alpha^{(5)} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$, oder $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, d. h. $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$.

Aber diese Fälle sind nur zum Theil verschieden. Zunächst bemerken wir, dass die Fälle 3. und 4. identisch sind: die eine Bedingung ist eine Folge der andern. Die übrigen Fälle geben noch zu *zwei* ausgezeichneten Lagenbeziehungen der vier Elemente Veranlassung. Setzen wir nämlich $\alpha = 1$, so sind die 6 Werthe des Doppelverhältnisses:

$$1, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad 0, \quad \infty;$$

hier ist also $\alpha'' = \alpha^{(4)}$, gleich dem einen Werthe von α im 5. Falle, und in der That erhalten wir von dem letzteren ausgehend, dieselben sechs Werthe für das Doppelverhältniss, nur in anderer Reihenfolge, nämlich:

$$0, \quad \infty, \quad 1, \quad 1, \quad \infty, \quad 0;$$

beide Fälle geben daher geometrisch dasselbe Resultat.

Setzen wir ferner $\alpha = -1$, so erhalten wir für die 6 Werthe des Doppelverhältnisses:

$$-1, \quad -1, \quad 2, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 2, \quad \tfrac{1}{2};$$

dieselbe Reihe, nur anders geordnet erhält man aber auch, wenn man vom Falle 2. oder dem zweiten Werthe von α im Falle 5. ausgeht, auch diese geben daher wesentlich dasselbe Resultat. *Wir haben somit*

nur drei ausgezeichnete Lagen der vier Punkte oder Strahlen zu unterscheiden; die geometrische Bedeutung derselben ergibt sich in folgender Weise:

1) $\alpha = 1$. Hier müssen zwei Elemente den andern beiden gegenüber dasselbe Abstandsverhältniss haben, d. h. *sie fallen in eins zusammen.*

2) $\alpha = -1$. Die Abstandsverhältnisse zweier Elemente gegen die beiden andern sind entgegengesetzt gleich: *die harmonische Lage der vier Elemente*; es ist dies der wichtigste Fall, wir werden auf diese Lagenbeziehung im Folgenden bei den verschiedensten Untersuchungen geführt werden, so dass noch einige Erläuterungen hier ihre Stelle finden mögen. Unter den möglichen Theilungen der vier Elemente in Paare ist diejenige ausgezeichnet, welche bei der Bildung des Doppelverhältnisses den Werth -1 liefert; die Glieder der beiden Paare heissen dann *zugeordnete Elemente* und das negative Vorzeichen von α zeigt, dass, wenn ein Element eines Paares zwischen den zwei Elementen des andern Paares liegt, das andere Element ausserhalb dieser beiden liegen muss; die zugeordneten Elemente der beiden Paare trennen sich also gegenseitig von einander. Diese Anordnung der Elemente ist auch noch dadurch charakterisirt, dass die Vertauschung der Elemente eines Paares den Werth von α ungeändert lässt.

Liegt insbesondere auf einer Punktreihe der dritte Punkt in der Mitte zwischen den beiden andern, so liegt der vierte im Unendlichen, und *wir können somit die Halbirung einer Strecke als eine blosse Doppelverhältnissrelation auffassen.* Rückt der dritte an einen der beiden ersten unendlich nahe heran, so rückt auch der vierte an denselben. Dasselbe gilt auch für Strahlbüschel, nur der metrische Satz über den Mittelpunkt der durch ein Paar bestimmten Strecke wird geändert; man weist nämlich leicht nach, dass, wenn der dritte Strahl den Winkel zwischen den beiden ersten halbirt, der vierte den Nebenwinkel in zwei gleiche Theile theilt; beide Strahlen stehen dann zu einander senkrecht.

3) $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, oder $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, folglich $\alpha^3 = -1$. In diesem Falle ist α eine imaginäre dritte Wurzel aus -1, und die drei anderen Werthe des Doppelverhältnisses sind gleich der conjugirt imaginären dritten Wurzel aus -1. Es werden hier also zweimal drei Werthe des Doppelverhältnisses einander gleich, während in den vorigen Fällen dreimal zwei Werthe dieselben waren. Die durch diesen Fall charakterisirte Lage der vier Punkte pflegt man, nach dem Vorgange von Cremona*), als *die äquianharmonische* zu bezeichnen.

*) Vergl. dessen „Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven", deutsch von Curtze, Greifswald 1865.

Wegen der vorkommenden imaginären Grössen ist die geometrische Bedeutung derselben jedoch nicht so evident; man kann nämlich keine vier Elemente mit reellen Coordinaten angeben, welche der gestellten Forderung genügen, und folglich lassen sich vier solche Punkte auch nicht constructiv auf einer Geraden bestimmen. Wir werden so zuerst darauf geführt auch imaginäre Werthe der Veränderlichen und Coëfficienten in geometrischen Untersuchungen zu berücksichtigen, und in der That hat man sich in neuerer Zeit genöthigt gesehen, diese grundsätzlich, ebenso wie die reellen in das Gebiet der geometrischen Betrachtung hineinzuziehen. Wenn sie selbst sich auch der unmittelbaren Anschauung entziehen, so kann man doch analytisch alle Operationen so durchführen, als wenn man mit wirklichen Punkten oder Geraden zu thun hätte, ja durch Vereinigung verschiedener imaginärer Elemente können reelle erzeugt werden, deren Bedeutung ohne Betrachtung jener uns verschlossen bliebe. Von den vier Punkten eines äquianharmonischen Systems können höchstens 3 reell sein, so dass nur der vierte imaginär wird. Denn sind durch die Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

zwei reelle Punkte vorgestellt, so bilden sie mit den Punkten:

$$P + \mu Q = 0, \quad P + \mu' Q = 0$$

ein äquianharmonisches Quadrupel, wenn

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

und daraus ergibt sich für μ' immer ein imaginärer Werth, wenn μ reell ist. Gleichzeitig folgt aus dem doppelten Vorzeichen: *Es gibt zwei Punkte, welche zu drei gegebenen äquianharmonisch liegen**). Sind dagegen zwei der drei Punkte conjungirt imaginär, so können die beiden andern reell sein. Sind nämlich dann

$$\begin{aligned} &P + c\sqrt{-1}\, Q = 0, \quad P - c\sqrt{-1}\, Q = 0, \\ &P + \mu Q = 0, \quad P + \mu' Q = 0, \end{aligned}$$

so bestimmt sich für ein reelles μ der Werth von μ' aus der Gleichung:

$$\frac{(c\sqrt{-1} - \mu)(\mu' + c\sqrt{-1})}{(\mu + c\sqrt{-1})(c\sqrt{-1} - \mu')} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Also wird:

$$\mu' = \frac{2 + \mu(\sqrt{-3} \mp c)\sqrt{3}}{(\sqrt{-3} \mp c)\sqrt{3} - 2\mu},$$

und dies ist eine reelle Grösse für $c = c' \pm \sqrt{-3}$, wenn μ reell ist.

*) Vergl. die Theorie der binären cubischen Formen in der dritten Abtheilung dieser Vorlesungen.

Liegen dagegen vier Elemente harmonisch, so können nur entweder zwei imaginär oder alle vier gleichzeitig imaginär sein; und zwar wird im ersten Falle das eine der beiden zugeordneten Paare von den reellen, das andere von den imaginären Elementen gebildet. Man kann vier solche Punkte alsdann darstellen durch die Gleichungen:

$$P = 0, \quad Q = 0,$$
$$P + \mu\sqrt{-1}\, Q = 0, \quad P - \mu\sqrt{-1}\, Q = 0. —$$

Die Theorie des Doppelverhältnisses, wie wir sie hier durchgeführt haben, führt von selbst auf die Untersuchung gewisser Gebilde, welche für die Geometrie von fundamentaler Wichtigkeit sind. Betrachten wir nämlich gleichzeitig zwei Reihen von Elementen, gegeben durch die Gleichungen:

$$P + \mu Q = 0, \quad P' + \mu Q' = 0$$

oder:

$$G + \mu H = 0, \quad G' + \mu H' = 0,$$

jenachdem wir von Punktreihen oder Strahlbüscheln ausgehen, so wird durch denselben Werth von μ in beiden Gebilden je ein Element bestimmt. Bezeichnen wir zwei solche Elemente als *einander entsprechend*, so sind beide Gebilde eindeutig auf einander bezogen: *jedem* Punkte oder Strahle des einen ist *ein* Punkt oder Strahl des andern zugeordnet, und umgekehrt. Beide Gebilde heissen dann *projectivisch auf einander bezogen, die eine Punktreihe ist der anderen, der eine Strahlbüschel dem andern projectivisch.* Da nun das Doppelverhältniss von vier Elementen eines Gebildes allein von dem Parameter μ abhängt, so folgt aus dieser Definition der Projectivität unmittelbar der für diese Beziehung geltende Hauptsatz:

Bei projectivischen Gebilden haben vier Elemente des einen und die vier entspsechenden des andern dasselbe Doppelverhältniss (vorausgesetzt, dass bei Bildung desselben entsprechende Elemente gleichmässig benutzt werden; sonst können zwei verschiedene, aber demselben Systeme von 6 Werthen angehörige Doppelverhältnisse auftreten).

Dass man auch mehr als zwei Punktreihen oder Strahlbüschel auf einander projectivisch beziehen kann, dass zwei Gebilde projectivisch sind, wenn sie in dieser Beziehung zu demselben dritten stehen, braucht wohl kaum erwähnt zu werden. Man nennt aber auch eine Punktreihe

$$P + \mu Q = 0$$

zu einem Strahlbüschel

$$G + \mu H = 0$$

projectivisch, indem man wieder einem Punkte der Reihe einen Strahl des Büschels entsprechen lässt, wenn beiden derselbe Werth des Para-

meters μ zukommt; auch für zwei solche Gebilde gilt dann natürlich der Satz von der Gleichheit des Doppelverhältnisses.

Gerade diese letztere Beziehung einander dualistisch gegenüberstehender linearer Erzeugnisse soll uns zur geometrischen Construction von projectivischen Gebilden überhaupt dienen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die folgenden Sätze zu beweisen.

1. *Man kann drei Elemente eines Gebildes (Punktreihe oder Strahlbüschel) dreien beliebigen Elementen des anderen entsprechend setzen; dann ist jedem vierten des ersten ein viertes Element des zweiten zugeordnet, d. h. dann ist die Projectivität festgelegt.* Nehmen wir nämlich in einem Gebilde zwei Elemente

$$M = 0, \quad N = 0$$

und lassen ihnen in einem anderen zwei Elemente

$$M' = 0, \quad N' = 0$$

entsprechen, so muss in der Gleichung des Elementes, welches einem beweglichen

$$M + \mu N = 0$$

des ersten Gebildes zugehört, μ ebenfalls linear vorkommen, sie muss also die Form haben:

$$(\alpha + \beta\mu) M' + (\gamma + \delta\mu) N' = 0,$$

wo α, β, γ, δ Constante sind. Da aber für $\mu = 0$ das Element im ersten Gebilde $M = 0$ wird und diesem im zweiten für denselben Werth von μ $M' = 0$ entsprechen muss, so ist $\gamma = 0$ zu nehmen; und ebenso muss, da $N = 0$, $N' = 0$ sich entsprechen ($\mu = \infty$), auch $\beta = 0$ sein. Es bleibt also für die Elemente des zweiten Gebildes die Form:

$$\alpha M' + \delta\mu N' = 0.$$

Nun setzen wir fest, dass irgend einem dritten Elemente

$$M + lN = 0$$

ein bestimmtes, beliebig gewähltes Element

$$M' + mN' = 0$$

entspreche; dann muss für $\mu = l$:

$$\frac{\delta\mu}{\alpha} = m$$

sein, also $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{m}{l}$. Es erscheint demnach N' im zweiten Gebilde noch in die Constante $\frac{m}{l}$ multiplicirt, wodurch die Bedeutung der Gleichung

$$N' = 0$$

nicht afficirt wird; wir können daher statt $\frac{m}{l} N'$ wieder N' schreiben (wodurch nur die Bezeichnung geändert ist), und dann sind die Gebilde in ihrer projectivischen Beziehung zu einander analytisch vollständig gegeben. Wir dürfen also einem dritten Elemente des einen noch ein beliebiges drittes Element des andern zuordnen; aber dies geht nicht mehr mit einem vierten, denn vier Elemente geben ein bestimmtes Doppelverhältniss, welches dem aus den vier entsprechenden gebildeten gleich sein muss; und dies ist nur noch für *einen* Punkt im zweiten Gebilde möglich, wenn ein vierter des ersten gegeben ist. — Den hier bewiesenen Satz können wir noch in einer anderen Form aussprechen, in welcher er in unseren weiteren Untersuchungen besonders zur Anwendung kommt, nämlich:

Vereinigt gelegene projectivische Gebilde (d. h. zwei Punktreihen auf derselben Geraden oder zwei Strahlbüschel durch denselben Punkt) sind congruent, sobald drei entsprechende Elementenpaare sich decken.

2. *Verbindet man die Punkte einer Reihe:*

$$P + \mu Q = 0$$

mit einem nicht auf ihr liegenden Punkte (x_0, y_0), *so bilden die Verbindungslinien einen der Reihe projectivischen Büschel*, wenn man jedem Punkte den durch ihn gehenden Strahl entsprechen lässt.

Schneidet man die Strahlen eines Büschels:

$$G + \mu H = 0$$

mit einer nicht zu ihm gehörigen Geraden (u_0, v_0), *so bilden die Schnittpunkte eine dem Büschel projectivische Reihe*, wenn man jedem Strahle den auf ihm liegenden Punkt entsprechen lässt.

Zum Beweise genügt es, die Gleichung des so erzeugten Büschels, bez. der Punktreihe aufstellen. Setzen wir:

$$P = au + bv + c \qquad Q = \alpha u + \beta v + \gamma$$

$$G = ax + by + c \qquad H = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

so ist die Gleichung

der Verbindungslinie mit x_0, y_0:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a + \mu\alpha \\ y & y_0 & b + \mu\beta \\ 1 & 1 & c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0$$

des Schnittpunktes mit u_0, v_0:

$$\begin{vmatrix} u & u_0 & a + \mu\alpha \\ v & v_0 & b + \mu\beta \\ 1 & 1 & c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0$$

oder durch Zerlegung:

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha \\ y & y_0 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} u & u_0 & a \\ v & v_0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} u & u_0 & \alpha \\ v & v_0 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

In der That kommt dem so erzeugten Elemente also derselbe Werth

von μ zu, wie in dem gegebenen Gebidc, und darin beruht jedesmal die Projectivität von Reihe und Büschel. In diesem Falle, wo jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht, sagt man: *die projectivischen Gebilde sind in perspectivischer Lage.*

3. *Punktreihen und Strahlbüschel, welche projectivisch sind, lassen sich immer in perspectivische Lage bringen.*

Sind nämlich a, b, c drei Punkte einer Reihe, α, β, γ die ihnen entsprechenden Strahlen eines Büschels, so kann man den letzteren sich selbst congruent so verlegen, dass α durch a, β durch b, γ durch c geht; man braucht, um dies zu erreichen, nur über $\overline{ab}$ einen Kreisbogen, der den Winkel $\overline{\alpha\beta}$, über $\overline{bc}$ einen solchen, der den Winkel $\overline{\beta\gamma}$ fasst, zu construiren und den Schnittpunkt beider zum Büschelscheitel zu nehmen. Durch diesen Büschel wird dann auf der Geraden eine zweite Punktreihe ausgeschnitten, diese und die gegebene sind beide zu dem Strahlbüschel, also auch zu einander projectivisch. Sie haben aber zufolge der Construction drei Elementenpaare entsprechend gemein; sie fallen daher nach einem soeben bewiesenen Satze ganz zusammen; und die gegebene Punktreihe liegt in der That zu dem Strahlbüschel perspectivisch.

Projectivische Gebilde verschiedener Art kann man also geometrisch als aus der perspectivischen Lage hervorgegangen definiren; gleiches gilt aber auch bei projectivischen Gebilden derselben Art.

Projectivische Punktreihen nämlich heissen perspectivisch, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt, *das Centrum der Perspectivität,* gehen. Man kann diese Lage immer hervorrufen, indem man die eine Reihe, sich selbst congruent, so verschiebt, dass ein Punkt derselben mit dem ihm entsprechenden der andern Reihe zusammenfällt. Denn verbindet man dann zwei Punkte der einen Reihe bez. mit den beiden entsprechenden der andern und den Schnittpunkt dieser Linien mit dem gemeinsamen Punkte der beiden Reihen, so bestimmt jeder vierte Strahl dieses Büschels mit den drei Strahlen ein Doppel-

Projectivische Strahlbüschel nämlich heissen perspectivisch, wenn die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden, *dem perspectivischen Durchschnitte,* liegen. Man kann diese Lage immer hervorrufen, indem man das eine Büschel, sich selbst congruent, so verschiebt, dass ein Strahl desselben mit dem ihm entsprechenden des andern Büschels zusammenfällt. Denn nimmt man dann die Schnittpunkte von zwei Strahlen des einen Büschels bez. mit den zwei entsprechenden des andern und schneidet ihre Verbindungslinie mit der Verbindungslinie der Büschelcentra, so bestimmt jeder vierte Punkt jener Geraden mit diesen drei Punkten

verhältniss, gleich dem der vier Punkte, in denen die vier Strahlen eine der beiden Punktreihen schneiden. Also schneidet in der That jeder Strahl des Büschels auf den beiden Pnnktreihen zwei zugeordnete Punkte aus.

ein Doppelverhältniss, gleich dem der vier Strahlen, welche die vier Punkte mit einem der beiden Büschelcentren verbinden, also gehen in der That durch jeden Punkt der Geraden zwei zugeordnete Strahlen der beiden Büschel.

Diese Betrachtungen haben uns vom Begriffe des Doppelverhältnisses aus auf die Grundlagen der neueren synthetischen Geometrie geführt, denn diese gründet sich, hauptsächlich seit Steiner*), wesentlich auf die Auffassung der Geraden als Punktreihe, des Punktes als Strahlbüschel und auf die projectivische Beziehung verschiedener solcher Grundgebilde zu einander, welche dann zunächst durch die perspectivische Lage vermittelt wird. Durch Einführung der Liniencoordinaten und des Princips der Dualität ist aber auch in unseren analytischen Untersuchungen dieser Gedanke mit völliger Klarheit eingeführt, und es ist daher der Unterschied zwischen neuerer analytischer und synthetischer Geometrie nicht mehr als ein wesentlicher zu betrachten; beide Disciplinen operiren genau mit denselben Begriffen, und die erstere gibt eine präcise Ausdrucksform der letzteren. Wir wollen noch kurz die Grundzüge einer synthetischen Behandlung der Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse verfolgen, um auch hier die Uebereinstimmung mit den analytischen Operationen zu erkennen.

V. Erzeugnisse projectivischer Punktreihen und Strahlbüschel.

An die Theorie projectivischer Gebilde knüpft sich eine rein geometrische Erzeugungsweise der Curven zweiter Ordnung und der Curven zweiter Klasse, auf welche dann die weitere Untersuchung dieser Curven gegründet wird. Es gelten nämlich die folgenden beiden fundamentalen Sätze, die sich dualistisch gegenüberstehen:

Zwei projectivische Büschel, die nicht in perspectivischer Lage sind, bestimmen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Ortscurve von der zweiten Ordnung.

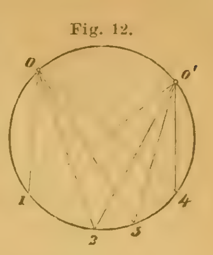
Zwei projectivische Reihen, die nicht in perspectivischer Lage sind, bestimmen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Umhüllungscurve von der zweiten Klasse.

---

*) Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832. Noch in sich consequenter ist die Darstellung von v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847. Ebenso bildet das Doppelverhältniss die Grundlage für die beiden Werke von Chasles: Traité de géométrie supérieure, 1852, und: Traité des sections coniques, première partie. 1865.

Der einfachste Fall für die Erzeugung einer Ortscurve ist hier der, wo die beiden projectivischen Büschel (mit den Centren 0 und $0'$; vergl. Fig. 12) congruent sind; die Curve ist dann ein *Kreis*, wie aus der Gleichheit der Peripheriewinkel 102 und 10′2, etc. folgt. Allgemein beweisen wir die angeführten Sätze analytisch folgendermassen:

Fig. 12.



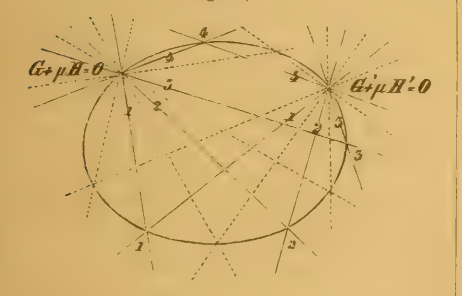
Die beiden Strahlbüschel seien:

$$(1) \qquad \begin{aligned} G + \mu H &= 0 \\ G' + \mu H' &= 0 \,. \end{aligned}$$

Für den Schnitt je zweier Strahlen, denen derselbe Werth von μ entspricht, müssen beide Gleichungen zusammenbestehen. Eliminiren wir μ, so erhalten wir eine von μ unabhängige Gleichung, welche also für alle Schnittpunkte entsprechender Strahlen gilt, nämlich:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} G & H \\ G' & H' \end{vmatrix} = GH' - HG' = 0 \,.$$

Fig. 13, *a*.



Hier sind G, H, G', H' lineare Functionen von x, y; die Gleichung stellt also in der That eine Curve zweiter Ordnung dar; und zwar geht dieselbe durch die Scheitel der beiden Büschel, denn (2) ist erfüllt, wenn gleichzeitig

$$G = 0 \text{ und } H = 0$$

oder

$$G' = 0 \text{ und } H' = 0 \,.$$

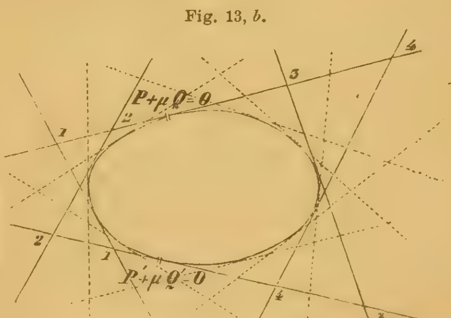
Die beiden Punktreihen seien:

$$\begin{aligned} P + \mu Q &= 0 \\ P' + \mu Q' &= 0 \,. \end{aligned}$$

Für die Verbindungslinie je zweier Punkte, denen derselbe Werth von μ entspricht, müssen beide Gleichungen zusammenbestehen. Eliminiren wir μ, so erhalten wir eine von μ unabhängige Gleichung, welche also für alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gilt, nämlich:

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix} = PQ' - QP' = 0 \,.$$

Fig. 13, *b*.



Hier sind P, Q, P', Q' lineare Functionen von u, v; die Gleichung stellt also in der That eine Curve zweiter Klasse dar; und zwar berührt diese die Träger der beiden Punktreihen, denn (2) ist erfüllt, wenn gleichzeitig

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

oder

$$P' = 0 \text{ und } Q' = 0 \,.$$

Wenn wir die so gewonnene Erzeugungsweise als eine fundamentale auffassen wollen, haben wir noch zu zeigen, dass *jede* Curve zweiter Ordnung, bez. zweiter Klasse in der Weise erzeugt werden kann. Wir führen dies nur für Punktcoordinaten durch und stellen den gefundenen Resultaten die entsprechenden für Liniencoordinaten sofort gegenüber; denn darin beruht der grosse Nutzen des Princips der Dualität, dass man jede analytische Operation geometrisch auf zwei Weisen deuten kann, und so durch *eine* Entwicklung *zwei* Sätze erhält*). Wir gehen dabei von der folgenden Bemerkung aus:

Es ist immer möglich, durch 5 Punkte, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen, eine Curve zweiter Ordnung zu legen.

Es ist immer möglich, an 5 Gerade, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, eine Curve zweiter Klasse zu legen.

Zwei der fünf Punkte nämlich kann man als Scheitel von Strahlbüscheln betrachten und diese projectivisch auf einander beziehen, indem man je zwei Strahlen sich entsprechen lässt, welche durch einen der drei anderen gegebenen Punkte geht. Dadurch ist dann die Projectivität völlig festgelegt, und die beiden Büschel bestimmen durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Curve zweiter Ordnung, welche durch die gegebenen fünf Punkte geht.

Nachdem wir so die Möglichkeit der Aufgabe, durch fünf gegebene Punkte eine Curve zweiter Ordnung zu legen, erkannt haben, können wir die Frage nach der Gleichung dieser Curve stellen. Diese muss vom zweiten Grade in x, y sein, also die Form haben:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

sie muss ferner erfüllt sein, wenn man für x, y die Coordinaten eines gegebenen Punktes einsetzt; unterscheiden wir letztere durch beigefügte Indices, so müssen also noch die fünf Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + cy_1 + f &= 0\\
ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + cy_2 + f &= 0\\
ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + cy_3 + f &= 0\\
ax_4^2 + bx_4y_4 + cy_4^2 + dx_4 + cy_4 + f &= 0\\
ax_5^2 + bx_5y_5 + cy_5^2 + dx_5 + cy_5 + f &= 0.
\end{aligned}$$

Dies sind aber fünf lineare Gleichungen für die 6 homogenen Unbekannten a, b, c, d, e, f, wir können daher letztere aus ihnen eindeutig berechnen, und unsere Aufgabe ergibt nur eine einzige Lösung, also:

---

*) Wenn wir bisher die Beweise in doppelter Form gaben, so geschah dies, um die ungewohntere Auffassung einer Curve als Erzeugniss es ihrer Tangenten geläufiger zu machen; auch im Folgenden werden wir deshalb noch öfter beide Betrachtungen durchführen.

Eine Curve zweiter Ordnung ist vollkommen bestimmt, wenn fünf ihrer Punkte gegeben sind.

Eine Curve zweiter Klasse ist vollkommen bestimmt, wenn fünf ihrer Tangenten gegeben sind,

Ist nun eine Curve zweiter Ordnung gegeben, so kann man fünf Punkte derselben beliebig wählen, und indem man zwei von ihnen als Büschelscheitel annimmt, die drei anderen aber zur Festlegung der projectivischen Beziehung zwischen beiden Büscheln benutzt, eine durch die 5 Punkte gehende Curve zweiter Ordnung als Ort der Schnittpunkte entsprechenden Strahlen construiren. Diese Curve muss dann mit der gegebenen zusammenfallen, da durch fünf Punkte nur eine solche Curve geht; es folgt also:

Eine jede Curve zweiter Ordnung kann durch zwei projectivische Strahlbüschel in obiger Weise entstanden gedacht werden.

Eine jede Curve zweiter Klasse kann durch zwei projectivische Punktreihen in obiger Weise entstanden gedacht werden.

Da man hiernach fünf ganz beliebige Punkte einer Curve zweiter Ordnung wählen kann, um auf sie eine Erzeugungsweise unserer Art zu begründen, so folgt, dass die Scheitel der benutzten Büschel (bez. die Träger der Punktreihen) in keiner Weise ausgezeichnet sind; und hieraus ergeben sich weiter die folgenden Sätze, welche eigentlich nur verschiedene Ausdrucksweisen dieser Bemerkung sind:

Die Verbindungslinien von irgend zwei Punkten einer Curve zweiter Ordnung mit den übrigen Punkten derselben ergeben zwei projectivische Strahlbüschel.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Curve zweiter Ordnung, so bleibt der Büschel der Strahlen, welche ihn mit den andern festen Punkten der Curve verbinden, stets sich selbst projectivisch.

Wie man auch vier feste Punkte einer Curve zweiter Ordnung mit einem fünften Punkte derselben verbindet, das Doppelverhältniss der vier Strahlen ist immer dasselbe.

Auf irgend zwei Tangenten einer Curve zweiter Klasse bestimmen die übrigen Tangenten der Curve durch ihre Schnittpunkte zwei projectivische Punktreihen.

Bewegt sich eine Tangente einer Curve zweiter Klasse um diese, so bleibt die auf ihr durch die übrigen Tangenten ausgeschnittene Punktreihe stets sich selbst projectivisch.

Wie man auch vier feste Tangenten einer Curve zweiter Klasse durch eine fünfte Tangente derselben schneidet, das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte ist immer dasselbe.

Diese Sätze geben gewissermassen die Grundlage für eine Geometrie auf der Curve zweiter Ordnung, wie wir sie oben auf einer Punktreihe und in einem Strahlbüschel studirt haben; sie können aber auch zur Ableitung der meisten über Curven unserer Art geltenden

Relationen dienen. Ein Beispiel für ihre Fruchtbarkeit mögen die folgenden wichtigen Sätze geben, welche als der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz*) bekannt sind:

Die gegenüberliegenden Seiten eines einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecks (d. h. dessen Ecken auf ihr liegen) schneiden sich in drei Punkten einer geraden Linie (vgl. Fig. 14, *a*).

Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken eines einer Curve zweiter Klasse umgeschriebenen Sechsseits (d. h. dessen Seiten sie berühren) gehen durch einen Punkt (vgl. Fig. 14, *b*).

Fig. 14, *a*.

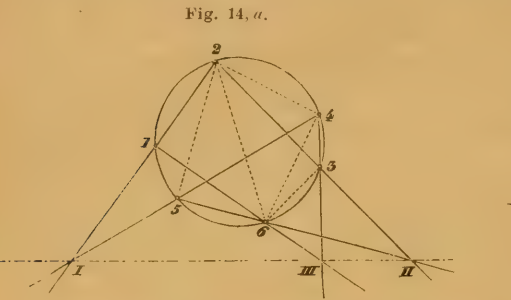
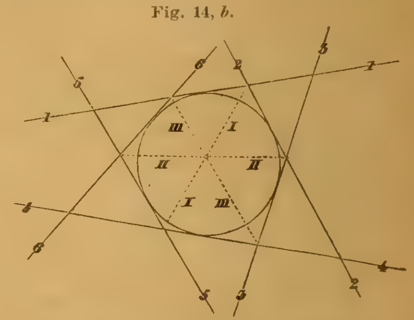


Fig. 14, *b*.



Bezeichnen wir nämlich die Ecken des Sechsecks durch Zahlen und betrachten diejenigen Seiten als gegenüberliegende (die Anordnung ist übrigens gleichgültig), welche in dem Schema:

12	45	I
23	56	II
34	61	III

neben einander stehen, wo 12 die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 bedeutet, etc. und sind I, II, III bez. die fraglichen drei Schnittpunkte, so werden z. B. auf den Linien 34 und 45 beziehungsweise von den zu einander projectivischen Büscheln mit den Scheiteln 6 und 2 zwei projectivische Punktreihen ausgeschnitten, welche perspectivisch liegen, da sie den Punkt 4 entsprechend gemein haben: die Verbindungslinien entsprechender Punkte also, d. h. die Linien I III, 23, 56 schneiden sich in einem Punkte II, q. e. d.

Mit Hülfe des Pascal'schen Satzes ist es leicht, beliebig viele Punkte einer Curve zweiter Ordnung, von der fünf Punkte (1, 3, 2, 4, 5) gegeben sind, zu construiren: Man lege durch einen der gegebenen Punkte (etwa 5) eine beliebige Gerade (etwa $\overline{5\,\text{II}}$); alsdann ist die Construction ihres zweiten Schnittpunktes (6) mit der Curve unmittel-

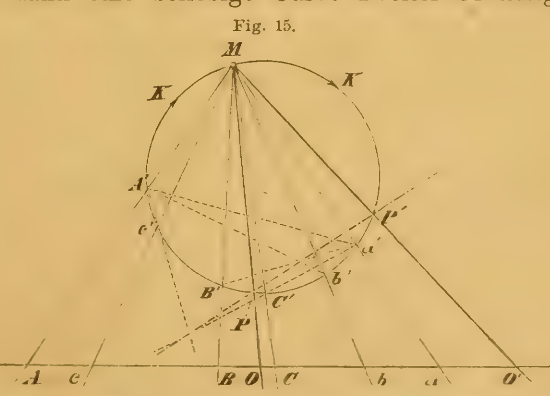
*) Pascal: Essai pour les coniques, 1630; in der Gesammtausgabe seiner Werke. — Brianchon: Journal de l'école polytechnique, cahier 13, 1806.

bar aus Fig. 14, a ersichtlich. Ebenso gibt der Brianchon'sche Satz ein Mittel, beliebig viele Tangenten einer durch fünf ihrer Tangenten gegebenen Curve zweiter Klasse zu finden.

Unsere geometrische Erzeugungsweise der Curven zweiter Ordnung und Klasse gibt ferner die Lösung der Aufgabe: *Es sollen die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einer durch fünf ihrer Punkte gegebenen Curve zweiter Ordnung construirt werden.* Bezeichnen wir nämlich die fünf gegebenen Punkte mit 1, 2, 3, 4, 5, und legen durch zwei von ihnen, etwa 1 und 2, Strahlen nach den drei andern: 3, 4, 5, so sind dadurch zwei projectivische Strahlbüschel mit den Scheiteln 1 und 2 bestimmt, welche den Kegelschnitt in bekannter Weise erzeugen. Die beiden Büschel schneiden auf der gegebenen Geraden zwei projectivische Punktreihen aus. Ein Punkt der Geraden wird nun gleichzeitig auf der Curve zweiter Ordnung liegen, wenn in ihm zwei entsprechende Strahlen der Büschel sich schneiden, d. h. zwei entsprechende Punkte der Reihen zusammenfallen. Da es immer zwei reelle oder imaginäre Schnittpunkte geben muss (die für eine Tangente nur zusammenfallen), so folgt beiläufig der Satz: *In zwei vereinigt gelegenen, projectivischen Punktreihen gibt es immer zwei Punkte, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen: die sogenannten Doppelpunkte der beiden Reihen*).* Unsere Aufgabe ist somit auf die andere zurückgeführt, *die Doppelpunkte zweier vereinigt gelegenen projectivischen Punktreihen zu construiren.*

Es seien nun die beiden Reihen durch drei ihrer Punkte: A, B, C und a, b, c gegeben, welche bez. einander entsprechen sollen (vgl. Fig. 15). Wir nehmen dann eine beliebige Curve zweiter Ordnung, am einfachsten einen Kreis K, als gezeichnet gegeben an. Von einem Punkte M des Kreises ziehen wir Strahlen nach den Punkten A, B, C, a, b, c, welche den Kreis noch bez. in den Punkten A', B', C', a', b', c' treffen mögen. Betrachten wir dann einmal den Punkt M, einmal einen der drei zuletzt erwähnten Punkte, z. B. A' als Scheitel eines Strahlbüschels, so ist

Fig. 15.



*) Es lässt sich dies übrigens auch leicht direct nachweisen. Vgl. darüber die dritte Abtheilung dieser Vorlesungen.

das Büschel $M(A'B'C')$ projectivisch zu $a'(A'B'C')$
und ebenso
das Büschel $M(a', b', c')$ „ „ $A'(a', b', c')$.

Da nun der Annahme nach $M(A'B'C')$ und $M(a', b', c')$ einander projectivisch sind, so ist auch

$$a'(A'B'C') \text{ projectivisch zu } A'(a', b', c').$$

Die beiden Büschel sind aber in perspectivischer Lage, weil sie den Strahl $A'a'$ entsprechend gemein haben; sie erzeugen also als perspectivischen Durchschnitt eine Gerade, welche den Kreis in den beiden Punkten P, P' treffen möge. Die Strahlen MP, MP' sind dann die Doppelstrahlen der beiden projectivischen Büschel

$$M(A'B'C') \quad \text{und} \quad M(a', b', c'),$$

oder, was dasselbe ist, der Büschel:

$$M(ABC) \quad \text{und} \quad M(a, b, c).$$

Ihre Schnittpunkte mit der gegebenen Geraden (O und O') bestimmen daher die beiden gesuchten Doppelpunkte der auf ihr gegebenen projectivischen Punktreihen; und damit ist unsere Aufgabe gelöst.*)

— Die ausdrückliche Voraussetzung für die Gültigkeit unserer letzten Betrachtungen war, dass die zur Erzeugung benutzten projectivischen Gebilde nicht perspectivisch liegen dürfen. Ist dies dagegen der Fall, so sind die erzeugten Gebilde keine eigentlichen Curven unserer Art mehr. Sind nämlich die beiden Strahlbüschel in perspectivischer Lage, so besteht die durch sie erzeugte Curve zweiter Ordnung aus zwei Geraden: dem perspectivischen Durchschnitte beider Büschel und der Verbindungslinie ihrer Scheitelpunkte. Ebenso besteht die Curve zweiter Klasse aus zwei einzelnen Punkten, wenn die beiden zu ihrer Erzeugung benutzten Punktreihen perspectivisch liegen: dem Schnittpunkte beider und dem Centrum der Perspectivität. Dies erhellt auch analytisch sofort; denn die projectivischen Gebilde haben bei perspectivischer Lage ein Element entsprechend gemein, und wir können die Gleichungen daher in der Form annehmen;

zwei Strahlbüschel:	zwei Punktreihen:
$G + \mu H = 0$	$P + \mu Q = 0$
$G + \mu H' = 0,$	$P + \mu Q' = 0,$

wo dann die Elimination von μ ergibt:

$$G(H' - H) = 0, \qquad P(Q' - Q) = 0,$$

d. h. die Curve zerfällt, wie es sein muss,

*) Ebenso kann man alle Gleichungen zweiten Grades constructiv lösen, wenn man einen gezeichnet gegebenen Kreis zu Hülfe nimmt. Vergl. Steiner: Die geometrischen Constructionen; Berlin 1833.

in die beiden Geraden:	in die beiden Punkte:
$G = 0$	$P = 0$
und: $H' - H = 0$.	und: $Q' - Q = 0$.

Analog kann eine jede Curve n^{ter} Ordnung in n Gerade, eine Curve n^{ter} Klasse in n Punkte zerfallen; und umgekehrt können wir stets die Gesammtheit von n Geraden als eine Curve n^{ter} Ordnung, die von n Punkten als eine Curve n^{ter} Klasse auffassen. Wir werden später die allgemeine Bedingung dafür kennen lernen, dass eine Curve zweiter Ordnung, bez. Klasse in dieser Weise ausartet.

Wir haben oben gesehen, dass man eine Gerade nie als Enveloppe von Geraden, einen Punkt nie als Ort von Punkten darstellen kann, während im Allgemeinen jede Curve in doppelter Weise aufzufassen ist. Beim Zerfallen der Curven tragen also die entstehenden Gebilde einen wesentlichen verschiedenen Charakter, je nachdem man die Curve ursprünglich als Punkt- oder Tangentengebilde ansah; es ist dies hier um so bemerkenswerther, als sonst *die Curven zweiter Ordnung mit denen zweiter Klasse identisch sind*, wie wir sogleich zeigen wollen. Der Beweis knüpft sich an eine Definition von Ordnung und Klasse der Curven, wie man sie in der synthetischen Geometrie anzunehmen pflegt, nämlich:

Eine Curve n^{ter} Ordnung wird von einer Geraden in n (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten.	*An eine Curve n^{ter} Klasse gehen von einem Punkte aus n (reelle oder imaginäre) Tangenten.*

Dies stimmt mit der früheren Definition; denn sei die Curve:

$f(x, y) = 0$	$f(u, v) = 0$
und die Gerade:	und der Punkt:
$ax + by + c = 0$,	$au + bv + c = 0$,

so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades

für y,	für v,
wenn man in $f(x, y)$ setzt:	wenn man in $f(u, v)$ setzt:
$x = -\frac{by + c}{a}$.	$u = -\frac{bv + c}{a}$.

Hieran anknüpfend stellen wir zum Beweise unserer Behauptung die Gleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve 2. Ordnung wirklich in Liniencoordinaten auf, wobei sich dann in der That eine Gleichung zweiten Grades in u, v ergibt.

Die Curve zweiter Ordnung sei gegeben durch die beiden Büschel:

$$G + \mu H = 0, \quad G' + \mu H' = 0,$$

also ihre Gleichung

$$GH' - G'H = 0;$$

die Gleichung der geraden Linie sei:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Wir wollen den Werth von μ bestimmen, welcher den nach den Schnittpunkten der Geraden mit der Curve gehenden Strahlen jener Büschel zukommt. Die Gleichungen der letzteren können wir aufgelöst in der Form schreiben:

$$(g_1 + \mu h_1) x + (g_2 + \mu h_2) y + (g_3 + \mu h_3) = 0$$
$$(g_1' + \mu h_1') x + (g_2' + \mu h_2') y + (g_3' + \mu h_3') = 0.$$

Diese Gleichungen müssen für die gesuchten Schnittpunkte mit der der gegebenen Geraden zusammenbestehen, d. h. es ist für sie:

$$\begin{vmatrix} g_1 + \mu h_1 & g_2 + \mu h_2 & g_3 + \mu h_3 \\ g_1' + \mu h_1' & g_2' + \mu h_2' & g_3' + \mu h_3' \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

eine in μ quadratische, in u, v lineare Gleichung. Ordnen wir nach μ, so wird sie also von der Form:

$$P + \mu Q + \mu^2 R = 0,$$

wo P, Q, R lineare Functionen von u und v sind, und darauf kommt es uns hier allein an. Betrachten wir u, v als Constante, so gibt die Auflösung dieser Gleichung die beiden gesuchten Werthe von μ; nehmen wir jedoch μ constant und u, v variabel an, so ist dies die Gleichung des Durchschnittspunktes der beiden Strahlen, welche dem gewählten Werthe von μ in den Büscheln entsprechen, d. h. die Gleichung eines Punktes der Curve zweiter Ordnung. Lassen wir μ nach einander alle möglichen Werthe durchlaufen, so erhalten wir alle Punkte der Curve; diese also erscheint durch unsere Darstellung mit Hülfe eines Parameters μ in die Gesammtheit aller ihrer Punkte aufgelöst: sie ist so, da μ quadratisch vorkommt, gewissermassen als *Punktreihe zweiter Ordnung* aufgefasst, ebenso wie die Gerade in der Gleichung

$$P + \mu Q = 0$$

als lineare Punktreihe vorgestellt wird.

Fügen wir noch die Bedingung hinzu, dass die Linie u, v eine Tangente der Curve ist, so erhalten wir die gesuchte Gleichung derselben in Liniencoordinaten. In diesem Falle muss sie von der Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten werden, d. h. die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung in μ müssen einander gleich werden. Diese sind aber:

$$\mu = -\frac{Q}{2R} \pm \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2R},$$

und die Bedingung für ihre Gleichheit ist:

$$Q^2 - 4PR = 0:$$

die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Hier sind P, Q, R linear in u, v, die Gleichung daher in ihnen quadratisch, also*):

Jede eigentliche Curve zweiter Ordnung ist auch von der zweiten Klasse.

Durch eine ganz analoge Betrachtung wird auch der umgekehrte Satz bewiesen. Eine Curve zweiter Klasse sei durch die beiden projectivischen Punktreihen:

$$P + \mu Q = 0$$
$$P' + \mu Q' = 0$$

gegeben. Die von einem durch die Gleichung:

$$ux + vy + 1 = 0$$

gegebenen Punkte an dieselbe gehenden Tangenten werden durch die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_1 + \mu q_1 & p_2 + \mu q_2 & p_3 + \mu q_3 \\ p_1' + \mu q_1' & p_2' + \mu q_2' & p_3' + \mu q_3' \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt, worin P, Q, P', Q' durch ihre linearen Ausdrücke in x, y ersetzt sind. Nach μ geordnet wird diese Gleichung von der Form:

$$G + \mu H + \mu^2 K = 0,$$

wo G, H, K in x, y lineare Ausdrücke bedeuten. Es ist dadurch die Curve, wenn wir x, y als variabel, μ als Parameter auffassen, dargestellt in ihrer Entstehung durch die Schaar ihrer Tangenten: *als Strahlbüschel zweiter Klasse.* Fallen die beiden diesem angehörigen Linien, welche durch einen Punkt gehen, zusammen, d. h. die beiden Tangenten an die Curve, so muss der Punkt auf der Curve liegen; die Bedingung dafür:

$$H^2 - 4GK = 0$$

gibt daher *die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten*, und diese ist vom zweiten Grade in x, y; also:

Jede eigentliche Curve zweiter Klasse ist auch von der zweiten Ordnung.

Die Identität beider Arten von Curven berechtigt uns im Folgenden, sie zunächst nur als Punktgebilde zu betrachten; auf die dualistische Behandlungsweise werden wir dann von selbst geführt. Auch werden wir sie, unabhängig davon, wie wir sie gerade auffassen, kurz als *Kegelschnitte* bezeichnen. Sie können nämlich durch den Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel erzeugt werden, und wurden unter diesem Gesichtspunkte schon im Alterthume behandelt.

---

*) Auf das Verhalten zerfallender Curven kommen wir später zurück.

VI. Harmonische Theilung.

Unter den ausgezeichneten Werthen, welche ein Doppelverhältniss annehmen kann, ist der für die harmonische Lage bereits oben besonders hervorgehoben. Schon die Betrachtung der einfachsten Verhältnisse zwischen vier beliebigen Punkten oder Geraden führt auf diese Lagenbeziehung; und im Anschlusse hieran ergibt sich eine einfache Construction des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen. Die Combination von vier beliebigen Geraden bezeichnen wir als *vollständiges Vierseit;* ein solches hat *6 Ecken,* welche einander paarweise gegenüberstehen (die Schnittpunkte von je 2 Seiten; die Punkte eines Paares sind in Fig. 16, a mit gleichen Zahlen bezeichnet) und *3 Nebenseiten* (in Fig. 16, a mit I, II, III bezeichnet), die Verbindungslinien der Punkte eines jener Paare. Für die letzteren gilt dann der Satz:

Fig. 16, a.



Jede Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird von den beiden andern Nebenseiten und den auf ihr liegenden Ecken harmonisch getheilt.

Analoges gilt für das *vollständige Viereck;* dasselbe hat *6 Seiten,* die einander paarweise zugehören, und *3 Nebenecken* (in Fig. 16, b mit den Zahlen I, II, III bezeichnet): *Die Verbindungslinien einer Nebenecke mit den beiden andern Nebenecken liegen harmonisch zu den beiden durch dieselben gehenden Seiten.* Dieser Satz steht dem vorhergehenden nicht nur dualistisch gegenüber, sondern ist eine unmittelbare Folge desselben, und umgekehrt, wie denn überhaupt die Figur des Vierecks mit der des Vierseits im Ganzen identisch ist: beide sind nur verschieden aufgefasst, indem man einmal von vier der 6 Ecken, einmal von vier der 6 Seiten ausgeht.

Fig. 16, b.



Der Beweis des angeführten Satzes ergibt sich wieder einfach durch Anwendung der abgekürzten Bezeichnungsweise. Es seien

$$G = 0, \quad H = 0, \quad K = 0, \quad L = 0$$

die Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierecks, wo:

$$\begin{aligned} G &= g_1 x + g_2 y + g \\ H &= h_1 x + h_2 y + h \\ K &= k_1 x + k_2 y + k \\ L &= l_1 x + l_2 y + l. \end{aligned}$$

Man kann dann immer vier Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma k_1 + \delta l_1 &= 0 \\ \alpha g_2 + \beta h_2 + \gamma k_2 + \delta l_2 &= 0 \\ \alpha g + \beta h + \gamma k + \delta l &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden, denn durch diese drei Gleichungen sind die Verhältnisse von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ völlig bestimmt; multipliciren wir sie bez. mit x, y, 1 und addiren, so ergibt sich identisch:

$$\alpha G + \beta H + \gamma K + \delta L \equiv 0,$$

oder wenn wir G statt αG, H statt βH, K statt γK, L statt δL schreiben, wodurch die geometrische Bedeutung nicht geändert wird:

$$G + H + K + L \equiv 0$$

Gleiches ergibt sich für vier lineare Functionen in u, v:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \; S = 0.$$

Also *zwischen vier Geraden, bez. vier Punkten besteht immer eine Identität*, d. h. eine Gleichung, die von den Coordinaten *aller* Punkte, bez. Geraden erfüllt wird; wir können ihr, wenn die vier Geraden nicht demselben Büschel, die vier Punkte nicht derselben Reihe angehören, die Form geben:

$$G + H + K + L \equiv 0$$

(vollständiges Vierseit).

Die drei Nebenseiten sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} G + H &\equiv -(K + L) = 0 \\ G + K &\equiv -(H + L) = 0 \\ G + L &\equiv -(H + K) = 0, \end{aligned}$$

denn die erste von ihnen z. B. geht wegen ihrer beiden Gleichungsformen gleichzeitig durch den Schnitt von $G = 0$, $H = 0$ und durch den von $K = 0$, $L = 0$.

$$P + Q + R + S \equiv 0$$

(vollständiges Viereck).

Die drei Nebenecken sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} P + Q &\equiv -(R + S) = 0 \\ P + R &\equiv -(Q + S) = 0 \\ P + S &\equiv -(Q + R) = 0, \end{aligned}$$

denn die erste von ihnen z. B. liegt wegen ihrer beiden Gleichungsformen gleichzeitig auf der Verbindungslinie von $P = 0$, $Q = 0$ und auf der von $R = 0$, $S = 0$.

Der vierte harmonische Strahl zu $G = 0$, $H = 0$ und $G + H = 0$ ist daher:

$$G - H \equiv (G + K) - (H + K) = 0,$$

d. h. Zu zwei Seiten und der durch ihren Schnittpunkt gehenden Nebenseite geht der vierte harmonische Strahl durch den Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten, oder:

In einem vollständigen Vierseit liegen je zwei Schnittpunkte der Nebenseiten harmonisch zu je zwei Ecken des Vierseits; q. e. d.

Der vierte harmonische Punkt zu $P = 0$, $Q = 0$ und $P + Q = 0$ ist daher:

$$P - Q \equiv (P + R) - (Q + R) = 0,$$

d. h. Zu zwei Ecken und der auf ihrer Verbindungslinie liegenden Nebenecke liegt der vierte harmonische Punkt auf der Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken, oder:

In einem vollständigen Viereck werden die Verbindungslinien je zweier Nebenecken von je zwei Seiten harmonisch getheilt; q. e. d.

Es ergibt sich hieraus die Construction des vierten harmonischen Elementes zu drei gegebenen von selbst. Seien nämlich auf einer Geraden drei Punkte: 1, 2, 3 gegeben, und soll ein Punkt 4, der zu ihnen harmonisch liegt und mit 2 das dem Paare 1, 3 zugeordnete Paar bildet, construirt werden, so ziehe man durch 1 und 3 zwei beliebige Gerade, verbinde deren Schnittpunkt mit 2 und ziehe durch 1 und 3 zwei andere Gerade, welche sich auf dieser Verbindungslinie schneiden. Letztere treffen die zuerst gezogenen Linien in zwei Punkten, und die Verbindungslinie dieser schneidet auf der gegebenen Geraden den gesuchten Punkt 4 aus. Die Richtigkeit der Construction erhellt sofort aus der Fundamentaleigenschaft des vollständigen Vierseits, welches hier von den vier durch 1 und 3 gezogenen Strahlen gebildet wird. Ebenso findet man zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen; man braucht dieselben nur durch eine vierte Gerade zu schneiden und zu den drei auf diesen so bestimmten Schnittpunkten in angegebener Weise den vierten harmonischen Punkt zu suchen, wobei man die drei Strahlen selbst sofort benutzen kann.

Das principielle Interesse, welches diese Constructionen bieten, liegt darin, dass wir allein durch Ziehen von geraden Linien, ohne Anwendung des Cirkels, zum Ziele gelangen. Eine jede Aufgabe, welche nur *eine* Lösung zulässt, muss sich in dieser Weise lösen lassen; erst wenn dies gelungen ist, dürfen wir sie als vollständig gelöst betrachten. Dabei ist jede Anwendung anderer Hülfsmittel, als der durch das Verbinden von Punkten oder durch das Schneiden von Geraden gegebenen, zu vermeiden, zumal jede Benutzung von Strecken und Winkelgrössen, wo es sich nur um Lagenbeziehungen handelt. Eine solche bringt in die Lösung Elemente hinein, welche der Natur der Aufgabe nicht entsprechen.

VII. Natur des Coordinatensystems.

Das Cartesische Coordinatensystem ist ein willkürlich gewähltes Werkzeug zur Behandlung von Aufgaben; die Wahl derselben, d. h. die Lage der Coordinatenaxen in der Ebene, ist an und für sich gleichgültig, die geometrischen Eigenschaften der behandelten Figuren müssen unabhängig von ihr bestehen. In der That fanden wir bisher in der abgekürzten Bezeichnungsweise ein Mittel, um unsere Untersuchungen ohne Rücksicht auf die Lage des Coordinatensystems durchzuführen. Gleichwohl wird im Folgenden die Betrachtung oft durch geschickte Wahl desselben wesentlich erleichtert, und es bietet sich dadurch die Aufgabe, zu untersuchen, wie man aus einer Lage des Coordinatensystems zu einer anderen übergehen kann, wie sich die vorliegenden Gleichungen durch Einführung neuer Coordinatenaxen ändern; wir werden dadurch zur Lehre von der sogenannten *Coordinatentransformation* geführt. Gleichzeitig werden wir eine wesentliche *Verallgemeinerung* unseres Coordinatensystems kennen lernen, wie dieselbe später von uns fast ausschliesslich gebraucht werden soll.

Verrücken wir die Axen des Coordinatensystems nur parallel zu sich selbst und bezeichnen die Coordinaten eines Punktes x, y in Bezug auf die neuen Axen durch x', y', so ergeben sich für Einführung dieser neuen Veränderlichen unmittelbar die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b, \end{aligned}$$

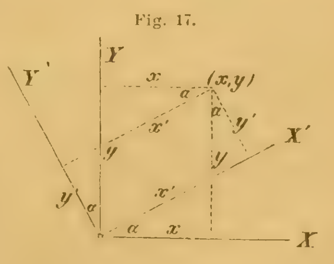
oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}$$

wo a, b die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf das alte System sind.

Drehen wir dagegen die Axen nur um den Anfangspunkt und bezeichnet α den Winkel der neuen X-Axe gegen die alte, so ist (vgl. Fig. 17)

Fig. 17.



$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \sin\alpha \\ y' &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \end{aligned}$$

Führen wir endlich beide Bewegungen zusammen aus, so ergibt die Combination der Gleichungen (1) und (2):

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}$$

oder umgekehrt:

$$\begin{aligned} x' &= \quad (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen gemeinsam ist ihr linearer Charakter, und das ist für uns wesentlich; die alten Coordinaten drücken sich *linear* und ohne Nenner durch die neuen aus, und ebenso diese durch jene. Einen gleichen Charakter würde das Princip der Dualität für die Transformationsgleichungen der Liniencoordinaten fordern; thatsächlich erscheinen diese jedoch zunächst in anderer Form, und dieser Umstand wird uns das Cartesische Coordinatensystem als für unsere Forderungen ungenügend erscheinen lassen, wir werden es deshalb durch ein allgemeineres ersetzen.

Als Liniencoordinaten werden die Coëfficienten von x, y in dem Ausdrucke

$$ux + vy + 1$$

bezeichnet; geht dieser also durch eine Transformation mittelst der Gleichungen (1), (2) oder (3) in die Form:

$$px' + qy' + r$$

über, so sind

$$\frac{p}{r} = u', \quad \frac{q}{r} = v'$$

die neuen Liniencoordinaten. Wenden wir zunächst die Gleichungen (1) an, so wird

$$ux + vy + 1 = ux' + vy' + (au + bv + 1),$$

also sind die Transformationsgleichungen für eine Parallelverschiebung des Coordinatensystems:

$$(4) \qquad \begin{aligned} u' &= \frac{u}{au + bv + 1} \\ v' &= \frac{v}{au + bv + 1}. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Substitution ergibt:

$$u'x' + v'y' + 1 = u'x + v'y + (-au - bv + 1),$$

also:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'}{-au - bv + 1} \\ v &= \frac{v'}{-au - bv + 1}. \end{aligned}$$

Für eine Drehung der Coordinatenaxen (Gleichung 2) erhalten wir:

$$ux + vy + 1 = (u \cos\alpha + v \sin\alpha)\, x' + (-u \sin\alpha + v \cos\alpha)\, y' + 1,$$

also:

$$(5) \qquad \begin{aligned} u' &= u \cos\alpha + v \sin\alpha \\ v' &= -u \sin\alpha + v \cos\alpha \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} u &= u' \cos\alpha - v' \sin\alpha \\ v &= u' \sin\alpha + v' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Die Zusammensetzung beider Transformationen endlich ergibt:

$$ux + vy + 1 = (u \cos\alpha + v \sin\alpha)\, x' + (-u \sin\alpha + v \cos\alpha)\, y' + (au + bv + 1),$$

also:

$$(6) \qquad \begin{aligned} u' &= \frac{u \cos\alpha + v \sin\alpha}{au + bv + 1} \\ v' &= \frac{-u \sin\alpha + v \cos\alpha}{au + bv + 1}, \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$u = \frac{u' \cos\alpha - v' \sin\alpha}{-(a \cos\alpha + b \sin\alpha)\, u' + (a \sin\alpha + b \cos\alpha)\, v'}$$

$$v = \frac{u' \sin\alpha + v' \cos\alpha}{-(a \cos\alpha + b \sin\alpha)\, u' + (a \sin\alpha + b \cos\alpha)\, v'}.$$

Die so für die Transformation der Liniencoordinaten aufgestellten Formeln tragen zunächst einen anderen Charakter, als die für Punktcoordinaten gefundenen, denn in ersteren tritt rechts ein Nenner auf, welcher gleich Null gesetzt, die Gleichung des neuen Anfangspunktes gibt, während in letzteren ein solcher Nenner nicht vorkommt. Diese Formeln sind daher dem Principe der Dualität, welches gleichmässige Umformung der Punkt- und Liniencoordinaten fordert, nicht entsprechend, und es liegt dies daran, dass das *Cartesische* Coordinatensystem ein undualistisch particularisirter Fall eines allgemeineren ist. Der erste Versuch, dasselbe zu erweitern, bestand in der Einführung *schiefwinkliger Coordinaten*, welche parallel zu zwei beliebigen, sich unter irgend welchem Winkel schneidenden Axen gemessen werden. Man gelangt zu ihnen (vgl. Fig. 18), von rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgehend, unmittelbar durch die Gleichungen:

Fig. 18.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta, \end{aligned}$$

wo $(\beta - \alpha)$ der von den neuen Axen eingeschlossene Winkel ist. Alle Formeln behalten jedoch durch Einführung dieser Coordinaten ganz den Typus der rechtwinkligen, und es wird deshalb durch dieselben für unsere Anschauungsweise nichts Neues gewonnen. Die Verallgemeinerung, welche uns zum Ziele führen wird, besteht vielmehr in Folgendem.

Wir legen drei beliebige Gerade, welche nicht durch einen Punkt gehen, zu Grunde und denken uns einen Punkt durch seine Abstände p_1, p_2, p_3 von den gewählten drei Linien definirt. Diese drei Bestimmungsstücke sind nicht von einander unabhängig, schon zwei derselben genügen zur Festlegung eines Punktes. Jene drei Grössen sind aber nur zweien äquivalent, wenn wir nicht die Abstände selbst, sondern nur ihre Verhältnisse benutzen; in der That werden die drei Fundamentalgeraden dann gleichmässig angewandt, und wir können auch, wenn wir wollen, die Abstände selbst eindeutig bestimmen. Das letztere ist jedoch bei Anwendung dieser Coordinaten niemals erforderlich; wir brauchen sogar nicht die senkrechten Abstände zu wählen, sondern können diese in beliebiger Richtung von dem betreffenden Punkte aus messen, d. h. die senkrechten Abstände noch mit beliebigen Constanten multipliciren. Wir geben daher die folgende Definition für *diese Dreieckscoordinaten:*

Die Coordinaten eines Punktes sind drei Zahlen, welche sich verhalten, wie die Abstände des Punktes von den Seiten eines Dreiecks, jeder Abstand multiplicirt mit einer beliebig, aber fest gewählten Constanten.

Bezeichnen wir die drei Coordinaten des Punktes durch x_1, x_2, x_3, so haben wir also nach dieser Definition:

$$\varrho x_1 = p_1 \cdot \varkappa_1$$
$$\varrho x_2 = p_2 \cdot \varkappa_2$$
$$\varrho x_3 = p_3 \cdot \varkappa_3$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die zunächst willkürlichen Constanten sind, der Proportionalitätsfactor ϱ dagegen völlig unbestimmt bleibt, und nur andeutet, dass die absoluten Werthe der 3 Coordinaten völlig gleichgültig sind; wir können die Gleichungen deshalb auch in der Form schreiben:

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 \varkappa_1 : p_2 \varkappa_2 : p_3 \varkappa_3 .$$

Insbesondere sind die drei Coordinaten der drei Ecken des Fundamentaldreiecks bez. gegeben durch:

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$
$$x_3 = 0, \quad x_1 = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

während in diesen drei Fällen bez. x_1, x_2, x_3 völlig unbestimmte Werthe haben, die nur nicht verschwinden dürfen. Die auf einer der drei Seiten liegenden Punkte genügen bez. den Bedingungen

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0,$$

d. h. dies sind die Gleichungen der drei Seiten in Dreieckscoordinaten.

Ganz analog führen wir *homogene Liniencoordinaten* durch folgende Definition ein:

Die Coordinaten einer Geraden sind drei Zahlen, welche sich verhalten, wie die Abstände der Geraden von den Ecken des Coordinatendreiecks, jeder Abstand multiplicirt mit einer beliebig, aber fest gewählten Constanten.

Die Gleichungen zur Definition der Liniencoordinaten sind also, wenn q_1, q_2, q_3 jene Abstände, λ_1, λ_2, λ_3 die beliebigen Constanten bedeuten:

$$\sigma u_1 = q_1 \lambda_1$$
$$\sigma u_2 = q_2 \lambda_2$$
$$\sigma u_3 = q_3 \lambda_3$$

wo σ der willkürliche Proportionalitätsfactor ist. Die Grössen λ werden wir so wählen, dass sie von den x in gewisser Abhängigkeit sind, nämlich so, dass die vereinigte Lage von Punkt und Gerade durch die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

angegeben wird; die Art dieser Abhängigkeit werden wir sogleich erkennen, wenn wir den Zusammenhang der Dreieckscoordinaten mit den rechtwinkligen untersuchen, wo dann die erwähnte Bedingung in der Form

$$ux + vy + 1 = 0$$

auftreten muss. Es seien die Gleichungen der drei Seiten, bez. der drei Ecken des Fundamentaldreiecks in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 & A_1 u + B_1 v + C_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 & A_2 u + B_2 v + C_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0, & A_3 u + B_3 v + C_3 = 0, \end{array}$$

wo die A, B, C die Unterdeterminanten der Determinante

$$r = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

sind, z. B.:

$$A_1 = b_2 c_3 - c_2 b_3, \quad B_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3, \quad C_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3;$$

die a, b, c hingegen sind ganz willkürlich; nur darf der Fall $r = 0$ nicht eintreten, da dann die der Geraden durch einen Punkt gehen würden, was wir ausgeschlossen haben. Nach früheren Erörterungen ergeben die Gleichungen (1) für die Abstände eines Punktes x, y von den drei Seiten, oder einer Geraden u, v von den drei Ecken die Ausdrücke (vergl. p. 24):

$$p_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \qquad q_1 = \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{C_1 \sqrt{u^2 + v^2}}$$
$$p_2 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \,. \qquad q_2 = \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{C_2 \sqrt{u^2 + v^2}} \,.$$
$$p_3 = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \qquad q_3 = \frac{A_3 u + B_3 v + C_3}{C_3 \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Die p müssen wir nun mit beliebigen Constanten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ multipliciren, um die Dreieckscoordinaten des betreffenden Punktes zu erhalten. Wir können aber, ohne eine specielle Annahme zu machen, setzen:

$$\varkappa_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \varkappa_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

denn eine weitere Aenderung der Constanten a_1, b_1, c_1 etc. um einen gemeinsamen Factor würde auf die Bedeutung der Gleichungen (1) doch ohne Einfluss bleiben. Um auch die Coordinaten einer Geraden in einfacher Gestalt zu erhalten, setzen wir:

$$\lambda_1 = C_1\,, \quad \lambda_2 = C_2\,, \quad \lambda_3 = C_3\,,$$

wodurch auch die oben gestellte Forderung für die Abhängigkeit der λ von den $\varkappa$ erfüllt ist, und lassen den gemeinsamen Nenner $\sqrt{u^2 + v^2}$ in den Proportionalitätsfactor σ eingehen. Dadurch ergibt sich:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 \\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma u_1 &= A_1 u + B_1 v + C_1 \\ \sigma u_2 &= A_2 u + B_2 v + C_2 \\ \sigma u_3 &= A_3 u + B_3 v + C_3\,. \end{aligned}$$

Sowohl für Punkt als Gerade kann man also *von rechtwinkligen zu Dreieckscoordinaten übergehen, indem man diese proportional setzt zu linearen Ausdrücken in jenen mit ganz beliebigen Coëfficienten, deren Determinante nur nicht verschwindet.* Um umgekehrt von Dreieckscoordinaten zu rechtwinkligen zu gelangen, haben wir die Gleichungen (2) für u, v, 1 aufzulösen, wodurch man findet:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3} \\ y &= \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3}{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3} \\ v &= \frac{b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3}{c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3}\,. \end{aligned}$$

In diesen Formeln findet sich keine Spur einer Verletzung des Dualitätsprincips; *für Punkt und Gerade sind die rechtwinkligen Coordinaten gleich linearen Ausdrücken in den Dreieckscoordinaten mit gemeinsamen Nenner.* Aus den Gleichungen (2) ergibt sich nun:

$$\varrho \cdot \sigma\,(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = \Sigma\,(a_i x + b_i y + c_i)\,(A_i u + B_i v + C_i)\,,$$

wo die Summe über den Index i von $i = 1$ bis $i = 3$ zu nehmen ist, oder wegen der drei Gleichungen:

$$a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i = r\,, \quad (i = 1,\,2,\,3):$$
$$\varrho \cdot \sigma\,(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = r\,(ux + vy + 1).$$

Die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade wird also in der That durch

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{4}$$

ausgedrückt, und dies ist Folge der Bestimmung, welche wir für die Constanten λ_1, λ_2, λ_3 oben getroffen haben. Hätten wir dieselben anders gewählt, so wären in diese Gleichung noch Coëfficienten eingetreten. Während also durch Aenderung der absoluten Werthe der a, b, c die Grössen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ ganz willkührlich bestimmt werden können, sind die λ damit zugleich völlig festgesetzt, denn es war

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3 = C_1 \\ \lambda_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1 = C_2 \\ \lambda_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2 = C_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Um das rechtwinklige Coordinatensystem als besonderen Fall des hier eingeführten allgemeineren aufzufassen, nehmen wir, was stets erlaubt und durch eine einfache Transformation zu erreichen ist, zwei der drei Coordinatenseiten zu einander rechtwinklig an. Sind dann x, y bez. die Abstände eines Punktes von diesen beiden Seiten ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), und p sein Abstand von der dritten Seite (vgl. Fig. 19), so haben wir:

Fig. 19.

$$\varrho x_1 = \varkappa_1 x\,, \quad \varrho x_2 = \varkappa_2 y\,, \quad \varrho x_3 = \varkappa_3 p\,,$$

oder wenn wir

$$\varkappa_1 = 1\,, \quad \varkappa_2 = 1\,, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{q}$$

setzen, wo q die Entfernung der Seite $x_3 = 0$ vom Anfangspunkte bedeutet:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= x \\ \varrho x_2 &= y \\ \varrho x_3 &= \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Lassen wir nun die dritte Seite, parallel zu sich, in's Unendliche, fortrücken, so convergirt $\frac{p}{q}$ gegen Eins, denn p unterscheidet sich von dem unbegrenzt wachsenden q immer nur um eine endliche Grösse so lange der betrachtete Punkt nicht selbst unendlich fern liegt. Es ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1\,,$$

d. h. wir leiten aus Gleichungen in Dreieckscoordinaten solche in rechtwinkligen ab, indem wir eine der Coordinaten $= 1$ annehmen und die beiden anderen durch x, y ersetzen, wie auch aus den Gleichungen (2) hervorgeht, wenn man $a_1 = b_2 = c_3$ nimmt und die übrigen Coëfficienten verschwinden lässt. Der Ausdruck

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

geht dabei bis auf einen Factor in

$$u_1 x + u_2 y + u_3$$

über, d. h. wenn wir auch $u_3 = 1$ setzen (und das ist bei blossen Verhältnisszahlen im Allgemeinen erlaubt), so werden u_1, u_2 die rechtwinkligen Liniencoordinaten. Letzteres lässt sich auch geometrisch in folgender Weise einsehen: verfügen wir über die Coëfficienten der Gleichungen (2) in angegebener Weise, so wird wegen (5):

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = -1 : -1 : \infty$$

also:

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{q_1}{q_2} : -\frac{q_2}{q_3} : \infty \cdot$$

Bezeichnen wir ferner mit p_1, p_2 die Abstände der Schnittpunkte der betreffenden Geraden mit den zu einander senkrechten Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ von den Ecken $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ des Coordinatendreiecks, mit a, b die Abstände dieser Punkte von der Ecke $u_3 = 0$, so ist:

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{p_1}{a}, \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{p_2}{b}.$$

Rückt nun die dritte Seite $x_3 = 0$ wieder in's Unendliche, so wird in der Grenze

$$p_1 = p_2 = \infty\,,$$

und dann ergibt sich, wie bei rechtwinkligen Coordinaten:

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : 1.$$

*Durch specielle Wahl der willkürlichen Constanten können wir also in einfacher Weise von Dreieckscoordinaten zu rechtwinkligen übergehen.**) Die Art dieser Bestimmung lässt uns nunmehr auch erkennen, weshalb wir oben die *negativen* reciproken Abstände als Coordinaten einer Geraden einführten, denn nur dadurch geht die Gleichung (4), wenn man

---

*) Ebenso einfach kann man von Dreieckscoordinaten zu den oben berührten schiefwinkligen übergehen; man hat dann zu setzen:

$$k_1 = k_2 = \sin w\,, \quad k_3 = \frac{1}{q}\,,$$

wo w der von den Coordinatenaxen eingeschlossene Winkel ist.

$$\begin{aligned} x_1 &= x \qquad & u_1 &= u \\ x_2 &= y & u_2 &= v \\ x_3 &= 1 & u_3 &= 1 \end{aligned}$$

setzt, unmittelbar in

$$ux + vy + 1 = 0$$

über.

Der umgekehrte Uebergang wurde durch die Gleichungen (3) vermittelt. Da hier die x, y und die u, v lineare, homogene Functionen mit gemeinsamen Nenner werden, so wird *der Grad einer Gleichung* in den Veränderlichen *durch Einführung der neuen Coordinaten niemals erhöht und niemals erniedrigt*, der Charakter einer solchen aber insofern wesentlich geändert, als sie durch Multiplication mit einer betreffenden Potenz des gemeinsamen Nenners in eine *homogene Gleichung zwischen 3 Variabeln übergeht.**) Nur *homogene* Gleichungen derselben haben in der That eine geometrische Bedeutung, da nur die Verhältnisse der x bestimmt sein dürfen. Insbesondere also ist die *lineare* homogene Gleichung:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden mit den Coordinaten m_1, m_2, m_3, und

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 = 0$$

die eines Punktes mit den Coordinaten m_1, m_2, m_3; und von dieser Form ist die Gleichung jeder Geraden, bez. jedes Punktes.

Unter den Gleichungen ersten Grades ist eine besonders ausgezeichnet, nämlich die, deren linke Seite beim Uebergange zu *Cartesischen* Coordinaten (Gl.(3)) den Nenner gibt:

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0.$$

Für alle Punkte dieser Geraden und nur für diese wird $x = \infty$, $y = \infty$; sie enthält also alle unendlich fernen Punkte der Ebene. Da somit die Gesammtheit dieser Punkte durch eine lineare Gleichung dargestellt wird, werden wir im Folgenden stets von einer *unendlich fernen Geraden* sprechen;**) es soll dadurch jedoch nur diese analytische Thatsache, aber keinerlei metaphysische Auffassung ausgedrückt werden. Die Einführung dieser Bezeichnung erlaubt uns dann, manche Sätze einfacher zu beweisen und auszusprechen, indem wir mit der unendlich fernen Geraden wie mit einer wirklich vorhandenen operiren. Es folgt

*) Homogene Coordinaten finden sich zuerst bei Möbius (Barycentrischer Calcul, 1827); aber sie wurden für die Geometrie erst von wesentlicher Bedeutung durch Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5, 1829), indem derselbe Anwendungen im Sinne der Theorie der homogenen Functionen gab.

**) Diese so fruchtbare Ausdrucksweise wurde von Poncelet eingeführt: Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822; p. 49 und 53.

hieraus z. B. wieder der schon früher hervorgehobene Satz, dass *eine gerade Linie nur einen unendlich fernen Punkt* hat (vgl. p. 33), denn jede Gerade wird von einer anderen Geraden nur in einem Punkte geschnitten. Ebenso werden wir von zwei unendlich fernen Punkten einer Curve zweiter Ordnung, oder allgemein von n unendlich fernen Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung sprechen.

Die oben erhaltenen Transformationsformeln waren sämmtlich linear in den neuen und in den alten Variabeln, und dies war für dieselben charakteristisch. Da nun bereits der Uebergang vom rechtwinkligen Coordinatensystem zum Dreieckssystem auf beliebige lineare Functionen führt, so können wir nichts Allgemeineres erhalten, wenn wir in den Ausdrücken (2) die rechtwinkligen Coordinaten mittelst Gleichungen von der Form (3) auf ein zweites Dreieckssystem beziehen und so den Uebergang von einem Dreieckssystem zu einem anderen vermitteln. Sind also x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3 die Punkt- bez. Liniencoordinaten in dem einen System; y_1, y_2, y_3; v_1, v_2, v_3 die in dem andern, so werden die ersteren proportional zu linearen homogenen Functionen der letzteren, deren Determinante, nach Analogie mit Früherem, nur nicht verschwinden darf. Ferner muss

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

bis auf einen Factor in

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$$

übergeben. Daher sind zusammengehörige Transformationsgleichungen

für Punktcoordinaten:	für Liniencoordinaten:
$\varrho y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$,	$\sigma u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + a_{31} v_3$,
(6) $\varrho y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$,	$\sigma u_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + a_{32} v_3$,
$\varrho y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$,	$\sigma u_3 = a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + a_{33} v_3$,

(wo die Determinante der a_{ik} nicht verschwinden darf). Es enthalten hier die Gleichungen, welche die neuen Punktcoordinaten (y) durch die alten (x) ausdrücken, dieselben Coëfficienten, wie die Gleichungen, welche die alten Liniencoordinaten (u) durch die neuen (v) darstellen, nur *transponirt;* d. h. aus der Determinante der links stehenden Gleichungen erhält man die der rechts stehenden, wenn man die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht; beide Determinanten sind demnach identisch. Die Auflösung des Systems (6) ergibt

für Punktcoordinaten:	für Liniencoordinaten:
$\mu x_1 = A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3$	$\nu v_1 = A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3$
(7) $\mu x_2 = A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3$	$\nu v_2 = A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3$
$\mu x_3 = A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3$.	$\nu v_3 = A_{31} u_1 + A_{32} u_2 + A_{33} u_3$.

Es bedeuten hier die A_{ik} die zweigliedrigen Unterdeterminanten von der Determinante der Substitution:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen erkennt man sofort die geometrische Bedeutung der Substitutionscoëfficienten. Da nämlich

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0,$$
$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

bez. die Gleichungen der Seiten und Ecken des neuen Coordinatendreiecks darstellen, so sind bez. *die Coordinaten der neuen*

Dreiecksseiten:	*Dreiecksecken:*
$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$	$A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13}$
$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}$	$A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23}$
$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$,	$A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33}$,

und ebenso *in Bezug auf das neue Dreieck die Coordinaten der alten*

Dreiecksseiten:	*Dreiecksecken:*
$A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}$	$a_{11} \quad a_{21} \quad a_{31}$
$A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}$	$a_{12} \quad a_{22} \quad a_{32}$
$A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}$.	$a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33}$.

Das neue Coordinatensystem, welches wir soeben untersucht haben, zeigt sich besonders geeignet zur Behandlung solcher Probleme, in denen von Massverhältnissen nicht die Rede ist, welche sich also nur auf Lagenbeziehungen ausdehnen. Wenn wir daher, wie es im Folgenden geschehen soll, unsere früheren Betrachtungen über Punkte und Strahlen kurz in Dreieckscoordinaten wiederholen sollen, so müssen wir uns dabei auf diejenigen beschränken, welche eine vollkommen dualistische Uebertragung gestatten.

Die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Gerade war:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Es ist dies nunmehr auch die allgemeinste Form für die Gleichung eines Punktes oder einer Geraden, je nachdem man die x oder die u als constant ansieht; in rechtwinkligen Coordinaten dagegen mussten wir neben der Bedingung für die vereinigte Lage:

$$ux + vy + 1 = 0$$

noch bez. die Gleichungen

$$Ax + By + C = 0, \qquad Au + Bv + C = 0$$

als die allgemeinsten für einen Punkt bez. eine Linie untersuchen. — Wir behandeln im Ausschlusse hieran die folgende Aufgabe:

Es soll die Gleichung der Verbindungslinie u von zwei gegebenen Punkten y und z aufgestellt werden.

Ist x ein Punkt auf dieser Linie, so haben wir:

$$(8)\qquad \begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 &= 0 \\ u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Es soll die Gleichung des Schnittpunktes x von zwei gegebenen Geraden v und w aufgestellt werden.

Ist u ein Strahl durch diesen Punkt, so haben wir:

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 &= 0 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Die Elimination von u bez. von x hieraus ergibt

als Gleichung der Geraden:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

als Gleichung des Punktes:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Es sind also die Coordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte y, z:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \mu u_1 &= y_2 z_3 - z_2 y_3 \\ \mu u_2 &= y_3 z_1 - z_3 y_1 \\ \mu u_3 &= y_1 z_2 - z_1 y_2 . \end{aligned}$$

Es sind also die Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden v, w:

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ \mu x_2 &= v_3 w_1 - w_3 v_1 \\ \mu x_3 &= v_1 w_2 - w_1 v_2 . \end{aligned}$$

Die Gleichungen (9) kann man in die folgenden auflösen, welche uns die Coordinaten eines beweglichen Punktes der Geraden bez. eines beweglichen Strahles durch den Punkt darstellen:

Punktreihe

$$(11)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= y_1 + \lambda z_1 \\ \varrho x_2 &= y_2 + \lambda z_2 \\ \varrho x_3 &= y_3 + \lambda z_3 . \end{aligned}$$

Strahlbüschel

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= v_1 + \lambda w_1 \\ \varrho u_2 &= v_2 + \lambda w_2 \\ \varrho u_3 &= v_3 + \lambda w_3 . \end{aligned}$$

Hier ist λ wieder ein Parameter. Multipliciren wir die Gleichungen links bez. mit u_1, u_2, u_3, die rechts bez. mit x_1, x_2, x_3 und addiren auf beiden Seiten, so erhalten wir

die Gleichung eines beweglichen Punktes der Reihe:

$$P + \lambda Q = 0,$$

die Gleichung eines beweglichen Strahles des Büschels:

$$G + \lambda H = 0,$$

wo Q linear in den u; G, H linear in den x sind, nämlich:

$$\begin{aligned} P &= u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \\ Q &= u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ H &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 . \end{aligned}$$

In dieser Darstellung hat der Parameter λ dieselbe Bedeutung, wir früher λ und μ beim Gebrauche von rechtwinkligen Coordinaten;

er gibt nämlich wieder bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss des betreffenden Elementes von den beiden festen Grundelementen. Man überzeugt sich hiervon leicht, indem man die Gleichungen (11) und (3) combinirt. Dadurch erhält man*):

$$x = \frac{\Sigma A_i y_i + \lambda \Sigma A_i z_i}{\Sigma C_i y_i + \lambda \Sigma C_i z_i} \qquad u = \frac{\Sigma a_i v_i + \lambda \Sigma a_i w_i}{\Sigma c_i v_i + \lambda \Sigma c_i w_i}$$

$$y = \frac{\Sigma B_i y_i + \lambda \Sigma B_i z_i}{\Sigma C_i y_i + \lambda \Sigma C_i z_i}, \qquad v = \frac{\Sigma b_i v_i + \lambda \Sigma b_i w_i}{\Sigma c_i v_i + \lambda \Sigma c_i w_i},$$

wo die Summen (die von $i = 1$ bis $i = 3$ zu nehmen sind) nur gegebene constante Grössen enthalten; daher wird die Gleichung des Punktes x, y bez. des Strahles u, v in rechtwinkligen Coordinaten von der Form:

$$P + \lambda Q = 0, \qquad G + \lambda H = 0,$$

d. h. wie früher, linear in λ, und dadurch ist unsere Behauptung bewiesen. Auch erhalten wir wieder für $\lambda = 0$ den Punkt y, resp. den Strahl v und für $\lambda = \infty$ den Punkt z, resp. den Strahl w. Alle an die geometrische Bedeutung des Parameters angeknüpften Betrachtungen bleiben somit auch unabhängig vom Coordinatensysteme bestehen, d. h. *alle Sätze über Doppelverhältnisse und über projectivische Beziehungen behalten denselben analytischen Ausdruck*. Insbesondere also die Relationen zwischen projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln und die Erzeugung der Kegelschnitte aus denselben. Wir wenden uns nunmehr zum genaueren Studium der letzteren Curven.

---

*) Es wird kein Missverständniss möglich sein, wenn in diesen Gleichungen die Buchstaben y, v einmal als rechtwinklige Coordinaten, einmal (mit Indices versehen) als Dreieckscoordinaten auftreten.

Zweite Abtheilung.

Die Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

I. Schnittpunkte mit einer Geraden. — Polarentheorie.

Die Curven zweiter Ordnung und Klasse, deren geometrische Erzeugungsweise uns schon früher beschäftigt hat, wollen wir nun untersuchen, indem wir nicht von dieser Entstehungsweise, sondern von der allgemeinsten homogenen Gleichung zweiten Grades in x_1, x_2, x_3 ausgehen. Wir werden dabei finden, dass es keine eigentliche Curven zweiter Ordnung gibt ausser den schon in unseren einleitenden Aufgaben erwähnten, nämlich: Ellipse, Hyperbel und Parabel. Es können aber, wie bereits bei Gelegenheit hervorgehoben, uneigentliche Curven auftreten, welche durch Zerfallen der Gleichung 2. Grades in zwei lineare Factoren entstehen; dies führt dann wieder zum Geraden- oder zum Punktepaar.

Die allgemeinste Gleichung zweiten Grades werden wir erhalten, wenn wir die Quadrate und zweigliedrigen Producte der Veränderlichen:

$$x_1^2, \quad x_2^2, \quad x_3^2, \quad x_1 x_2, \quad x_1 x_3, \quad x_2 x_3$$

mit beliebigen von einander unabhängigen Coëfficienten multiplicirt addiren. Diese Coëfficienten setzen wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, als reelle Grössen voraus. Wir wählen für sie denselben Buchstaben und unterscheiden die Coëfficienten der verschiedenen Glieder durch zugefügte Indices, welche den in sie multiplicirten Variabeln entsprechen; wir fügen ihnen ferner noch den Factor 2 hinzu, wenn in dem betreffenden Gliede zwei verschiedene Veränderliche mit einander multiplicirt sind. Wir schreiben also die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung in der Form:

$$(1) \quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0.$$

Die Vortheile dieser Schreibweise werden im Laufe unserer Darstellung von selbst klar werden. Das Hinzufügen der Zahlenfactoren empfiehlt sich besonders, da wir den Ausdruck (1) auch kürzer in der symbolischen Form:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0$$

schreiben können; wir müssen uns dann nur vorstellen, dass wir statt eines Productes $a_i a_k$ den Coëfficienten a_{ik} $(= a_{ki})$ zu setzen haben, also a_{11} statt $a_1 a_1$, a_{23} statt $a_2 a_3$, u. s. f.

An die Spitze der Theorie stellen wir die Aufgabe, *die Schnittpunkte der Verbindungslinie zweier Punkte y und z mit dem Kegelschnitte* (1) *zu bestimmen.* Die Coordinaten eines Punktes dieser Linie sind nach dem Früheren:

$$x_1 = y_1 + \lambda z_1$$
$$x_2 = y_2 + \lambda z_2$$
$$x_3 = y_3 + \lambda z_3 ;$$

und wir haben den Werth des Parameters λ zu suchen, für welchen die Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Gleichung (1) genügen, d. h. wir müssen setzen:

$$\{(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \lambda (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)\}^2 = 0,$$

oder entwickelt:

$$\lambda^2 R + 2 \lambda Q + P = 0, \tag{2}$$

wo nun P, Q, R bestimmt sind durch:

$$\begin{aligned}
P &= (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2 \\
R &= (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 \\
Q &= (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)\,(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3) \\
&= \quad z_1 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) \\
&\quad + z_2 (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3) \\
&\quad + z_3 (a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3),
\end{aligned} \tag{3}$$

oder wenn wir uns der Bezeichnungsweise der Differentialrechnung bedienen wollen:

$$\begin{aligned}
Q &= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial P}{\partial y_2} z_2 + \frac{\partial P}{\partial y_3} z_3 \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial R}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial R}{\partial z_2} y_2 + \frac{\partial R}{\partial z_3} y_3 \right\}.
\end{aligned}$$

P und R entstehen also, wenn man in die linke Seite der Gleichung des Kegelschnitts (1) die Coordinaten y bez. z statt x einsetzt; Q dagegen ist aus den y und z symmetrisch zusammengesetzt und in beiden linear. Die Auflösung der quadratischen Gleichung (2) nach λ ergibt:

$$\lambda = - \frac{Q \mp \sqrt{Q^2 - PR}}{R},$$

und daher sind *die Coordinaten der beiden Schnittpunkte,* wenn wir den gemeinsamen Nenner R in den Proportionalitätsfactor ϱ eingehen lassen:

$$\varrho x_1 = Ry_1 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\, z_1$$
$$\varrho x_2 = Ry_2 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\, z_2$$
$$\varrho x_3 = Ry_3 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\, z_3 .$$

Wir haben somit auf der Geraden yz vier Punkte: die gegebenen mit den Coordinaten y_i und z_i und die soeben gefundenen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte, deren Coordinaten $y_i + \lambda z_i$ und $y_i + \mu z_i$ sein mögen, wo λ und μ die Wurzeln der quadratischen Gleichung (2) sind. Diese Punkte werden ein bestimmtes Doppelverhältniss besitzen. Theilen wir zur Bildung desselben die Punkte, entsprechend der Natur unserer Aufgabe, in zwei Paare, so erhalten wir für dies Doppelverhältniss nur zwei verschiedene Werthe, nämlich entweder:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

oder

$$\alpha' = \frac{\mu}{\lambda} .$$

Nun ist, da λ, μ die Wurzeln von (2) sind:

$$\lambda + \mu = -\frac{2Q}{R}, \quad \lambda\mu = \frac{P}{R},$$

daher auch:

$$\alpha + \alpha' = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu} = \frac{4\,Q^2 - 2\,PR}{PR} .$$

Also sind (wegen $\alpha\alpha' = 1$) α, α' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\alpha^2 - \frac{4\,Q^2 - 2\,PR}{PR}\,\alpha + 1 = 0,$$

oder:

$$(\alpha + 1)^2\, PR - 4\,Q^2 \alpha = 0, \tag{4}$$

und die Auflösung dieser Gleichung gibt unmittelbar das Doppelverhältniss der vier Punkte. Wie müssen letztere nun liegen, damit die Gleichung besondere Eigenschaften hat, damit also besondere Werthe des Doppelverhältnisses entstehen? Einen der gegebenen Punkte, z. B. y, können wir beliebig wählen; durch ihn ziehen wir alle möglichen Strahlen und fragen nach den Punkten z, welche mit y und den beiden Schnittpunkten des betreffenden Strahles ein gegebenes Doppelverhältniss α bilden. Ist y constant, so ist die Gleichung (4) homogen vom zweiten Grade in z; *dieser Punkt liegt also wieder auf einer Curve zweiter Ordnung.* Lassen wir α variiren, so ist demnach jedem Punkte durch den gegebenen Kegelschnitt ein System von Curven zweiter Ordnung zugeordnet. Unter diesen ist aber *eine, welche in eine doppelt zählende Gerade zerfällt;* und diese wird für uns von be-

sonderer Wichtigkeit. Mit ihr werden wir uns zunächst ausschliesslich beschäftigen, die Beziehung der anderen hier gefundenen Kegelschnitte zur Grundcurve dagegen erst später kennen lernen.

Setzen wir:

$$\alpha = -1;$$

so reducirt sich (4) in der That auf $\Omega^2 = 0$, d. h. auf die Linie

$$\Omega = 0.$$

Soll also die Gerade yz die Curve harmonisch schneiden, so muss z auf der geraden Linie $\Omega = 0$ liegen, der „*Polaren des Punktes y* in Bezug auf den Kegelschnitt"; y dagegen wird der *Pol der Geraden* $\Omega = 0$ genannt. Wir sprechen diese wichtige Beziehung als Satz in der Form aus:

Wenn man durch einen Punkt alle möglichen Strahlen legt und auf jedem den vierten harmonischen Punkt zu y und seinen Schnittpunkten mit einem Kegelschnitte sucht, so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden, „der Polare des Poles y."

Unter diesen Strahlen sind solche, welche die Curve gar nicht, oder vielmehr in zwei imaginären Punkten schneiden; dies tritt ein, wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (2) imaginär werden. Dem ungeachtet bleibt der vierte harmonische Punkt reell, denn die genannten Wurzeln sind dann immer conjugirt imaginär, und die Gleichungen der vier Punkte haben daher die schon früher erwähnte Form (vgl. p. 42):

$$U = 0 \qquad U + \sqrt{-1}\,V = 0$$
$$V = 0 \qquad U - \sqrt{-1}\,V = 0.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist die symmetrische Form der Gleichung (3):

$$\Omega = 0.$$

Da sich dieselbe nicht ändert, wenn man y und z vertauscht, so folgt unmittelbar:

Liegt y auf der Polare von z, so geht die Polare von y durch z; also:

Bewegt sich z auf der Polare von y, so dreht sich die Polare von z um y; und umgekehrt:

Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare dieses Punktes.

Die Polare schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten. Verbindet man einen derselben mit dem Pole, so muss auf dieser Geraden eine Gruppe von vier harmonischen Punkten 1, 2, 3, 4 liegen (wo 1, 2 und 3, 4 die zugeordneten Paare seien), von denen zwei Punkte (2 und 3) zusammenfallen. Dann fällt aber (vgl. p. 40) auch 4 in

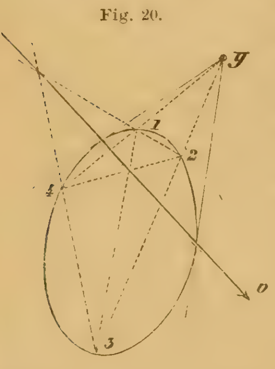
diesen Punkt, d. h. die Schnittpunkte (3, 4) der Geraden mit der Curve fallen zusammen, und somit folgt:

Die Polare eines Punktes geht durch die Berührungspunkte der beiden von ihm an die Curve gezogenen Tangenten. (Dass es zwei solche Tangenten gibt, haben wir oben gesehen, da jede allgemeine Curve 2. Ordnung auch 2. Klasse ist.)

Bewegt sich also ein Punkt auf einer Tangente, so geht seine Polare immer durch den Berührungspunkt derselben. Daher ist der Berührungspunkt der Pol der Tangente, d. h. *die Polare eines Punktes der Curve ist die in ihm an die Curve gelegte Tangente.*

Die hier ausgesprochenen Sätze führen auch unmittelbar zur *Construction der Polare*, wenn der Kegelschnitt gezeichnet vorliegt und ausser ihm ein Punkt als Pol gegeben ist. Man braucht nur durch den letzteren zwei beliebige Gerade zu ziehen, und auf ihnen den vierten harmonischen Punkt zu dem gegebenen Punkte und ihren Schnittpunkten mit der Curve zu construiren, was ja mit Hülfe der Sätze über das vollständige Viereck geschieht: Betrachtet man die vier Schnittpunkte der beiden Hülfsgeraden mit der Curve (1, 2, 3, 4 in Fig. 20) als Ecken des Vierecks, so ist die eine Nebenecke der gegebene Pol y, und die Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken seine Polare v. Diese Construction liefert aber nach dem Obigen auch zugleich die Berührungspunkte der beiden durch den gegebenen Punkt gehenden Tangenten, also auch diese Tangenten selbst. Insbesondere können wir in dieser Weise *die von einem Punkte an einen Kreis zu legenden Tangenten* finden, und diese Construction verdient von unserem Standpunkte aus den Vorzug vor der bekannten, welche mit Hülfe eines anderen Kreises ausgeführt wird. Denn wir brauchen nur sechs Hülfslinien zu ziehen, um die Aufgabe in allgemeinster Weise zu lösen; diese Construction ist also auch praktisch ebenso einfach als jene andere. Beim Kreise steht die Polare eines Punktes überdies, als Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Tangenten, senkrecht gegen die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Pole. Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so werden die beiden Tangenten imaginär, die Polare verläuft also ganz ausserhalb desselben, d. h. ohne ihn in reellen Punkten zu treffen. Ebenso wird durch jede reelle Curve zweiter Ordnung die Ebene in zwei Theile getrennt: in dem einen liegen die Punkte, von denen reelle, in dem andern diejenigen, von denen imaginäre Tangenten an die Curve gehen. Die Punkte der letzteren selbst dagegen vermitteln den Ueber-

Fig. 20.



gang zwischen beiden Theilen der Ebene, indem für sie die beiden Tangenten in eine zusammenfallen.

Ist der Kegelschnitt nicht ganz gezeichnet gegeben, sondern nur durch fünf seiner Punkte bestimmt, so kann man gleichwohl die Polare eines beliebigen Punktes constructiv angeben. Diese Aufgabe kommt nämlich offenbar auf die andere zurück: Man soll den zweiten Schnittpunkt einer durch einen jener fünf Punkte gehenden Geraden mit dem Kegelschnitte finden; und die Lösung der letzteren haben wir schon früher mit Hülfe des Pascal'schen Satzes bewerkstelligt. Wir haben die betreffende Construction nur für zwei Linien auszuführen, die durch den gegebenen Pol und je einen der fünf Punkte gehen; und können dann die Polare wieder mit Hülfe der Sätze über das vollständige Viereck finden. —

Bei diesen Constructionen ist vorausgesetzt, dass *jede* Gerade der Ebene Polare eines Punktes ist. Zum Beweise hierfür schreiben wir die Gleichung der Polare eines Punktes y $(Q = 0)$ in der Form:

$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 = 0,$$

so sind v_i die Coordinaten dieser Polare; sie werden wegen (3) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma v_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ \sigma v_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 \qquad (5) \\ \sigma v_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 . \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach y_1, y_2, y_3 wird man daher in der That auch zu jeder Geraden v einen Pol y bestimmen können, sobald die Determinante der Gleichungen (5) nicht verschwindet. Diesen letzteren Fall schliessen wir vorläufig von der Betrachtung aus und werden ihn später eingehend behandeln: wir setzen zunächst stets voraus, dass

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0 .$$

Diese *Determinante des Kegelschnitts* ist von ausserordentlicher Wichtigkeit; sie ist symmetrisch, d. h. die symmetrisch gegen die Diagonalreihe stehenden Elemente sind einander gleich, und ihre Unterdeterminanten sind:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22} a_{33} - a_{23}^2, & A_{23} &= A_{32} = a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}, \\ A_{22} &= a_{33} a_{11} - a_{31}^2, & A_{31} &= A_{13} = a_{21} a_{23} - a_{22} a_{13}, \\ A_{33} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2, & A_{12} &= A_{21} = a_{31} a_{32} - a_{33} a_{12}. \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen (5) ergibt nun, wenn wir ϱ für $\frac{A}{\sigma}$ setzen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varrho y_1 &= A_{11} v_1 + A_{21} v_2 + A_{31} v_3 \\ \varrho y_2 &= A_{12} v_1 + A_{22} v_2 + A_{32} v_3 \\ \varrho y_3 &= A_{13} v_1 + A_{23} v_2 + A_{33} v_3 , \end{aligned}$$

wodurch der Pol y einer Geraden v bestimmt ist. Um diesen Punkt auch zu construiren, haben wir in obiger Weise nur die Polaren von zwei Punkten der gegebenen Geraden zu suchen; der Pol der letzteren ist dann als Schnittpunkt jener beiden Polaren nach den oben ausgesprochenen Sätzen bestimmt. Die Gleichungen (6) können uns dazu dienen, den gegebenen Kegelschnitt als Curve zweiter Klasse, d. h. in Liniencoordinaten darzustellen. Wir haben oben gesehen, dass ein Punkt der Curve selbst auf seiner Polare liegt, und dass diese dann Tangente wird; die Gleichungen (5) zeigen uns nunmehr, dass dies auch *nur* für Punkte der Curve eintreten kann, denn die Bedingung:

$$(7)\qquad v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0 ,$$

welche man erhält, wenn man die Gleichungen (5) bez. mit y_1, y_2, y_3 multiplicirt und addirt, gibt wieder:

$$a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2\, a_{12} y_1 y_2 + 2\, a_{13} y_1 y_3 + 2\, a_{23} y_2 y_3 = 0 ,$$

d. h. der Punkt y liegt in der That auf dem Kegelschnitte. Bilden wir ebenso aus (6) die Bedingung für die vereinigte Lage von Pol und Polare, so erhalten wir eine Gleichung für die Coordinaten der letzteren; und dies ist, da die Polare, wenn die Bedingung erfüllt ist, zur Tangente wird, die Gleichung der Curve zweiter Ordnung in Liniencoordinaten; sie wird:

$$A_{11} u_1^2 + A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 + 2\, A_{12} u_1 u_2 + 2\, A_{13} u_1 u_3 + 2\, A_{23} u_2 u_3 = 0 .$$

Man erhält also die Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten, wenn man in seiner Gleichung in Punktcoordinaten die x_i bez. mit den u_i und die Coëfficienten mit den Unterdeterminanten der Determinante des Kegelschnitts vertauscht.

Wir können diese Gleichung übersichtlicher darstellen durch das Verschwinden *der „mit den u_i geränderten" Determinante*) A des Kegelschnittes:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

eine Gleichungsform, welche man direct erhalten kann, wenn man

---

*) Die geränderten Determinanten, welche für die symmetrische Durchführung mancher Rechnungen sehr wichtig sind, wurden von Hesse in die analytische Geometrie eingeführt.

die Gleichungen (5) zusammen mit (7) als ein System von vier in den Grössen ϱ, y_1, y_2, y_3 homogenen, linearen Gleichungen auffasst, und aus ihnen letztere Grössen eliminirt.

Die Anwendung des Satzes auf die uns bekannten einfachen Gleichungsformen für Ellipse und Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ergibt:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

also:

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$$

$$A_{11} = \mp \frac{1}{b^2}, \quad A_{22} = -\frac{2}{a^2}, \quad A_{33} = \pm \frac{1}{a^2 b^2}.$$

Es wird daher, nach Multiplication mit $a^2 b^2$, *die Gleichung der Ellipse in Liniencoordinaten:*

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

und *die der Hyperbel in Liniencoordinaten:*

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0.$$

Dagegen für die Parabel

$$y^2 - 2px = 0$$

wird:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

also:

$$A_{11} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = 0,$$

$$A_{22} = -p^2, \quad A_{13} = p,$$

und es ist die *Gleichung der Parabel in Liniencoordinaten:*

$$pv^2 - 2u = 0.$$

II. Beziehungen zur unendlich fernen Geraden. — Polardreiecke.

Sehen wir nunmehr, zu welchen Fragen die soeben durchgeführten Untersuchungen Veranlassung geben, wenn wir statt einer beliebigen Geraden der Ebene die unendlich ferne Gerade in ihren Beziehungen zu einem Kegelschnitte betrachten (vgl. p. 67). Indem wir dabei gleichzeitig das Gebiet unserer bisherigen Ueberlegungen erweitern, werden wir

Gelegenheit haben, allgemeinere, von dieser ausgezeichneten Geraden unabhängige Verhältnisse von fundamentaler Wichtigkeit zu berühren.

Es bietet sich zunächst von selbst eine Eintheilung der Curven zweiter Ordnung, für die $A \gtrless 0$ ist, je nachdem sie von der unendlich fernen Geraden in zwei rellen, in zwei imaginären oder in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten werden. Andere Fälle sind nicht möglich; und die angeführten werden uns dieselben Haupttypen dieser Curven wiedererkennen lassen, auf welche wir durch die einleitenden Aufgaben geführt wurden. Wir bezeichnen unter diesem Gesichtspunkte:

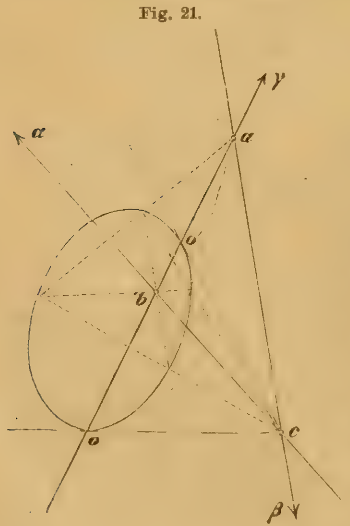
als *Ellipse* eine Curve, welche von der unendlich fernen Geraden in zwei imaginären Punkten geschnitten wird,

als *Hyperbel* eine Curve, welche von der unendlich fernen Geraden in zwei reellen Punkten geschnitten wird,

als *Parabel* eine Curve, welche von der unendlich fernen Geraden berührt wird.

Zu einer weiteren Eintheilung gibt die Frage nach dem Pole der unendlich fernen Geraden Veranlassung. Zieht man durch ihn eine beliebige Gerade, so muss diese durch den Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade harmonisch getheilt werden; der erwähnte Pol liegt also in der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten der Geraden mit der Curve, d. h. *der Pol der unendlich fernen Geraden halbirt alle durch ihn gehenden Sehnen.* Man nennt ihn deshalb den *Mittelpunkt der Curve zweiter Ordnung*, die durch ihn gehenden Sehnen heissen *Durchmesser der Curve.* Ist die unendlich ferne Gerade Tangente des Kegelschnittes, so liegt der Pol auf ihr, also auch unendlich fern. Wir unterscheiden demgemäss:

Fig. 21.



Curven mit Mittelpunkt: Ellipse und Hyperbel.

Curven ohne Mittelpunkt: Parabel.

Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf die Curven mit Mittelpunkt. Um hier weitere Relationen zwischen den Durchmessern zu erhalten, betrachten wir die unendlich ferne Gerade, als wenn sie im Endlichen läge, und übertragen dann nur die so erhaltenen Sätze. Es sei γ diese Gerade (vergl. Fig. 21) und c ihr Pol in Bezug auf die vorliegende Curve. Ist dann a ein Punkt auf γ, so liegt der Pol b der Linie ac ebenfalls auf γ und a ist der Pol der Linie bc. *Ein solches Dreieck, in welchem jede Ecke* (a, b, c)

der Pol der gegenüberliegenden Seite (α, β, γ) *ist, nennen wir ein Polardreieck.* Dasselbe enthält drei Willkürlichkeiten; nämlich die Wahl der ersten Ecke hängt von der Bestimmung *zweier* Constanten (der Coordinaten) ab; sind diese beliebig angenommen, so kann die zweite Ecke noch auf der Polare der ersten willkürlich gewählt werden, wird also durch *eine* weitere Constante bestimmt. Wir sprechen dies kürzer so aus: *Es gibt dreifach unendlich viele Polardreiecke zu einem gegebenen Kegelschnitte.* Um ein wirkliches Polardreieck zu erhalten, darf man nur niemals eine Ecke auf der Curve liegen oder eine Seite sie berühren lassen. Aus der Definition des Polardreiecks folgt nun unmittelbar:

Die von einer Ecke eines Polardreiecks ausgehenden Strahlen werden durch den Kegelschnitt und die gegenüberliegende Seite harmonisch getheilt; und dualistisch entsprechend: *Zieht man von einem Punkte der Seite eines Polardreiecks die beiden Tangenten an den Kegelschnitt, so sind diese harmonisch zu der Seite selbst und der Verbindungslinie des Punktes mit der gegenüberliegenden Ecke.* Unter diesen Strahlen sind auch jedesmal die durch die betreffende Ecke gehenden Seiten des Dreiecks selbst und die von ihr an die Curve gelegten Tangenten. Zwei Seiten des Dreiecks stehen zu einander also in ganz reciproker Beziehung: die eine (α) theilt die Strahlen durch b, die andere (β) die durch a harmonisch. *Man nennt daher zwei solche Geraden, bei denen der Pol der einen auf der andern liegt, conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt.*

Nehmen wir nun als eine Seite γ eines Polardreiecks die unendlich ferne Gerade, so gehen die andern beiden durch den Mittelpunkt c der Curve; sie sind dann *conjugirte Durchmesser* derselben. Man versteht darunter überhaupt *zwei Gerade, bei denen der unendlich ferne Punkt der einen der Pol der andern ist.* An Stelle der harmonischen Theilung tritt dann die Halbirung der betreffenden Sehnen, an Stelle der Strahlen durch a die Gesammtheit der zu β parallelen Geraden. Obigen Satz können wir daher folgendermassen aussprechen: Von zwei einander conjugirten Durchmessern *halbirt jeder die zu dem andern parallelen Sehnen, und die Tangenten in den Endpunkten eines jeden sind parallel zu den Sehnen, welche er halbirt.*

Zwei conjugirte Polaren sind immer harmonisch zu den beiden von ihrem Schnittpunkte an die Curve gelegten Tangenten, denn die Berührungspunkte der letzteren liegen harmonisch zu den Polen der beiden Polaren. In jedem Strahlbüschel kann man unter Benutzung dieser Bemerkung zu einer beliebigen Geraden die conjugirte Polare construiren. Ist der Punkt insbesondere der Mittelpunkt der Curve, so folgt:

Alle Paare conjugirter Durchmesser liegen harmonisch zu den beiden „Asymptoten" der Curve, d. h. zu den beiden Tangenten derselben in ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden.

Jedem Kegelschnitte, der einen Mittelpunkt hat, kommen zwei solche Asymptoten zu, die Verbindungslinien des Mittelpunktes c (vergl. Fig. 21 auf p. 80) mit den beiden unendlich fernen Punkten o und o'. Je nachdem die letzteren reell oder imaginär sind, sind es auch die Asymptoten; also nur bei der Hyperbel sind diese Linien wirklich zu zeichnen (vergl. p. 9). Für die Ellipse ist dies nicht der Fall; die angeführten Sätze gelten hier jedoch ebenso, da die analytischen Operationen dieselben sind. Lassen wir insbesondere den einen Durchmesser eines Paares in eine Asymptote hineinfallen, so fällt nach den Gesetzen der harmonischen Theilung auch der conjugirte Durchmesser in dieselbe Gerade; also: *Jede Asymptote ist ein sich selbst conjugirter Durchmesser.* Halbirt dagegen der eine Durchmesser den Winkel zwischen den beiden Asymptoten, so halbirt der andere als vierter harmonischer Strahl den Nebenwinkel, d. h. *Jede Curve zweiter Ordnung hat zwei zu einander rechtwinklige conjugirte Durchmesser, „die Hauptaxen der Curve."*

Die soeben angestellten Ueberlegungen zeigen deutlich, wie vortheilhaft die Einführung der unendlich fernen Geraden für die geometrische Betrachtung ist, indem wir gewisse metrische Beziehungen als besondere Fälle allgemeinerer Relationen erkannten. Auch in der analytischen Behandlung dieser Dinge werden uns im Folgenden die Vortheile der erwähnten Anschauungsweise entgegentreten. Um die gefundenen Beziehungen auch hier zu verwerthen, kehren wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurück, bei denen ja die unendlich ferne Gerade eine ausgezeichnete Stellung einnimmt. Wir setzen also

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1$$
$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = 1.$$

Alsdann werden die Gleichungen zwischen Pol und Polare:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varrho u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} & \sigma x &= A_{11}u + A_{12}v + A_{13} \\ \varrho v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} & \sigma y &= A_{21}u + A_{22}v + A_{23} \\ \varrho 1 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33} & \sigma 1 &= A_{31}u + A_{32}v + A_{33}, \end{aligned}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$, $A_{ik} = A_{ki}$, und wo vorausgesetzt wird, dass die Determinante der a_{ik} nicht verschwindet.

Die Abschnitte der unendlich fernen Geraden auf den Coordinatenaxen sind unendlich gross; daher verschwinden die negativen reciproken Werthe derselben, d. h. für die unendlich ferne Gerade ist:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Wegen (1) werden demnach *die Coordinaten ihres Poles, des Mittelpunktes* der Curve:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{32} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ \eta &= \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sollten A_{12}, A_{23}, A_{33} sämmtlich verschwinden, so würde auch $A = 0$ sein, was wir ausgeschlossen haben. Der Mittelpunkt ist also immer bestimmt; nur rückt er, wenn

$$A_{33} = 0 \tag{3}$$

ist, in's Unendliche; dies ist also *die Bedingung für die Parabel.*

Dieselbe Bedingung erhält man direct, indem man das Verhalten der unendlich fernen Geraden zur Curve untersucht; es ergeben sich so die *analytischen Criterien zur Unterscheidung von Ellipse, Hyperbel und Parabel.* Wir legen durch den Anfangspunkt eine beliebige Gerade, welche den Winkel α gegen die X-Axe bilden möge. Sie schneide die Curve in der Entfernung r vom Anfangspunkte; dann ist für diesen Schnittpunkt:

$$x = r \cos \alpha\,, \quad y = r \sin \alpha\,.$$

Die zugehörigen beiden Werthe von r ergeben sich, wenn wir mittelst dieser Gleichungen die Gleichung des Kegelschnittes:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0$$

umformen. Es wird dadurch:

$$\begin{aligned} &r^2 (a_{11} \cos^2 \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha) \\ &\quad + 2r (a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha) + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Legen wir umgekehrt r einen bestimmten Werth bei, so ergibt sich hieraus der zugehörige Winkel α, welcher übrigens reell oder imaginär ausfallen kann. Jedenfalls hat die Curve aber zwei unendlich ferne Punkte, und wir erhalten daher die nach ihnen gehenden Strahlen, d. h. die Asymptoten der Curve, wenn wir $r = \infty$ setzen. Dadurch wird die Gleichung (4):

$$a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha = 0\,,$$

also

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}}\,. \tag{5}$$

Die beiden Asymptoten sind demnach reell, imaginär oder zusammenfallend, je nachem A_{33} negativ, positiv oder Null ist. Wir haben also die folgenden Kennzeichen für die uns bekannten Kegelschnitte:

$$A_{33} > 0 : \textit{Ellipse},$$
$$A_{33} = 0 : \textit{Parabel},$$
$$A_{33} < 0 : \textit{Hyperbel}.$$

Die Bedingung für die Parabel ist somit in der That mit der oben gefundenen identisch; man erhält dieselbe endlich auch, wenn man von der Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten ausgeht. Diese ist:

$$A_{11}u^2 + A_{22}u^2 + 2A_{12}\,uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0$$

Soll die Curve von der unendlich fernen Geraden berührt werden, so muss diese Gleichung für $u = 0$ und $v = 0$ erfüllt sein, und wir erhalten wieder die Bedingung:

$$A_{33} = 0.$$

Durch (5) sind uns zunächst nur die Richtungen der Asymptoten gegeben; da dieselben aber durch den Mittelpunkt gehen müssen, so sind sie dadurch völlig bestimmt. Wir können also auch ihre Gleichungen unmittelbar aufstellen. Um die beiden ihnen parallelen Geraden durch den Anfangspunkt zu finden, brauchen wir nur die höchsten Terme der Gleichung in Punktcoordinaten gleich Null zu setzen:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \tag{6}$$

denn es folgt daraus wieder:

$$\frac{y}{x} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}} = \operatorname{tang}\alpha, \tag{7}$$

und dies sind dann die Gleichungen der beiden Linien. Diese Bestimmung kommt darauf hinaus, dass man die Verhältnisse der Coordinaten ihrer unendlich fernen Punkte aufsucht. Machen wir nämlich die Gleichung der Curve für den Augenblick wieder homogen, indem wir $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ statt x, y setzen, so erhalten wir die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der unendlich fernen Geraden, wenn wir $x_3 = 0$ nehmen; dies gibt aber gerade die Gleichung (6). Die Asymptoten selbst ergeben sich, wenn man die Gleichung der zu den Geraden (7) parallelen Linien sucht, die durch den Mittelpunkt ξ, η gehen, eine Aufgabe, welche wir früher gelöst haben (vergl. p. 26). Unmittelbar werden sie durch (7) dargestellt, wenn der Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Letzteres ist der Fall bei den Gleichungsformen der Kegelschnitte, auf die wir bei Behandlung der einleitenden Aufgaben geführt wurden, und die wir dort als Ellipse und Hyperbel bezeichnet haben, nämlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Es ist hier für die Ellipse:

$$A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2}, \text{ also } > 0$$

für die Hyperbel:

$$A_{33} = -\frac{1}{a^2 b^2}, \text{ also } < 0.$$

*Unter den nach ihren Beziehungen zur unendlich fernen Geraden als Ellipse und Hyperbel bezeichneten Curven sind also jedenfalls die früher so genannten enthalten.**) Die Gleichung (6), welche das Product der Asymptoten darstellte, zerfällt hier unmittelbar in zwei lineare Factoren; wir erhalten für die Asymptoten der Ellipse:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

für die der Hyperbel:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Für die früher als Parabel bezeichnete Curve

$$y^2 = 2px = 0$$

haben wir:

$$A_{33} = 0,$$

wie es auch nach unserer neuen Definition sein muss. Dieselbe hat keinen Mittelpunkt und in Folge dessen auch keine eigentlichen Asymptoten. Die Gleichung (6) gibt uns vielmehr nur die doppelt zählende Richtung nach dem einen unendlich fernen Punkte, indem sie übergeht in

$$y^2 = 0.$$

Wir wollen nun im allgemeinen Falle ebenfalls den Mittelpunkt als Anfangspunkt einführen und dann insbesondere zwei conjugirte Durchmesser zu Coordinatenaxen wählen. Ueber die Form der so entstehenden Kegelschnittgleichung können wir uns im Voraus eine Vorstellung machen, wenn wir von einem beliebig gelegenen Polardreiecke ausgehen. Ein solches haben wir dadurch charakterisirt, dass jede Seite Polare der gegenüberliegenden Ecke sein soll.

Setzen wir nun in der allgemeinen Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

etwa $x_3 = 0$, so gibt der übrig bleibende Theil derselben:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0$$

das Product der beiden Geraden, welche die Schnittpunkte der Curve

*) Dass beide Definitionen auch völlig identisch sind, wird sich im Folgenden ergeben.

und der Seite $x_3 = 0$ mit der gegenüberliegenden Ecke verbinden. Diese Gleichung wird dann in zwei lineare Factoren von der Form

$$x_1 - l x_2 = 0$$

und

$$x_1 - m x_2 = 0$$

zerfallen. Soll nun das Coordinatendreieck ein Polardreieck sein, so müssen diese Linien, welche den Pol mit den Schnittpunkten von Curve und Polare verbinden, Tangenten des Kegelschnittes sein, also harmonisch gegen die durch ihren Schnittpunkt gehenden Seiten des Coordinatendreiecks liegen. Es folgt daraus:

$$m = - l,$$

so dass die Gleichung des Productes der beiden Strahlen von der Form wird:

$$x_1^2 - l^2 x_2^2 = 0.$$

Soll letztere nun mit der Gleichung:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_1^2$$

identisch sein, so darf also in der Kegelschnittgleichung bei dieser Coordinatenbestimmung ein Glied $2 a_{12} x_1 x_2$ nicht vorkommen. Genau dieselben Ueberlegungen lassen sich für die andern beiden Ecken des Dreiecks anstellen; auch die Glieder mit $x_1 x_3$ und $x_2 x_3$ müssen fortfallen: *die Gleichung des Kegelschnitts enthält nur noch die Quadrate.* Sie wird:

$$(8) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0,$$

und in diese Form ist sie auf dreifach unendlich viele Arten zu bringen, da die Wahl des Polardreicks von drei Willkürlichkeiten abhängt. Dieselbe Gestalt muss auch übrig bleiben, wenn $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade wird, und die beiden anderen Seiten demnach zu conjugirten Durchmessern werden. Wir haben dann nur zu setzen:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1.$$

Um den Uebergang von der allgemeinen Gleichungsform zu der eben erwähnten wirklich durchzuführen, verlegen wir zunächst den Anfangspunkt in den Mittelpunkt. Alsdann werden die X- und Y-Axe harmonisch von der Curve und der unendlich fernen Geraden geschnitten; es fallen also die Glieder mit $x_1 x_3$ und $x_2 x_3$ oder mit x und y schon heraus, und es bedarf nachher nur noch einer Drehung des Coordinatensystems.

Setzen wir zu dem Zwecke:

$$x_1 = x = x' + \xi$$
$$x_2 = y = y' + \eta$$
$$x_3 = 1,$$

wo

$$\xi = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad \eta = \frac{A_{23}}{A_{33}}$$

die Coordinaten des Mittelpunktes sind, so wird nach den Gesetzen der Determinantentheorie:

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13} &= 0 \\ a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23} &= 0 \\ a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33} &= \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} \\ &= \frac{A}{A_{33}}. \end{aligned}$$

Daher hat man:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= a_{11}x' + a_{12}y' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= a_{21}x' + a_{22}y' \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= a_{31}x' + a_{32}y' + \frac{A}{A_{33}}. \end{aligned}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen nun links bez. mit x, y, 1, rechts mit $x' + \xi$, $y' + \eta$, 1 und addiren, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichungen (9) zwei verschiedene Ausdrücke für die linke Seite der Curvengleichung, und diese selbst wird ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$):

$$(10)\qquad 0 = \Sigma\, a_{ik}x_i x_k = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2\,a_{12}x'y' + \frac{A}{A_{33}}.$$

Es sind die Terme mit x', y' fortgefallen, während die ersten Glieder sich nicht geändert haben. Natürlich müssen wir hier den Fall der Parabel ($A_{33} = 0$), wie es ja auch oben geschah, ausschliessen, da für sie das letzte Glied unendlich gross wird und (geometrisch) ihr Mittelpunkt unendlich weit liegt. Das Verschwinden der Determinante A dagegen würde uns nicht hindern, die analytischen Operationen in derselben Weise durchzuführen; nur die geometrische Bedeutung derselben wird eine andere; wir werden darauf später zurückkommen.

Zur Vereinfachung unserer Gleichung geben die conjugirten Durchmesser naturgemässe schiefwinklige Coordinatensysteme. Wir wollen daher zunächst die analytische Bedingung für ein solches Durchmesserpaar aufstellen. Nehmen wir die Gleichung der Curve in der reducirten Form:

$$(10)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

an, so wird die Bedingung, dass ein Punkt x, y auf der Polare eines Punktes x', y' liegt, ausgedrückt durch:

$$Q = a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{12}(xy' + yx') + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Sollen diese Punkte unendlich fern liegen und so die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser angeben, so müssen r, r' unendlich gross werden, wenn man setzt:

$$x = r\cos\alpha\,,\quad x' = r'\cos\alpha'$$
$$y = r\sin\alpha\,,\quad y' = r'\sin\alpha'.$$

Die Gleichung (10) geht dadurch für $r = r' = \infty$ über in:

$$0 = a_{11}\cos\alpha\cos\alpha' + a_{12}(\cos\alpha\sin\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha') + a_{22}\sin\alpha\sin\alpha'.$$

Zwischen den Richtungswinkeln α, α' von zwei conjugirten Durchmessern besteht also die Gleichung:

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{a_{11} + a_{12}\operatorname{tang}\alpha}{a_{12} + a_{22}\operatorname{tang}\alpha}.$$

Für $\alpha = \alpha'$ geht hieraus wieder die Bedingung (5) für den Winkel einer Asymptote gegen die X-Axe hervor; und in der That haben wir gesehen, dass eine Asymptote als sich selbst conjugirter Durchmesser aufgefasst werden kann.

Zunächst liegt die schon früher berührte Frage nahe, ob es unter den Paaren conjugirter Durchmesser ein solches giebt, in welchem der eine zum andern rechtwinklig ist. Die Möglichkeit dieses Falles haben wir schon oben erkannt; wir werden aber auch nachweisen, dass es immer nur ein reelles System der Art gibt.

Da dann $\alpha' = 90^0 + \alpha$ sein muss, wird die Gleichung (11):

$$(12)\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Die Werthe von α, welche sich hieraus ergeben:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \qquad \alpha = \frac{\beta}{2} + 90^0$$
$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 180^0 \qquad \alpha = \frac{\beta}{2} + 270^0 \qquad \left(\beta = \operatorname{artg}\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right),$$

unterscheiden sich nur um rechte Winkel; sie geben also immer dasselbe System, nur in seinen verschiedenen Beziehungsweisen; d. h. *es gibt immer ein und nur ein System zu einander rechtwinkliger conjugirter Durchmesser.* Wir bezeichnen sie als *die Hauptaxen des Kegelschnitts.*

Der einzige, hier mögliche Ausnahmefall tritt ein, wenn gleichzeitig

$$a_{11} - a_{22} = 0$$

und

$$a_{12} = 0$$

ist. Die Gleichung (10) des Kegelschnittes hat dann die Form:

$$x^2 + y^2 = \text{Const.};$$

sie stellt also einen Kreis dar. Für ihn wird der Winkel α unbestimmt; es gibt also unendlich viele Paare conjugirter Durchmesser, welche zu einander rechtwinklig stehen, und in der That tritt dies beim Kreise *immer* ein.

Um die durch (12) bestimmten conjugirten Durchmesser nunmehr wirklich als Coordinatenaxen einzuführen, setzen wir (vgl. p. 61):

$$
(13) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}
$$

Durch diese Substitution muss die Gleichung der Curve nach unseren obigen Bemerkungen von der Form (8) werden, wenn man darin $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ setzt. Es muss also in der reducirten Form

$$
(10) \qquad a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y + \frac{A}{A_{33}} = 0
$$

auch das Glied mit xy herausfallen, und dies ist in der That der Fall. Führen wir nämlich die Substitution (13) aus, so wird der Coëfficient von xy in der neuen Gleichung:

$$
\cos \alpha \, (a_{22} \sin \alpha + a_{12} \cos \alpha) - \sin \alpha \, (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha),
$$

und dies verschwindet wegen (11), wo wir $\alpha = \alpha' + 90^0$ zu setzen haben. Wir können also setzen:

$$
(14) \qquad \frac{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}{\sin \alpha} = \lambda,
$$

oder:

$$
\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + \qquad a_{12} \sin \alpha &= 0 \\ a_{12} \cos \alpha + (a_{12} - \lambda) \sin \alpha &= 0. \end{aligned}
$$

Wenn wir aus diesen Gleichungen $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ eliminiren, so werden wir auf eine sehr wichtige quadratische Gleichung für λ geführt, deren Wurzeln unmittelbar die Coëfficienten von x'^2 und y'^2 in der transformirten Gleichung darstellen. Die erwähnte Elimination ergibt nämlich:

$$
(15) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,
$$

oder entwickelt:

$$
\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0.
$$

Sind λ, μ die Wurzeln dieser Gleichung, so entspricht einer jeden von ihnen nach (14) ein Werth von α; und beide Werthe können sich nur um 90^0 von einander unterscheiden, wenn das Glied mit xy fortfallen soll. Für μ haben wir daher die Relationen:

$$
\begin{aligned} a_{11} \sin \alpha - a_{12} \cos \alpha &= \quad \mu \sin \alpha \\ a_{12} \sin \alpha - a_{22} \cos \alpha &= -\mu \cos \alpha. \end{aligned}
$$

Diese Gleichungen liefern zusammen mit den Gleichungen (14):

$$
\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha &= \lambda \cos \alpha \\ a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= \lambda \sin \alpha \end{aligned}
$$

die zur Ausführung der Transformation nöthigen Hülfsmittel. Wir multipliciren die erste und zweite bez. mit x und y und addiren; dies gibt wegen (13):

$$(a_{11} \sin \alpha - a_{12} \cos \alpha)\, x + (a_{12} \sin \alpha - a_{22} \cos \alpha)\, y = -\mu y';$$

und wenn man ebenso mit der dritten und vierten Gleichung verfährt, erhält man:

$$(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha)\, x + (a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha)\, y = \lambda x'.$$

Multipliciren wir weiter die erste der beiden letzten Gleichungen mit

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

die zweite mit

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

so findet man durch Subtraction beider:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 = \lambda x'^2 + \mu y'^2;$$

und also ist die Gleichung des Kegelschnitts in der transformirten Form:

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{16}$$

In der That geben uns demnach die Wurzeln der Gleichung (15) *die Coëfficienten der neuen Gleichung.* Diese Bestimmung derselben bleibt auch noch für den oben erwähnten Ausnahmefall gültig, wo $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$.

Die beiden Wurzeln λ, μ müssen aber auch immer reell sein; denn wir haben oben gesehen, dass es, so lange nicht $A = 0$, oder $A_{33} = 0$ ist, immer ein Paar reeller Hauptaxen gibt. Wir können dies auch einfach in folgender Weise nachweisen: Die Auflösung der Gleichung (15) gibt:

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}.$$

Hier steht unter dem Wurzelzeichen die Summe von zwei Quadraten, also stets ein positiver Ausdruck, so lange wir die Coëfficienten der Kegelschnittgleichung als reelle Grössen voraussetzen.

Untersuchen wir nunmehr näher, welche Curven in der Gleichungsform (16) enthalten sind. Wir können dieselbe in der Form:

$$\frac{x'^2}{-\frac{A}{\lambda A_{33}}} + \frac{y'^2}{-\frac{A}{\mu A_{33}}} = 1$$

schreiben, und erhalten dann unmittelbar eine Eintheilung der betreffenden Curven, welche im Wesentlichen mit unserer früheren übereinstimmt (vergl. p. 85). Das Product der Nenner:

$$\frac{A^2}{\lambda \cdot \mu A_{33}^2}$$

hat nämlich immer dasselbe Vorzeichen, wie das Product $\lambda\mu$. Das letztere ist nun identisch mit A_{33}, denn λ, μ sind die Wurzeln der Gleichung (15); d. h. es ist

$$\lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}.$$

Theilen wir also die Curven nach dem Vorzeichen des Products der Coëfficienten von x^2 und y^2 ein, so ist dies dasselbe, als ob wir, wie oben, nach dem Vorzeichen von A_{33} eintheilten. Die hier möglichen Fälle sind im Folgenden zusammengestellt:

I) $A_{33} > 0$; λ, μ haben gleiche Zeichen.

1) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = b^2$: *Ellipse*,

2) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = -a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = -b^2$: *Imaginäre Ellipse.*

II) $A_{33} < 0$; λ, μ haben ungleiche Zeichen.

1) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = -b^2$: *Hyperbel*, welche von der X-Axe in reellen Punkten getroffen wird.

2) $-\frac{A}{\lambda A_{33}} = -a^2, \quad -\frac{A}{\mu A_{33}} = b^2$: *Hyperbel*, welche von der Y-Axe in reellen Punkten getroffen wird.

Die beiden letzteren Curven sind nur durch die Bezeichnung der Coordinatenaxen von einander verschieden. Wir haben also nur drei Fälle zu unterscheiden, von denen uns die der beiden reellen Curven schon bekannt waren, *und es gibt keine anderen Kegelschnitte mit Mittelpunkt.* Auf die imaginäre Ellipse werden wir im Folgenden nicht weiter eingehen; es mag hier nur darauf hingewiesen werden, dass ihr Mittelpunkt sowohl, wie ihre Hauptaxen reell sind, dass sie hingegen keinen reellen Punkt hat; die Polare, welche sie einem reellen Punkte zugeordnet, ist aber jedesmal reell.

Die Hauptaxen, auf welche sich in den letzten Untersuchungen unser Interesse vorwiegend richtete, sind nur ein besonders ausgezeichnetes Paar von conjugirten Durchmessern; es liegt daher nahe, das behandelte Problem zu dem folgenden zu erweitern: *Es sollen mit Hülfe solcher conjugirter Durchmesser derartig schiefwinklige (nicht homogene) Coordinaten eingeführt werden, dass die Curvengleichung eine möglichst einfache wird.* Als Ausgangspunkt dient uns dabei die nunmehr gewonnene einfache Gleichungsform:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

welche zunächst allerdings nur eine reelle Ellipse darstellt. Wir brauchen aber die folgenden Erörterungen nur für diese durchzuführen; die entsprechenden Resultate für die Hyperbel ergeben sich dann einfach, wenn wir b durch $b \cdot \sqrt{-1}$ ersetzen.

Da ein Paar conjugirter Durchmesser immer mit der unendlich fernen Geraden zusammen ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt bildet, so kann durch Einführung derselben als Axen eines schiefwinkligen Coordinatensystems die Form der Gleichung (1) nicht geändert werden. Wir führen die neuen Coordinaten nach früheren Ausführungen (vergl. p. 61) ein mittelst der Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta, \end{aligned}$$

wo

$$(3) \qquad \beta - \alpha = u$$

gleich dem Winkel ist, welchen die betreffenden conjugirten Durchmesser einschliessen. Die Gleichung (1) geht durch diese Substitution über in:

$$(4) \qquad \frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} - 1 = 0,$$

denn der Coëfficient von $x'y'$ muss nach einer oben gemachten Bemerkung verschwinden, d. h. es ist:

$$(5) \qquad \frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0.$$

Die Grössen p und q in (4) dagegen sind definirt durch die Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{p^2} &= \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \\ \frac{1}{q^2} &= \frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2}. \end{aligned}$$

Ihre geometrische Bedeutung ist unmittelbar klar: *p und q sind die Längen der beiden conjugirten Durchmesser* (gemessen vom Anfangspunkte bis zum Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte). Setzen wir nämlich $x' = 0$, so wird

$$y'^2 = q^2$$

und ebenso für $y' = 0$:

$$x'^2 = p^2.$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen uns also diese Längen aus denen der Hauptaxen berechnen; (5) dagegen ist die Form, welche die zwischen zwei conjugirten Durchmessern bestehende Relation (Gleichung (11) auf p. 88) bei unserer Coordinatenwahl annimmt. Die Winkel α, β sind durch (3) an den von den conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel gebunden; um sie bei gegebenem u direct zu

berechnen, verfahren wir folgendermassen. Wir haben die Gleichungen:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos u$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0,$$

und daraus folgt:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\cos u$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{-b^2}{a^2 - b^2}\cos u,$$

also, wenn man subtrahirt:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cos u. \tag{7}$$

Diese Gleichung gibt zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe $\pm v$ für $\alpha+\beta$; und daraus folgt wegen (3):

$$\alpha = \frac{-u \pm v}{2}$$

$$\beta = \frac{u \pm v}{2}.$$

Wir erhalten demnach, wie es bei der Symmetrie der Curve gegen die Hauptaxen zu erwarten war, zwei Systeme von conjugirten Durchmessern, deren eines das Spiegelbild des andern in Bezug auf die Hauptaxen ist, denn der zweite Werth von β ist dem ersten von α, der zweite von α dem ersten von β gleich und entgegengesetzt.

Bei der Ellipse sind diese Lösungen jedoch nur reell, so lange:

$$\cos u \overline{<} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Wir erhalten hier also eine Grenze für den Winkel u: der kleinste Winkel, welchen die conjugirten Durchmesser bilden können, ist bestimmt durch:

$$\cos u = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

woraus man findet:

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \frac{b}{a}.$$

Die beiden conjugirten Durchmesser sind dabei in diesem Falle die Diagonalen des der Ellipse parallel zu den Hauptaxen umgeschriebenen Rechtecks; ihr Winkel wird von den Hauptaxen halbirt. Es ist hier ferner:

$$\cos(\alpha+\beta) = 1,$$

also:

$$\alpha + \beta = 0,$$

d. h. die beiden so bestimmten Durchmesser sind zu sich selbst symmetrisch gegen die Hauptaxen.

Bei der Hyperbel findet sich ein derartiger Grenzfall nicht. Hier wird:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos u,$$

es tritt also keinerlei Beschränkung ein, denn es ist stets $b^2 < a^2$. Wir wissen, dass sogar der Werth 0 für u vorkommen kann, denn eine jede Asymptote ist ja ein sich selbst conjugirter Durchmesser.

Ein eleganter zweiter Weg zur Lösung der behandelten Aufgabe, analog dem bei den Hauptaxen eingeschlagenen, besteht in der directen Aufsuchung von p^2 und q^2, indem wir für sie eine quadratische Gleichung aufstellen. Für p, q, α, β hatten wir die Gleichungen (5) und (6):

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

$$0 = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}$$

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2}.$$

Multipliciren wir die erste und zweite Gleichung einmal bez. mit $\sin\beta$, $-\sin\alpha$, und ein zweites Mal bez. mit $-\cos\beta$, $\cos\alpha$ und addiren, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{\sin\beta}{p^2} = \frac{\cos\alpha}{a^2}\sin u$$

$$-\frac{\cos\beta}{p^2} = \frac{\sin\alpha}{b^2}\sin u.$$

Ebenso ergibt sich aus der zweiten und dritten Gleichung, wenn man dieselben bez. mit $\sin\beta$, $-\sin\alpha$ und dann bez. mit $-\cos\beta$, $\cos\alpha$ multiplicirt und addirt:

$$-\frac{\sin\alpha}{q^2} = \frac{\cos\beta}{a^2}\sin u$$

$$\frac{\cos\alpha}{q^2} = \frac{\sin\beta}{b^2}\sin u.$$

Bildet man ferner aus den letzten vier Gleichungen das Product der ersten und vierten, sowie das der zweiten und dritten und subtrahirt diese Producte von einander, so findet man:

$$p^2 q^2 \sin^2 u = a^2 b^2. \tag{8}$$

Wir können dieser Formel eine einfache geometrische Deutung geben. Es ist nämlich $4\,ab$ gleich dem Inhalte des Rechteckes, welches parallel zu den Hauptaxen, der Ellipse umgeschrieben werden kann; $4\,pq\sin u$ dagegen der Inhalt des der Curve, parallel zu den Durchmessern p, q umgeschriebenen Parallelogramms. Die Gleichung (8) sagt demnach aus:

Ein dem Kegelschnitte umgeschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten zu zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, hat constanten Inhalt.

Schreiben wir nun die aus (5) und (6) abgeleiteten Gleichungen in der Form:

$$a^2 \sin\beta = \quad p^2 \cos\alpha \sin u, \qquad b^2 \cos\beta = -p^2 \sin\alpha \sin u,$$
$$a^2 \sin\alpha = -q^2 \cos\beta \sin u, \qquad b^2 \cos\alpha = \quad q^2 \sin\beta \sin u,$$

und multipliciren wir die links stehenden bez. mit $\cos\alpha$, $-\cos\beta$ und die rechts stehenden bez. mit $-\sin\alpha$, $\sin\beta$, so ergibt sich durch Addition:

$$(9) \qquad \begin{aligned} a^2 &= p^2 \cos^2\alpha + q^2 \cos^2\beta \\ b^2 &= p^2 \sin^2\alpha + q^2 \sin^2\beta. \end{aligned}$$

Und hieraus folgt unmittelbar:

$$(10) \qquad p^2 + q^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. *die Quadratsumme der Längen von zwei conjugirten Durchmessern ist constant.* Die Gleichungen (8) und (9) lassen uns p^2 und q^2 als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung erkennen, und zwar der folgenden:

$$(11) \qquad z^2 - (a^2 + b^2)\, z + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 u} = 0.$$

Kennt man also die Hauptaxen der Curve, so gibt diese Gleichung für jeden Werth von u die Quadrate der zugehörigen conjugirten Durchmesser. Es wird nämlich:

$$p^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b^2}{\sin^2 u}}$$
$$q^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b^2}{\sin^2 u}}.$$

Diese Ausdrücke sind in dieser Form ganz ähnlich denen, welche wir aus der Gleichung

$$(a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{12}{}^2 = 0$$

für die Quadrate der reciproken Werthe der Hauptaxen erhielten. Sind auf diesem Wege p^2 und q^2 bestimmt, so ergeben sich die Winkel α und β aus (9); man findet:

$$\cos^2\alpha = \frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \qquad \cos^2\beta = \frac{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{p^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}, \qquad \sin^2\beta = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

Die Gleichung (11) lehrt, dass bei der Ellipse p^2 und q^2, so lange sie

überhaupt reell sind (d. h. so lange u die gegebene untere Grenze nicht überschreitet), stets positive Werthe haben. Bei der Hyperbel dagegen ($-b^2$ statt b^2) ist ein Werth immer negativ, der andere positiv; der eine Durchmesser schneidet also die Hyperbel in zwei imaginären, der conjugirte Durchmesser in zwei reellen Punkten. Ihre Richtungen hingegen, d. h. die Winkel α, β sind immer reell, da u hier keiner Beschränkung unterworfen ist. Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ein Paar conjugirter Durchmesser, hat also die Form:

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1 .$$

Mithin gilt allgemein der Satz: *Die Curvengleichung, bezogen auf conjugirte Durchmesser, ist immer von der Form der Hauptaxengleichung,* d. h. die Vorzeichen der Coëfficienten von x^2 und y^2 sind dieselben in beiden Gleichungsformen. —

Bei der Hyperbel gibt es noch ein anderes, nahe liegendes, reelles Coordinatensystem, durch dessen Einführung ihre Gleichung sehr einfach wird, *das der Asymptoten.* Für die Ellipse ist die Einführung dieses Systems nicht so wichtig, da bei ihr die Asymptoten imaginär sind, wir also den Variabeln complexe Werthe beilegen müssten, um reelle Punkte der Curve darzustellen.

Sind α, β, die Winkel der beiden Asymptoten gegen die X-Axe, wo also $\beta = 180^0 - \alpha$, und ist die Hyperbel durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben, so sind die anzuwendenden Transformationsformeln:

$$x = x' \cos\beta + y' \cos\alpha$$
$$y = x' \sin\beta + y' \sin\alpha .$$

Nun ist aber

$$\tang \alpha = \frac{b}{a},$$

also:

$$\cos\alpha = -\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

wir müssen daher setzen:

$$x = \frac{a\,(y' - x')}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$y = \frac{b\,(x' + y')}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

Durch diese Substitution erhält die Curvengleichung die einfache Gestalt:

$$-\frac{4x'y'}{a^2+b^2} = 1 ;$$

eine Gleichung, welche den folgenden Satz begründet:

Zieht man durch einen Punkt der Hyperbel Parallele zu den beiden Asymptoten, so hat das von diesen Parallelen und den Asymptoten eingeschlossene Parallelogramm constanten Inhalt. —

Es bleibt uns noch übrig, in ähnlicher Weise die Kegelschnitte, für welche $A_{33} = 0$ ist, d. h. diejenigen ohne Mittelpunkt, die *Parabeln*, zu behandeln. Ihre Gleichung nehmen wir in der allgemeinen Form:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

an, wo:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Es müssen nun, wenn wir nur reelle Elemente in Betracht ziehen, a_{11} und a_{22} dieselben Vorzeichen haben, damit ihr Product gleich einem Quadrate werde, und wir können setzen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \quad m \sin^2\alpha \\ a_{22} &= \quad m \cos^2\alpha \\ a_{12} &= -m \sin\alpha . \cos\alpha , \end{aligned}$$

wodurch die Bedingung $A_{33} = 0$ identisch erfüllt wird. Es ist hier α bis auf eine Periode π bestimmt durch:

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

und m ergibt sich dann aus den Substitutionsgleichungen. Durch Anwendung der letzteren geht die Gleichung der Parabel über in:

$$(12) \qquad m(x \sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

In ihr bilden also die Glieder höchster Dimension das vollständige Quadrat eines linearen Ausdrucks; und dies ist charakteristisch für die Parabel.

Um die geometrische Bedeutung der Richtung α zu erkennen, drehen wir das Coordinatensystem so, dass diese Richtung parallel zu einer Axe wird. Dazu dienen die folgenden Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha . \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curve geht dann über in:

$$(13) \qquad my'^2 + 2px' + 2qy' + a_{33} = 0,$$

wo:

$$\begin{aligned} p &= \quad a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha \\ q &= -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha . \end{aligned}$$

Die Gleichung (13) können wir auch in der Form schreiben:

$$m\left(y' + \frac{q}{m}\right)^2 + 2p\left(y' + \frac{a_{33}}{2p} - \frac{q^2}{2m}\right) = 0.$$

Setzt man also:

$$y' + \frac{q}{m} = y'', \quad y' + \frac{a_{33}}{2p} = \frac{q^2}{2m} - y'',$$

so erhält man die *Gleichung der Parabel in der bekannten Form:*

$$my''^2 + 2px'' = 0, \tag{14}$$

welche wir schon in den einleitenden Aufgaben betrachtet haben. Der neue Anfangspunkt liegt auf der Curve, und diese selbst liegt symmetrisch gegen die Axe $y'' = 0$. Die Richtung α ist die dieser Axe, d. h. die Richtung nach dem einen unendlich fernen Punkte der Parabel. Wir sehen somit, *dass jeder Kegelschnitt, welcher die unendlich ferne Gerade berührt, eine Parabel in dem früheren Sinne ist.*

Zu dem soeben benutzten rechtwinkligen Coordinatensysteme steht ein anderes schiefwinkliges in ähnlicher Beziehung, wie das System eines Paares conjugirter Durchmesser zu den Hauptaxen bei den Kegelschnitten mit Mittelpunkt: Wir können den unendlich fernen Punkt der Parabel als ihren Mittelpunkt auffassen und wollen somit unter Durchmessern derselben alle durch diesen Punkt gehende Geraden verstehen, d. h. alle Parallelen zur Axe der Parabel. Fixiren wir nun einen anderen Punkt der unendlich fernen Geraden und ziehen alle durch ihn gehende Parallellinien, so müssen diese durch die Polare jenes Punktes und durch die Parabel harmonisch getheilt werden. Die Polare konnten wir allgemein als die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte der von ihrem Pole an die Curve gehenden Tangenten definiren. In unserem Falle ist nun die eine Tangente die unendlich ferne Gerade selbst, und die andere läuft parallel zu dem Sehnensysteme, welches wir durch den unendlich fernen Punkt gelegt hatten. Die Polare des letzteren ist somit diejenige Linie, welche durch den Berührungspunkt der letztgenannten Tangente parallel zur Axe der Curve (d. h. nach dem unendlich fernen Punkte der Parabel) gezogen werden kann; und der Satz von der harmonischen Theilung geht über in den folgenden:

Jedes System paralleler Sehnen wird halbirt von einer Geraden, welche durch den Berührungspunkt der diesen Sehnen parallelen Tangente parallel zur Axe der Parabel verläuft. Ausgenommen sind dabei natürlich diejenigen Sehnen, welche selbst zur Axe parallel verlaufen. Wählen wir insbesondere die Richtung des parallelen Sehnensystems senkrecht zur Curvenaxe, so ist diese Axe selbst die halbirende Gerade.

Führen wir nun ein neues Coordinatensystem ein, gebildet aus einer Tangente der Curve und einer durch ihren Berührungspunkt gezogenen Parallelen zur Axe (wobei die Linien den Winkel β einschliessen

mögen), so wird dadurch die Form der Parabelgleichung ebensowenig geändert, wie die der Curven mit Mittelpunkt durch Einführung eines Paares conjugirter Durchmesser als Coordinatenaxen. Gehen wir nämlich von der Gleichung

$$y^2 = 2px$$

aus, und ist a, b ein Punkt der Parabel, so sind die Transformationsgleichungen, welche diesen Punkt zum Anfangspunkte des neuen Coordinatensystems machen:

$$x = x' + y' \cos\beta + a$$
$$y = \ y' \sin\beta + b\,.$$

Nach Ausführung dieser Substitution geht die Gleichung der Curve wegen

$$b^2 = 2pa$$

über in:

$$y'^2 \sin^2\beta + 2y'b\sin\beta - 2px' - 2py'\cos\beta = 0.$$

Diese Gleichung darf jedoch y' nur im Quadrate enthalten, denn jede zur Y'-Axe gezogene Parallele muss durch die X'-Axe und die Curve halbirt werden, wir müssen also β so wählen, dass

$$b\sin\beta = p\cos\beta$$

oder

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{p}{b}\,.$$

Dann wird aber die Gleichung der Parabel:

$$y'^2 = \frac{2px'}{\sin^2\beta}\,,$$

also in der That von derselben Form, wie unsere Normalgleichung für diese Curve.

III. Das Linienpaar.

Die Transformation, durch welche wir die Parabelgleichung (1) auf die Form (14) zurückführten, hat in *der* Gestalt nur eine Bedeutung, so lange,

$$p = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha$$

von Null verschieden ist. Ist dagegen

$$p = 0\,,$$

so erhalten wir:

$$(1)\qquad my'^2 + 2qy' + a_{33} = 0\,,$$

d. h. die Curve besteht aus zwei geraden Linien

$$y' - r = 0$$

und

$$y' - s = 0\,,$$

wo r und s die Wurzeln von (1) sind, und diese Linien sind der X'-Axe parallel. Ist insbesondere $r = s$, so wird die Curve durch eine doppelt zählende Gerade dargestellt. Der Fall $p = 0$ entspricht nun der Bedingung, dass die Determinante A des Kegelschnitts verschwinde. Die Gleichung des letzteren ist nämlich hier:

$$m(x \sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

also wird:

$$A = \begin{vmatrix} m\sin^2\alpha & -m\sin\alpha\cos\alpha & a_{13} \\ -m\sin\alpha\cos\alpha & m\cos^2\alpha & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

und diese Determinante verschwindet in der That; denn multipliciren wir die erste Horizontalreihe mit $\cos\alpha$ und addiren dazu die zweite, multiplicirt mit $\sin\alpha$, so verschwinden alle Glieder der ersten Reihe. Wir wollen nun zeigen, *dass überhaupt ein Kegelschnitt, dessen Determinante verschwindet, in ein Linienpaar zerfällt.* Der Schnittpunkt der beiden Geraden des Paares wird jedoch im Allgemeinen im Endlichen liegen; wenn er in dem eben erwähnten Beispiele ein Punkt der unendlich fernen Geraden war, so lag dies daran, dass wir von der Parabel ausgingen, also $A_{33} = 0$ voraussetzten. Um dies einzusehen, gehen wir zunächst von der Mittelpunktsgleichung des allgemeinen Kegelschnittes aus. Diese war:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Setzen wir hierin

$$A = 0$$

und nehmen wir an, dass A_{33} nicht verschwindet, so zerfällt die Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

in zwei lineare Factoren. Denn setzen wir:

$$\frac{x}{y} = \lambda,$$

und sind λ', λ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(2) \qquad a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0,$$

so ist

$$-\frac{2a_{12}}{a_{11}} = \lambda' + \lambda''$$

$$\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda' \cdot \lambda'';$$

und die Gleichung des Kegelschnittes wird

$$(x - \lambda' y)(x - \lambda'' y) = 0;$$

derselbe zerfällt also in zwei durch den Anfangspunkt gehende Gerade. Je nach dem Vorzeichen von A_{33} können wir die Linienpaare in zwei Gruppen theilen, ebenso wie die Curven mit Mittelpunkt in Ellipsen und Hyperbel:

1) $A_{33} < 0$: *Reelles Linienpaar*; dasselbe hat also auch zwei reelle, unendlich ferne Punkte, wie die Hyperbel.

2) $A_{33} > 0$: *Imaginäres Linienpaar;* dasselbe wird von der unendlich fernen Geraden in zwei imaginären Punkten getroffen, wie die Ellipse. Nur der Schnittpunkt beider Linien ist reell, wie dies immer bei zwei conjugirt imaginären Geraden der Fall ist. Endlich gibt der Fall:

3) $A_{33} = 0$: *Zwei parallele Linien;* sie werden von der unendlich fernen Geraden in zwei zusammenfallenden Punkten getroffen, wie die Parabel. Nach dieser vorläufigen Orientirung wollen wir den Fall $A = 0$ noch in allgemeinerer Weise, ohne besondere Annahme über die Lage des Coordinatensystems, behandeln.

Die Gleichungen, welche einem Punkte x seine Polare u in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

zuordnen, waren:

$$\begin{aligned} \varrho u_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho u_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho u_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 ; \end{aligned} \tag{3}$$

und diese Gleichungen gelten auch noch, wenn A verschwindet. In diesem Falle sind sie jedoch nicht mehr auflösbar, d. h. *einem jeden Punkte entspricht noch eine bestimmte Polare, aber dieser Polare nicht mehr umgekehrt ein bestimmter Pol.* Wir können ferner einen Punkt ξ bestimmen, dessen Coordinaten gleichzeitig den drei Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3 &= 0 \\ a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3 &= 0 \\ a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3 &= 0 , \end{aligned} \tag{4}$$

denn die einzige Bedingung für das Zusammenbestehen dieser Gleichungen ist eben:

$$A = 0.$$

Für diesen Punkt ξ wird also die Polare unbestimmt (d. h. wir können in gewissem Sinne jede Linie der Ebene als seine Polare betrachten), während anderseits die Polare eines jeden anderen Punktes durch ihn hindurchgeht; denn multipliciren wir die Gleichungen (3) bez. mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und addiren, so sehen wir, dass die Bedingung

$$u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$$

unabhängig von den Werthen der x, d. h. für die Polaren aller Punkte erfüllt wird (der zu der letzten Gleichung noch hinzutretende Factor ϱ wird nur verschwinden, wenn die a_{ik} sämmtlich gleich Null sind, was wir ausschliessen). *Es können daher auch umgekehrt nur diejenigen Geraden als Polaren von Punkten aufgefasst werden, welche durch* ξ *hindurchgehen, wenn man nicht eben alle anderen Geraden als Polaren von* ξ *selbst auffassen will.* Einer jeden solchen Geraden u gehören dann aber unendlich viele Punkte als Pole zu; denn ist x ein solcher Punkt, welcher den Gleichungen (3) genügt, so werden diese Gleichungen wegen (4) auch durch jeden Punkt $x + \lambda\xi$ der Verbindungslinie von x und ξ befriedigt.

Um die Gestalt der Curve selbst zu erkennen, betrachten wir die Verbindungslinie von ξ mit irgend einem Punkte x derselben. Setzen wir $x + \lambda\xi$ statt x in die Curvengleichung ein, so erhalten wir eine Gleichung

$$P + 2\lambda Q + \lambda^2 R = 0,$$

deren Coëfficienten sämmtlich verschwinden, denn es ist nach (4):

$$P = \Sigma a_{ik}\xi_i\xi_k = 0,$$

also ξ liegt auf der Curve; ferner ist nach der Annahme:

$$R = \Sigma a_{ik}x_i x_k = 0,$$

und auch wegen (4):

$$Q = \Sigma a_{ik}\xi_i x_k = 0.$$

Die Linie $x + \lambda\xi$ gehört also ganz der Curve an, *und diese kann daher nur aus zwei Geraden bestehen, welche sich in* ξ *schneiden;* und zwar *zwei* solchen wegen des Grades der Kegelschnittgleichung. Die Coordinaten des Punktes ξ sind aus zwei der Gleichungen (4) zu bestimmen; dieGleichung desselben können wir demnach in den 3 Formen schreiben:

$$\begin{aligned} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 &= 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 &= 0, \\ A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

von denen jede mit der Gleichung

$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 = 0$$

gleichbedeutend ist. Wir können deshalb setzen:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu\xi_1^2 & A_{12} &= \mu\xi_1\xi_2 \\ A_{22} &= \mu\xi_2^2 & A_{13} &= \mu\xi_1\xi_3 \\ A_{33} &= \mu\xi_3^2 & A_{23} &= \mu\xi_2\xi_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Für einen zerfallenden Kegelschnitt werden also die Unterdeterminanten seiner Determinante proportional zu den Quadraten und Producten dreier Grössen, der Coordinaten seines „Doppelpunktes“ (ξ).

Auf anderem Wege werden wir zu der Gleichung dieses Doppelpunktes geführt, wenn wir die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten bilden. Dieselbe ist nämlich:

$$A_{11} u_1^2 + A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + 2 A_{13} u_1 u_3 + 2 A_{23} u_2 u_3 = 0$$

Sie gab uns früher die Bedingung, welcher einer Linie u genügen musste, um den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Punkten zu schneiden. Dies ist nun bei einem Linienpaare, so lange dasselbe nicht in eine Doppellinie ausartet, nur möglich, wenn die Gerade u durch den Doppelpunkt desselben hindurchgeht; und in der That geht *die Gleichung in Liniencoordinaten* wegen (6) über in:

$$(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3)^2 = 0,$$

d. h. *sie gibt doppelt zählend die Gleichung des Doppelpunktes.*

Die Coordinaten (α_i und β_i) der beiden Geraden, in welche der Kegelschnitt zerfällt, bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\text{(7)} \qquad \begin{array}{ll} \alpha_1 \beta_1 = a_{11} & \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 = 2 a_{23} \\ \alpha_2 \beta_2 = a_{22} & \alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3 = 2 a_{31} \\ \alpha_3 \beta_3 = a_{33} & \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 2 a_{12}; \end{array}$$

dieselben ergeben sich unmittelbar durch Vergleichung der Coëfficienten gleicher Producte der x in der Bedingungsgleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)$$

Die Gleichungen (7) ändern sich nicht, wenn man gleichzeitig die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit einer Grösse k multiplicirt und die $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ durch dieselbe Grösse k dividirt; und da wir es nur mit Verhältniss-Grössen zu thun haben, ist eine solche Operation für ihre Bedeutung gleichgültig. Wir können daher eine der sechs Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ gleich der Einheit setzen und haben dann 6 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Sie sind im Allgemeinen nicht auflösbar, sondern damit dies möglich ist, muss eine Bedingung zwischen den Coëfficienten a_{ik} bestehen. Eine solche ist uns bei unserer Voraussetzung aber durch die Gleichung

$$A = 0$$

gegeben, und wir werden später sehen, dass das Verschwinden von A die einzig mögliche Relation zwischen den a_{ik} ist, welche zum Ziele führt. Um die Unbekannten selbst zu berechnen, kann man etwa mit $\alpha_1 \beta_1$ in $\alpha_2 \beta_2$ und $\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2$ dividiren; es ergeben sich dadurch Summe und Product von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, und diese Grössen sind also durch eine quadratische Gleichung bestimmt; die übrigen findet man dann linear.

Symmetrischer und eleganter ist dagegen der folgende Weg. Der Punkt ξ ist der Schnittpunkt der Linien α und β; es bestehen daher die Gleichungen:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$$
$$\beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3 = 0\,,$$

folglich ist auch:

$$\begin{aligned} 2\varrho\xi_1 &= \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 \\ 2\varrho\xi_2 &= \alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1 \\ 2\varrho\xi_3 &= \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Man hat also, wenn man die ξ aus (4) irgendwie bestimmt denkt, wegen (7) die folgenden 9 Gleichungen zur Berechnung der α und β:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\beta_1 = a_{11} & \alpha_2\beta_1 = a_{21} - \varrho\xi_3 & \alpha_3\beta_1 = a_{31} + \varrho\xi_2 \\ \alpha_1\beta_2 = a_{12} + \varrho\xi_3 & \alpha_2\beta_2 = a_{22} & \alpha_3\beta_2 = a_{32} - \varrho\xi_1 \\ \alpha_1\beta_3 = a_{13} - \varrho\xi_2 & \alpha_2\beta_3 = a_{23} + \varrho\xi_1 & \alpha_3\beta_3 = a_{33}\,. \end{array} \tag{9}$$

Es sind hiernach die Verhältnisse $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ und $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3$ unmittelbar gegeben, sobald noch ϱ bekannt ist. Dies ϱ ist zwar zunächst nur als Proportionalitätsfactor eingeführt und würde als solcher vollkommen willkürlich sein. Dasselbe ist jedoch hier wegen der Gleichungen (6) von dem Proportionalitätsfactor μ abhängig. Wir können nämlich wegen (7) die Unterdeterminanten A_{ik} durch die α und β ausdrücken und müssen dann zu denselben Ausdrücken kommen, wie sie die Quadrate und Producte der ξ aus (8) ergeben. Es ist so z. B.

$$4A_{11} = -(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)^2 = -4\varrho^2\xi_1^{\,2}\,,$$

und also wegen (6):

$$\varrho^2 = -\mu\,,$$

wodurch ϱ derartig bestimmt ist, dass in (9) auf den rechten Seiten nur noch die a_{ik} linear vorkommen. Wir haben für ϱ zwei Werthe

$$\varrho = +\sqrt{-\mu}, \quad \varrho = -\sqrt{-\mu};$$

beide geben aber dasselbe Resultat, denn man erkennt leicht, dass sich die Werthe der α und β nur vertauschen, wenn man einmal $+\sqrt{-\mu}$, einmal $-\sqrt{-\mu}$ statt ϱ setzt; und somit ist unsere Aufgabe gelöst: *Die Coordinaten der beiden Linien des zerfallenden Kegelschnittes sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \beta_1 : \beta_2 : \beta_2 &= a_{11} : a_{12} + \sqrt{-\mu A_{33}} : a_{13} - \sqrt{-\mu A_{22}} \\ &= a_{21} - \sqrt{\mu A_{33}} : a_{22} : a_{23} + \sqrt{\mu A_{31}} \\ &= a_{31} + \sqrt{-\mu A_{22}} : a_{32} - \sqrt{-\mu A_{11}} : a_{33}\,; \\ \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 &= a_{11} : a_{21} - \sqrt{-\mu A_{33}} : a_{31} + \sqrt{-\mu A_{22}} \\ &= a_{12} + \sqrt{-\mu A_{33}} : a_{22} : a_{32} - \sqrt{-\mu A_{11}} \\ &= a_{13} - \sqrt{-\mu A_{22}} : a_{23} + \sqrt{-\mu A_{11}} : a_{33}\,. \end{aligned}$$

Es gilt nun auch umgekehrt der Satz, *dass immer A verschwinden muss, sobald der Kegelschnitt ausartet;* denn die Gleichungen (3) verwandeln sich alsdann wegen des Bestehens von (7) in:

$$\varrho u_1 = \beta_1 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_1 \Sigma \beta_i x_i$$
$$\varrho u_2 = \beta_2 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_2 \Sigma \beta_i x_i$$
$$\varrho u_3 = \beta_3 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_3 \Sigma \beta_i x_i\,,$$

und alle drei Ausdrücke verschwinden für $x = \xi$ identisch, da

$$\Sigma \alpha_i \xi_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma \beta_i \xi_i = 0\,,$$

d. h. es gelten wieder die Gleichungen (4), aus denen

$$A = 0$$

folgt.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen über zerfallende Kegelschnitte bildete die Unbestimmtheit der Polarenbeziehung, welche dabei in gewisser Hinsicht eintritt. Nach unserer allgemeinen Behandlung ist andererseits diese Gestaltung der Polarentheorie geometrisch selbstverständlich. Denn es folgt unmittelbar aus der Theorie des vollständigen Vierseits, dass alle Strahlen eines Büschels die beiden Geraden so treffen, dass der vierte harmonische Punkt stets auf einer durch den Doppelpunkt gehenden Geraden liegt. Und umgekehrt ist es klar, dass einer durch den Doppelpunkt gehenden Linie alle Punkte der vierten harmonischen Geraden zu ihr und dem Linienpaare als Pole zugeordnet sind. Man construirt demnach die Polare eines Punktes, indem man denselben mit dem Doppelpunkte verbindet, und zu dieser Verbindungslinie und den Geraden, aus welchen der Kegelschnitt besteht, die vierte harmonische Gerade sucht. Diese zu den beiden Grundlinien harmonischen Linienpaare entsprechen den Paaren conjugirter Durchmesser bei nicht zerfallendem Kegelschnitte, insofern man den Doppelpunkt als Mittelpunkt auffassen kann. —

Voraussetzung bei alle diesen Betrachtungen ist, dass die Gleichungen (4) den Doppelpunkt ξ wirklich bestimmen. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn dieselben sich auf eine einzige Gleichung:

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0$$

reduciren, von der sie dann nur durch constante Factoren (m_i) verschieden sind. Wir können in dem Falle setzen:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = m_1 \gamma_1 & a_{12} = m_1 \gamma_2 & a_{13} = m_1 \gamma_3 \\ a_{21} = m_2 \gamma_1 & a_{22} = m_2 \gamma_2 & a_{23} = m_2 \gamma_3 \\ a_{31} = m_3 \gamma_1 & a_{23} = m_2 \gamma_3 & a_{33} = m_3 \gamma_3 \,. \end{array}$$

Da aber $a_{ik} = a_{ki}$ ist, so haben wir auch

$$m_1 : m_2 : m_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$$

und somit werden die Coëfficienten der Kegelschnittgleichung proportional zu den Quadraten und Producten dreier Grössen, d. h. es wird, wenn μ ein Proportionalitätsfactor ist:

$$(10) \qquad \begin{array}{ll} a_{11} = \mu\gamma_1^2 & a_{23} = \mu\gamma_2\gamma_3 \\ a_{22} = \mu\gamma_2^2 & a_{31} = \mu\gamma_3\gamma_1 \\ a_{33} = \mu\gamma_3^2 & a_{12} = \mu\gamma_1\gamma_2 . \end{array}$$

Es folgt so, dass die linke Seite der Curvengleichung das vollständige Quadrat eines linearen Ausdrucks wird:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2 ,$$

und *der Kegelschnitt besteht aus einer Doppellinie:* ein jeder Punkt derselben ist nunmehr als Doppelpunkt zu betrachten.

Die Gleichungen (10) zeigen das gleichzeitige Bestehen der folgenden Relationen:

$$\begin{array}{ll} A_{11} = 0 & A_{23} = 0 \\ A_{22} = 0 & A_{31} = 0 \\ A_{33} = 0 & A_{12} = 0 \end{array}$$

Anderseits folgen aus dem Verschwinden dieser Unterdeterminanten wieder die Gleichungen (10), also:

Wenn nicht nur die Determinante eines Kegelschnittes verschwindet, sondern auch alle Unterdeterminanten derselben, so besteht der Kegelschnitt aus einer Doppellinie. In der That ist dann die Gleichung in Liniencoordinaten

$$\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

von jeder Geraden u erfüllt, wie es sein muss, da eine *jede* Gerade eine doppelt zählende andere Gerade in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet. —

Die Betrachtungen dieser Ausartungen (Linienpaar und Doppellinie) kann für die Untersuchung der allgemeinen Kegelschnitte von grossem Nutzen werden. Es bietet sich hier nämlich die Aufgabe: *das Product der beiden von einem Punkte an die Curve zu legenden Tangenten zu bestimmen;* und diese Aufgabe wollen wir als eine Anwendung der vorhergehenden Erörterungen noch durchführen.

Ziehen wir durch einen Punkt alle möglichen Strahlen und bestimmen auf ihnen Punkte z so, dass sie mit y und den beiden Schnittpunkten des Strahles mit der Curve ein bestimmtes Doppelverhältniss α bilden, so liegen die Punkte z, wie wir am Eingang der allgemeinen Kegelschnitttheorie fanden, auf einer Curve zweiter Ordnung, gegeben durch:

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0 ,$$

wo P, Q, R die folgende Bedeutung hatten. Es war, wenn wir uns der symbolischen Bezeichnung bedienen:

$$P = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2 = \Sigma a_{ik} y_i y_k$$
$$R = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 = \Sigma a_{ik} z_i z_k$$
$$Q = (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3).$$

Hieraus erhielten wir für $\alpha = -1$ insbesondere eine *Doppellinie:*

$$Q^2 = 0,$$

die Polare des Punktes y. Soll dagegen $\alpha = +1$ sein, so müssen nach unseren allgemeinen Betrachtungen über Doppelverhältnisse von den vier Punkten zwei, welche bei Bildung des Doppelverhältnisses als ein Paar benutzt werden, mit einem Punkte des andern Paares zusammenfallen, also in unserem Falle auf dem durch y gelegten Strahle: die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit dem Punkte z (denn diese Punkte sind allein beweglich). Es muss daher die Linie $\overline{yz}$ die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten treffen, d. h. sie muss dieselbe berühren; und die für $\alpha = +1$ resultirende Gleichung stellt uns *das Product der beiden von y an die Curve gehenden Tangenten dar*, es ist:

$$PR - Q^2 = 0. \tag{11}$$

Um diese Gleichung wirklich in ihre linearen Factoren zu zerfällen, verfahren wir folgendermassen. Es seien v_i die Coordinaten der Polare des Punktes y in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0,$$

also die Coëfficienten der z in Q:

$$\sigma v_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Alsdann haben wir in (9) an Stelle der a_{ik} nur die Coëfficienten von $z_i z_k$ in (11) zu setzen, d. h. die Grössen:

$$a_{ik} P - \sigma^2 v_i v_k.$$

Die Coordinaten α_i und β_i der beiden Tangenten bestimmen sich daher aus den Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 \beta_1 = a_{11} P - \sigma^2 v_1^2, & \alpha_2 \beta_1 = a_{21} P - \sigma^2 v_2 v_1 - \varrho y_3, & \alpha_3 \beta_1 = a_{31} P - \sigma^2 v_3 v_1 + \varrho y_2, \\
\alpha_1 \beta_2 = a_{12} P - \sigma^2 v_1 v_2 + \varrho y_3, & \alpha_2 \beta_2 = a_{22} P - \sigma^2 v_2^2, & \alpha_3 \beta_2 = a_{32} P - \sigma^2 v_3 v_2 - \varrho y_1, \\
\alpha_1 \beta_3 = a_{13} P - \sigma^2 v_1 v_3 - \varrho y_2, & \alpha_2 \beta_3 = a_{23} P - \sigma^2 v_2 v_3 + \varrho y_1, & \alpha_3 \beta_3 = a_{33} P - \sigma^2 v_3^2.
\end{array}$$

Hierin sind die y unmittelbar gegeben, und wir haben nur noch ϱ zu bestimmen, um dann die Verhältnisse der α und β sofort angeben zu können. Diese Bestimmung geben wieder die Gleichungen (6), denn wegen (6) haben wir:

$$A'_{ik} = -\varrho^2 y_i y_k, \tag{13}$$

wo die A_{ik}' aus den A_{ik} hervorgehen, wenn man in letzteren an Stelle der a_{ik} die Grössen $a_{ik} \,.\, P - \sigma^2 v_i v_k$ setzt. Bilden wir nun die 6 Gleichungen (13), multipliciren eine jede mit $\sigma^2 v_i v_k$ und addiren alle, so erhalten wir wegen (12):

$$\sigma^2 \Sigma A'_{ik} v_i v_k = - \varrho^2 P^2. \tag{14}$$

Den hier links stehenden Ausdruck können wir noch passend umformen, wenn wir die Liniencoordinatengleichung des Kegelschnittes in der früher (p. 78) gegebenen Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zu Grunde legen.

Wenden wir diese Darstellung auf unsern Fall an und schreiben statt der a_{ik}' wieder die Grössen $a_{ik} P - \sigma^2 v_i v_k$, so geht die Gleichung (14) über in:

$$\varrho^2 P^2 = \sigma^2 \begin{vmatrix} a_{11} P - \sigma^2 v_1^2 & a_{12} P - \sigma^2 v_1 v_2 & a_{13} P - \sigma^2 v_1 v_3 & v_1 \\ a_{21} P - \sigma^2 v_2 v_1 & a_{22} P - \sigma^2 v_2^2 & a_{23} P - \sigma^2 v_2 v_3 & v_2 \\ a_{31} P - \sigma^2 v_3 v_1 & a_{32} P - \sigma^2 v_3 v_2 & a_{33} P - \sigma^2 v_3^2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix},$$

oder indem wir die letzte Horizontalreihe der Determinante bez. mit $\sigma^2 v_1$, $\sigma^2 v_2$, $\sigma^2 v_3$ multiplicirt zu der ersten, zweiten und dritten Horizontalreihe addiren:

$$\varrho^2 P^2 = \sigma^2 \begin{vmatrix} a_{11} P & a_{12} P & a_{13} P & v_1 \\ a_{21} P & a_{22} P & a_{23} P & v_2 \\ a_{31} P & a_{32} P & a_{33} P & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma^2 P^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir hierin die ersten drei Verticalreihen bez. mit y_1, y_2, y_3 und addiren sie zu der mit $-\sigma$ multiplicirten vierten Verticalreihe, so folgt ferner, da wegen (12)

$$\sigma \Sigma v_i y_i = \Sigma a_{ik} y_i y_k = P:$$

$$\varrho^2 = - \sigma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & \frac{1}{\sigma} P \end{vmatrix} = - PA; \tag{15}$$

und somit haben wir in (13) für ϱ die beiden Werthe:

$$\varrho = +\sqrt{-PA} \quad \text{und} \quad \varrho = -\sqrt{-PA}$$

einzusetzen; eine Vertauschung beider Werthe hat nur eine Vertauschung der beiden Linien α und β zur Folge, ist also unwesentlich. — Das Vorzeichen von ϱ^2 gibt uns ein Criterium über die Lage des Punktes y gegen die Curve; wir haben für eine reelle Curve die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1) $\varrho^2 = -PA > 0$: Die beiden Tangenten sind reell.
2) $\varrho^2 = -PA < 0$: Die beiden Tangenten sind imaginär.
3) $\varrho^2 = -PA = 0$: Die beiden Tangenten fallen in eine zu sammen ($P = 0$).

Die Ebene wird daher durch einen reellen Kegelschnitt in zwei Theile getrennt: in dem einen (*dem inneren Theile*) liegen nur Punkte mit imaginärem Tangentenpaare; in dem andern *(dem äusseren Theile)* nur solche mit reellem Tangentenpaare. Für Punkte der Curve findet ein Uebergang vom Reellen zum Imaginären Statt, indem beide Tangenten in die des betreffenden Punktes zusammenfallen.

Das Tangentenpaar vom Punkte y an die Curve erschien uns hier als die Ausartung eines Kegelschnittes von der Gleichungsform (vergl. p. 74):

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0. \tag{16}$$

Fassen wir hierin α als einen veränderlichen Parameter auf, so stellt uns die Gleichung ein System von einfach unendlich vielen Kegelschnitten dar, unter denen insbesondere die doppelt zählende Polare von y und das Tangentenpaar enthalten war. Dieselben beiden Curven erhält man aber auch, wenn man den Kegelschnitt

$$P = 0$$

durch irgend einen andern des Systems ersetzt, d. h. *alle Kegelschnitte des Systems haben dasselbe Tangentenpaar und dieselbe Polare für den Punkt y.* Setzt man nämlich $y + \lambda z$ statt z, so erhält man:

$$(\alpha + 1)^2 P (R + 2\lambda Q + \lambda^2 P) - 4\alpha (Q + \lambda P)^2 = 0,$$

oder

$$\lambda^2 R' + 2\lambda Q' + P' = 0,$$

wo nun:

$$P' = (\alpha + 1)^2 PR = 4\alpha Q^2,$$
$$Q' = (\alpha - 1)^2 PQ,$$
$$R' = (\alpha - 1)^2 P^2,$$

und daher:

$$P'R' - Q'^2 = (\alpha^2 - 1)^2 P^2 (PR - Q^2).$$

Es sind also die Ausdrücke $P'R' - Q'^2$ und Q'^2, welche gleich Null gesetzt die Gleichungen des Tangentenpaares und der Polare für

irgend eine Curve des Systems geben, nur um constante, nicht verschwindende Factoren verschieden von den entsprechenden Ausdrücken für die gegebene Curve; und damit ist unser Satz bewiesen: *Alle Kegelschnitte des Systems* (16) *berühren sich in zwei Punkten, und y ist der Pol ihrer Berührungssehne.*

Wir wollen die Zerlegung der Gleichung des Tangentenpaares noch an einem einfachen Beispiele verfolgen. Es sei gegeben die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

und man soll das vom Punkte ξ, η an dieselbe gehende Tangentenpaar bestimmen. Es ist hier:

$$P = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1,$$

$$Q = \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1,$$

$$R = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Die Gleichung des Linienpaares lässt sich dann in der Form schreiben:

$$a^2 b^2 (PR - Q^2) = (x\eta - y\xi)^2 - (x - \xi)^2 b^2 - (y - \eta)^2 a^2 = 0.$$

Um diesen Ausdruck in seine beiden linearen Factoren

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

zu zerlegen, haben wir uns der Gleichungen für $\alpha_i \beta_k$ zu bedienen; dieselben nehmen hier die folgende Gestalt an (dieselben sind alle mit $a^2 b^2$ multiplicirt):

$$\begin{array}{lll} \alpha\alpha' = \eta^2 - b^2 & \beta\alpha' = -\xi\eta - \varrho & \gamma\alpha' = b^2\xi + \varrho\eta \\ \alpha\beta' = -\xi\eta + \varrho & \beta\beta' = \xi^2 - a^2 & \gamma\beta' = a^2\eta - \varrho\xi \\ \alpha\gamma' = b^2\xi - \varrho\eta & \beta\gamma' = a^2\eta + \varrho\xi & \gamma\gamma' = -b^2\xi^2 - a^2\eta^2, \end{array}$$

wo nun nach (15), wie man auch leicht direct nachweist:

$$\varrho^2 = b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2.$$

Die Gleichungen der beiden gesuchten Tangenten sind also, wenn ϱ eine der Wurzeln der Gleichung für ϱ^2 ist, gegeben durch:

$$b^2\xi(x - \xi) + a^2\eta(y - \eta) + \varrho(\xi y - x\eta) = 0$$

und:

$$b^2\xi(x - \xi) + a^2\eta(y - \eta) - \varrho(\xi y - x\eta) = 0.$$

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für Hyperbel und Parabel einfach durchführen.

IV. Dualistisches.

Wenn wir in unseren bisherigen Untersuchungen stets von der Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

ausgingen, so geschah dies nur, um uns der geläufigeren Vorstellung anzuschliessen, dass man den Punkt als erzeugendes Element für geometrische Gebilde betrachtet. Andererseits waren wir zu dieser einseitigen Betrachtung berechtigt, da wir bewiesen haben, dass im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung auch von der zweiten Klasse ist, und umgekehrt. In der That würden wir unter Zugrundelegung der Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten:

$$\Sigma A_{ik} u_i u_k = (A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3)^2 = 0 \tag{1}$$

auf ganz dieselben Probleme geführt werden, die wir schon behandelt haben; dieselben würden nur unter anderem Gesichtspunkte erscheinen. Es gilt dies jedoch nicht mehr für zerfallende Kegelschnitte, sondern es tritt hier an Stelle des Linienpaares das Punktepaar. Wir wollen den Gang, welchen die den vorigen entsprechenden Untersuchungen bei diesem Ausgangspunkte nehmen würden, im Folgenden allgemein andeuten. Wir stellen dabei die dualistisch entsprechenden Aufgaben und Sätze, wie wir sie früher behandelten, den nunmehr sich darbietenden der Uebersichtlichkeit wegen noch einmal (rechts) gegenüber.

Den Anfangspunkt der Theorie bildet die Aufgabe, welche wir in der früheren Darstellung zuletzt behandelten:

Es sollen die beiden durch den Schnittpunkt zweier Geraden v und w an die Curve gehenden Tangenten bestimmt werden.	*Es sollen die beiden auf der Verbindungslinie zweier Punkte y und z liegenden Punkte der Curve bestimmt werden* (vgl. p. 73).

Wir setzen hier in (1):

$$u_i = v_i + \mu w_i\,, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

und erhalten dadurch eine quadratische Gleichung in μ:

$$\mu^2 L + 2\mu H + G = 0\,,$$

wo:

$$L = (A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3)^2,$$
$$G = (A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3)^2,$$
$$H = (A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3)(A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3).$$

Die den beiden Wurzeln entsprechenden Werthe der u_i geben dann die Coordinaten der beiden Tangenten. Dieselben sind

$$\text{reell für } H^2 > GL,$$
$$\text{imaginär für } H^2 < GL,$$
$$\text{sie fallen zusammen für } H^2 = GL;$$

im letzten Falle liegt der Schnittpunkt der Linien v, w auf der Curve.

Hieran schliesst sich ferner die Frage:

Wie muss die Linie w liegen, damit sie mit v und den beiden Tangenten ein bestimmtes Doppelverhältniss α bildet?

Wie muss der Punkt z liegen, damit er mit y und den Schnittpunkten der Verbindungslinie ein bestimmtes Doppelverhältniss bildet? (vgl. p. 74)

Es findet sich für w die quadratische Gleichung:

$$(\alpha + 1)^2 GL - 4\alpha H^2 = 0;$$

dieselbe stellt, wenn man α als veränderlich betrachtet, ein System von Kegelschnitten dar, welche von w umhüllt werden müssen. Insbesondere ist darunter ein ausgezeichneter für $\alpha = -1$: ein doppelt zählender Punkt; also:

Wenn man von allen Punkten einer Geraden v die Tangenten an den Kegelschnitt zieht und von jedem aus den vierten harmonischen Strahl zu v und den beiden Tangenten, so gehen diese harmonischen Strahlen alle durch einen Punkt, den Pol der Geraden v. Seine Gleichung ist:

$$H = 0.$$

Wenn man auf allen Strahlen durch einen Punkt z die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte bestimmt und auf jedem den vierten harmonischen Punkt zu y und den beiden Schnittpunkten, so liegen diese harmonischen Punkte alle auf einer Geraden, der Polare des Punktes y. Ihre Gleichung ist:

$$Q = 0.$$

Die Coordinaten des Poles sind die Coëfficienten der Grössen w_i in dem Ausdrucke H, also:

$$\begin{aligned}
\sigma y_1 &= A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3, \\
\sigma y_2 &= A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3, \\
\sigma y_3 &= A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + A_{33} v_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Die Beziehung des Poles zur Linie v ist daher dieselbe, wie die früher gefundene, wenn wir unter den A_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante A eines als Punktgebilde gegebenen Kegelschnittes

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

verstehen. Man sieht dies auch sofort, wenn man die Punkte betrachtet, in denen die Berührungssehne der von einem auf v gelegenen Punkte gezogenen Tangenten die Linie v selbst schneidet. Ein solcher Punkt ist immer der Pol einer zugehörigen Linie w. Diese Geraden

müssen daher nach den bekannten Gesetzen über die Polarreciprocität den Pol von v umhüllen. Die Frage nach dem Orte, welcher von den harmonischen Strahlen zu einer Geraden und den von ihren Punkten ausgehenden Tangenten umhüllt wird, führt also hier auf nichts Neues: wir kommen auf die schon oben eingehend erörterten Polaritätsgesetze zurück. Insbesondere haben wir daher die folgenden Sätze:

Geht u durch den Pol von v, so geht v durch den Pol von u.

Liegt x auf der Polare von y, so liegt y auf der Polare von x.

Der Pol einer Geraden ist der Schnittpunkt der Tangenten des Kegelschnittes in seinen Schnittpunkten mit der Geraden.

Die Polare eines Punktes ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden von ihm an den Kegelschnitt gehenden Tangenten.

Der Pol einer Tangente des Kegelschnittes ist ihr Berührungspunkt.

Die Polare eines Punktes des Kegelschnittes ist seine Tangente.

Der letzte Satz gibt uns das Mittel, die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten darzustellen, wie oben der entsprechende Satz zum umgekehrten Schritte. Bezeichnen wir nämlich durch A die Determinante

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

und durch A_{ik} ihre zweigliedrigen Unterdeterminanten, so ergibt die Auflösung der Gleichungen (2) für $\varrho = \frac{\mathsf{A}}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \varrho v_1 &= \mathsf{A}_{11} y_1 + \mathsf{A}_{12} y_2 + \mathsf{A}_{13} y_3 \\ \varrho v_2 &= \mathsf{A}_{21} y_1 + \mathsf{A}_{22} y_2 + \mathsf{A}_{23} y_3 \\ \varrho v_3 &= \mathsf{A}_{31} y_1 + \mathsf{A}_{32} y_2 + \mathsf{A}_{33} y_3 \end{aligned}$$

und die Bedingung, dass y auf v liege, ergibt die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten:

$$\mathsf{A}_{11} y_1^2 + \mathsf{A}_{22} y_2^2 + \mathsf{A}_{33} y_3^2 + 2\mathsf{A}_{12} y_1 y_2 + 2\mathsf{A}_{13} y_1 y_3 + 2\mathsf{A}_{23} y_2 y_3 = 0,$$

eine Gleichung, welche wir in Determinantenform erhalten würden, wenn wir aus (2) und

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0$$

σ und die v_i eliminiren. Wir haben also:

Ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten:

(3) $$\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0,$$

so ist derselbe in Punktcoordinaten dargestellt durch:

Ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Punktcoordinaten:

(3)* $$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0,$$

so ist derselbe in Liniencoordinaten dargestellt durch:

(4) $\Sigma \mathsf{A}_{ik} x_i x_k = 0,$

oder durch:

$$(5)\quad - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(4)* $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0,$

oder durch:

$$(5)^*\quad - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir insbesondere voraus, dass die Gleichungen (4)*, (5)* mit (3) identisch sind, so müssen die Gleichungen (4), (5) umgekehrt auf (3)* zurückführen; und es ist dies nach den in der Einleitung über adjungirte Systeme gegebenen Determinanten-Sätzen (vgl. p. 20) in der That der Fall. Nach diesen ist nämlich:

$$(6)\qquad \mathsf{A} = A^2$$

und für die Unterdeterminanten:

$$(7)\qquad \mathsf{A}_{ik} = A \,.\, a_{ik}\,.$$

Die Gleichung (4) geht daher in der That über in:

$$A \cdot \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0,$$

d. h. sie unterscheidet sich von (3)* nur durch einen constanten, nicht verschwindenden Factor; denn wir setzen bei allen diesen Betrachtungen nicht zerfallende Kegelschnitte voraus.

Die Polarentheorie führte uns oben durch die Betrachtung sogenannter Polardreiecke auf eine einfachste Form der Kegelschnittgleichung; dasselbe gilt auch hier. *Legen wir ein Polardreieck als Coordinatendreieck zu Grunde, so ist die Gleichung*

in Liniencoordinaten:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

in Punktcoordinaten:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3}\right) = 0.$$

Die Untersuchungen, welche wir an diese Gleichungsform knüpften, indem wir zu einer Dreiecksseite die unendlich ferne Gerade wählten, sowie überhaupt die Betrachtungen über die Beziehungen des Kegelschnittes zu dieser Geraden fallen jedoch bei unseren jetzigen Darstellungen aus, denn es existirt kein einzelner entsprechend ausgezeichneter Punkt in der Ebene. Wir werden dagegen später zwei ausgezeichnete imaginäre Punkte der Ebene kennen lernen, welche durch ihre Beziehungen zu einem Kegelschnitte metrische Sätze für denselben begründen; insbesondere werden wir dadurch auf die Brennpunkte geführt werden.

Wir haben zunächst noch zu erörtern, was das Verschwinden der Determinante A bedeutet. Die Gleichungen (2) sind dann nicht mehr auflösbar; man kann dagegen eine Linie ω so bestimmen, dass gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3 = 0$$
$$A_{21}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3 = 0$$
$$A_{31}\omega_1 + A_{32}\omega_2 + A_{33}\omega_3 = 0,$$

und es findet sich weiter, dass, wenn eine Linie v der Gleichung

$$\Sigma A_{ik} v_i v_k = 0$$

genügt, auch jede Linie des Büschels $v + \lambda\omega$ diese Bedingung befriedigt. Wir folgern daraus, indem wir zugleich weitere Sätze über das Linienpaar dualistisch übertragen:

Verschwindet die Determinante A *eines Kegelschnittes, so zerfällt derselbe in ein Punktepaar.* Zu jeder Geraden gehört ein auf der Verbindungslinie der Punkte des Paares liegender Punkt als Pol; und jeder Punkt dieser Verbindungslinie hat alle Linien durch den vierten harmonischen Punkt zu Polaren.

Die Gleichung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten stellt doppelt zählend die Verbindungslinie der beiden Punkte dar; es ist:

$$(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)^2 = \Sigma A_{ik} x_i x_k.$$

Verschwindet die Determinante A *eines Kegelschnittes, so zerfällt derselbe in ein Linienpaar.* Zu jedem Punkte gehört eine durch den Schnittpunkt der Linien des Paares gehende Gerade als Polare; und jeder Strahl durch den Schnittpunkt hat alle Punkte des vierten harmonischen Strahles zu Polen.

Die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten stellt doppelt zählend den Schnittpunkt der beiden Linien dar; es ist:

$$(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3)^2 = \Sigma A_{ik} u_i u_k.$$

Um die Coordinaten der beiden Punkte a und b, in welche der Kegelschnitt zerfällt, zu bestimmen, haben wir hier die Gleichungen:

$$a_1 b_1 = A_{11} \qquad a_2 b_3 + b_2 a_3 = 2 A_{23}$$
$$a_2 b_2 = A_{22} \qquad a_3 b_1 + b_3 a_1 = 2 A_{31}$$
$$a_3 b_3 = A_{33} \qquad a_1 b_2 + b_1 a_2 = 2 A_{12},$$

und dieselben sind nur unter der Bedingung

$$A = 0$$

auflösbar.

Eine weitere Particularisation tritt ein, wenn auch die Unterdeterminanten A_{ik} verschwinden; wir haben alsdann:

Wenn sämmtliche Unterdeterminanten von A verschwinden, so stellt die Gleichung:

$$\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

einen doppelt zählenden Punkt dar.

Wenn sämmtliche Unterdeterminanten von A verschwinden, so stellt die Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

eine doppelt zählende Gerade dar.

Auch aus dem so gewonnenen Satze können wir erkennen, dass die Gleichung eines Kegelschnittes, $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, mit verschwindender Determinante A, in Liniencoordinaten, $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$, den Doppelpunkt des Kegelschnittes gibt. Denn bilden wir für diese Gleichung die Unterdeterminanten ihrer Determinante A, so verschwinden dieselben wegen (7) sämmtlich.

Die Gleichungen, welche uns eine Curve zweiter Klasse mit verschwindender Determinante in ihre linearen Factoren zerfällen lehrten, können wir insbesondere zur Lösung der folgenden Aufgabe benutzen.

Es sollen die Schnittpunkte einer Geraden v mit einer Curve zweiter Klasse bestimmt werden.

Es sollen die Tangenten von einem Punkte y an eine Curve zweiter Ordnung bestimmt werden.

Wir gehen dabei von dem Kegelschnittsysteme:

$$(\alpha + 1)^2 GL - 4 \alpha H^2 = 0 \tag{8}$$

aus, welches für $\alpha = -1$ die Gleichung des Poles der Linie v:

$$H = 0$$

ergab. Die beiden gesuchten Punkte erhalten wir für $\alpha = 1$; denn für sie muss die vierte harmonische Gerade zu v und dem von einem der Punkte ausgehenden Tangentenpaare mit der Doppellinie, aus welcher dies Tangentenpaar besteht, zusammenfallen. *Das Punktepaar ist also dargestellt durch:*

$$GL - H^2 = 0;$$

und die Zerlegung dieser Gleichung geschieht dann ganz, wie oben die der entsprechenden (vgl. p. 107)

$$PR - Q^2 = 0.$$

Im Anschlusse hieran lässt sich weiter nachweisen, dass alle Curven des Systems (8) (wenn wir α als Parameter ansehen) mit der Linie v dieselben Schnittpunkte und in ihnen dieselben Tangenten haben. Eine gleiche Eigenschaft hatten wir aber oben für das System

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4 \alpha Q^2 = 0 \tag{9}$$

abgeleitet; allen Curven des letzteren sind die von y ausgehenden Tangenten und deren Berührungspunkte gemeinsam. *Betrachten wir also v als die Polare des Punktes y, so stellen uns die Gleichungen* (8) *und* (9) *dasselbe Kegelschnittsystem dar*, sobald wir unter den A_{ik} die Unterdeterminanten von A verstehen. Wir wollen weiter nachweisen, dass das eine System dem andern durch die auf den Kegelschnitt $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ begründete Polarreciprocität zugeordnet ist, d. h. *dass die Polare w einen Kegelschnitt von* (8) *umhüllt, wenn ihr Pol z die durch den gleichen Parameter α bestimmte Curve von* (9) *durchläuft.* Zwischen w und z bestehen die Relationen:

(10) $$\varrho w_i = a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nun ist nach der zweiten Form, welche wir der Gleichung eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten gegeben haben:

$$G = \Sigma A_{ik} w_i w_k = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir in der rechts stehenden Determinante die erste, zweite und dritte Verticalreihe bez. mit z_1, z_2, z_3 und subtrahiren dieselben von der letzten, so erhalten wir wegen

$$\varrho (w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3) = \Sigma a_{ik} z_i z_k$$

das Resultat:

$$\varrho^2 G = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & - \Sigma a_{ik} z_i z_k \end{vmatrix},$$

oder:

(11) $$\varrho^2 G = A \cdot R.$$

Führen wir ebenso in den Ausdruck für L die Coordinaten des Pols y der Geraden v ein, so ergibt sich:

(12) $$\varrho^2 L = - \varrho^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = A \,.\, P \,.$$

Um endlich auch

$$H = \Sigma A_{ik} v_i w_k$$

entsprechend umzuformen, beachten wir, dass derselbe bis auf einen Factor $\frac{1}{2}$ aus G entsteht, indem wir nach w_1, w_2, w_3 ordnen, d. h. G in der Form

$$w_1 \Sigma a_{1k} w_k + w_2 \Sigma a_{2k} w_k + w_3 \Sigma a_{3k} w_k$$

schreiben und in den Summen die w durch die v ersetzen, ein Process, den wir unter Benutzung der in der Differentialrechnung üblichen Bezeichnungsweise kurz in folgender Weise ausdrücken können; es ist:

$$H = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial w_1} v_1 + \frac{\partial G}{\partial w_2} v_2 + \frac{\partial G}{\partial w_3} v_3\right).$$

Nehmen wir nun diese Operation mit der Determinante vor, durch welche wir G darstellten, so erhalten wir:

$$H = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir in dieser Determinante die erste, zweite und dritte Verticalreihe bez. mit $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$, addiren dieselben zu der mit ϱ multiplicirten letzten Reihe und berücksichtigen die Gleichung:

$$\varrho\,(v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3) = Q,$$

so finden wir:

$$\varrho H = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & -\frac{1}{\varrho} Q \end{vmatrix},$$

oder:

$$\varrho^2 H = A \cdot Q. \tag{13}$$

Durch die Gleichungen (11), (12), (13) geht also in der That das Curvensystem

$$(\alpha + 1)^2\, GL - 4\,\alpha H^2 = 0 \tag{8}$$

bis auf den nicht verschwindenden Factor $\frac{A}{\varrho^2}$ in das andere über:

$$(\alpha + 1)^2\, PR - 4\,\alpha Q^2 = 0, \tag{9}$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen. —

Zum Schlusse dieser Betrachtungen wollen wir die verschiedenen Arten von Curven zweiter Ordnung und Klasse, wie sie durch eine quadratische Gleichung in Punkt- oder Liniencoordinaten dargestellt werden können, übersichtlich zusammenstellen. Wir fügen bei jeder Curvenzahl die Zahl der Constanten hinzu, von welchen sie abhängt, d. h. die Zahl der Punkte bez. Tangenten, durch die eine Curve der Art bestimmt wird. So enthält eine allgemeine Curve 5, ein Linienpaar 4, eine Doppellinie 2 Constante. Eine von 3 Constanten abhängende Curve würde gegeben werden durch eine Doppellinie und einen mit ihr vereinigt gelegenen Doppelpunkt, wie sie aus dem Linienpaare oder dem Punktepaare entsteht, wenn man die beiden Linien oder Punkte allmählich zusammenrücken lässt, ohne dass dabei ihr Durchschnittspunkt resp. ihre Verbindungslinie unbestimmt wird. Eine solche

Curve kann aber nicht durch *eine* Gleichung in Punkt- oder Liniencoordinaten dargestellt werden; es sind dazu vielmehr zwei Gleichungen erforderlich von der Form

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 , \quad \Sigma b_{ik} u_i u_k = 0 ,$$

wo sowohl die Unterdeterminanten der a_{ik}, wie die der b_{ik} verschwinden, und wo

$$\begin{aligned} a_{11} : a_{12} : a_{13} &= a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} \\ &= \xi_1 \ : \xi_2 \ : \xi_3 \\ b_{11} : b_{12} : b_{13} &= b_{21} : b_{22} : b_{23} = b_{31} : b_{32} : b_{33} \\ &= \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \end{aligned}$$

und endlich:

$$\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 = 0 .$$

Der Vollständigkeit wegen führen wir auch diesen Fall in der folgenden Tabelle mit auf, in der er dann gleichzeitig als Grenzfall zwischen Linienpaar und Doppellinie, und zwischen Punktepaar und Doppelpunkt auftritt. Wir haben somit *für Curven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse, deren Gleichungen nur reelle Coëfficienten enthalten,* folgende Tabelle:

I. *Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse* ($A \gtrless 0$, $\mathsf{A} \gtrless 0$).

5 Constante.

1) Ellipse, reell oder imaginär.
2) Hyperbel.
3) Parabel.

II. *Curven zweiter Ordnung* ($A = 0$).	III. *Curven zweiter Klasse* ($\mathsf{A} = 0$).
1) Linienpaar.	1) Punktepaar.
4 Constante:	4 Constante:
zwei reelle oder conjugirt imaginäre Linien.	zwei reelle oder conjugirt imaginäre Punkte.
(Als Klassencurve Doppelpunkt.)	(Als Ordnungscurve Doppellinie.)

2) Doppellinie und Doppelpunkt in vereinigter Lage.

3 Constante.

3) Doppellinie.*)	3) Doppelpunkt.*)
2 Constante.	2 Constante.

Wenn auch die Parabel in der Tabelle unter den Kegelschnitten mit 5 Constanten aufgeführt wurde, so soll damit nur hervorgehoben werden, dass dieselbe der Ellipse und Hyperbel gleichberechtigt beizu-

*) Diese Gebilde sind bei reellen Coëfficienten a_{ik} in der Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, bez. A_{ik} in $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$ immer reell.

stellen ist, insofern eben ein nicht zerfallender Kegelschnitt noch verschieden gegen die unendlich ferne Gerade liegen kann. Die Parabel, *als solche*, dagegen hängt nur von 4 Willkürlichkeiten ab, indem durch das Wort „Parabel" schon eine Constante bestimmt, d. h. eine ihrer Tangenten, nämlich die unendlich ferne Gerade, gegeben ist. Eine Parabel ist schon völlig bestimmt durch drei ihrer Punkte und durch die Richtung ihrer Axe; denn letztere bestimmt den Punkt, in welchem die Curve von der unendlich fernen Geraden berührt wird, so dass uns ausser jenen drei noch zwei weitere unendlich ferne, einander unendlich benachbarte Punkte gegeben sind.

Der aufgestellten Tabelle gegenüber ist das Verhalten der Kegelschnitte in dem Systeme, welches durch die Gleichung (8) oder (9) dargestellt wird, besonders interessant. Die Gleichung in Liniencoordinaten (8) gibt uns einen Doppelpunkt ($H = 0$) und ein Punktepaar ($GL - H^2 = 0$); beide Curven werden dagegen durch eine Gleichung der Form (9) nicht dargestellt, und man erschliesst ihre Existenz in diesem Systeme nur, insofern dieselben durch einen Gränzübergang aus den allgemeinen Curven des Systems bei Variation des Parameters α entstehen. Die Gleichung in Punktcoordinaten (9) gibt dagegen eine Doppellinie ($Q = 0$) und ein Linienpaar ($PR - Q^2 = 0$); und beide sind durch eine Gleichung von der Form (8) nicht auszudrücken. Dabei ist der Doppelpunkt in (8) gleichzeitig der Doppelpunkt des Linienpaares in (9), und die Doppellinie in (9) gleichzeitig die Verbindungslinie der Punkte des in (8) enthaltenen Punktpaares.

V. Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten.

Sind zwei Kegelschnitte gegeben, so bietet sich naturgemäss zunächst die Frage nach der Zahl ihrer gemeinsamen Punkte, respective Tangenten und nach der analytischen Bestimmung dieser gemeinsamen Elemente.

Die Gleichungen der beiden vorliegenden Kegelschnitte seien in Punktcoordinaten:

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

und:

$$\varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k = 0 .$$

Um die Schnittpunkte beider zu bestimmen, können wir folgendermassen verfahren. Wir ordnen die Ausdrücke links nach Potenzen einer Variabeln, z. B. x_3, schreiben also die Curvengleichungen in der Form:

$$f = A + A' x_3 + A'' x_3^2$$

$$\varphi = B + B' x_3 + B'' x_3^2 ,$$

wo A, B vom zweiten, A', B' vom ersten Grade in x_1, x_2 sind, und wo

A'', B'' diese Grössen nicht mehr enthalten (also $A'' = a_{33}$, $B'' = b_{33}$). Aus den letzten Gleichungen können wir x_3 eliminiren, indem wir aus ihnen die Verhältnisse

$$1 : x_3 : x_3^2$$

bestimmen. Wir erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, 1 &= A' B'' - B' A'' \\ \varrho \,.\, x_3 &= A'' B - B'' A \\ \varrho \,.\, x_3^2 &= A B' - B A' ; \end{aligned}$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass das Product des ersten und letzten Ausdruckes gleich dem Quadrate des mittleren ist, d. h. dass:

$$(A' B'' - B' A'') (A B' - B A') = (A'' B - B'' A)^2 .$$

Es ist dies eine biquadratische Gleichung für die Unbekannte $\frac{x_1}{x_2}$. Ihre vier Wurzeln geben also vier durch den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gehende Strahlen nach den Schnittpunkten beider Curven; und somit haben wir, da Entsprechendes auch für zwei Curven zweiter Klasse gilt, die Sätze:

Zwei Kegelschnitte schneiden sich im Allgemeinen in 4 Punkten.	*Zwei Kegelschnitte haben im Allgemeinen 4 gemeinsame Tangenten.*

Es brauchen natürlich nicht alle vier Punkte oder Tangenten reell zu sein; sondern es können auch zwei imaginär und zwei reell, oder auch alle vier imaginär sein. Es können endlich auch von den vier Punkten mehrere einander unendlich nahe rücken, wo sich dann die Kegelschnitte berühren. Die letzteren Fälle schliessen wir jedoch zunächst ausdrücklich von unserer Betrachtung aus; wir werden später genauer auf dieselben eingehen. Wir nehmen also an, dass vier getrennte reelle oder imaginäre Schnittpunkte, bez. gemeinsame Tangenten vorhanden sind; wir werden uns jedoch im Folgenden zunächst auf die Bestimmung der gemeinsamen Punkte beschränken, die der Tangenten folgt dann durch dualistische Uebertragung.

Da erst fünf Punkte einen Kegelschnitt völlig bestimmen, so wird es noch unendlich viele Curven zweiter Ordnung geben, welche durch die vier Schnittpunkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$ hindurchgehen; und es lässt sich die Gleichung einer jeden Curve der Art in der Form

$$f - \lambda \varphi = 0 \tag{1}$$

schreiben, wo λ ein Parameter ist, so dass jedem Werthe von λ ein bestimmter, durch die 4 Punkte gehender Kegelschnitt entspricht. Denn die Gleichung ist erfüllt, sobald gleichzeitig f und φ verschwinden, und anderseits muss jeder Kegelschnitt unserer Art die Form (1) haben, weil durch einen beliebigen fünften Punkt nur noch ein solcher

hindurchgeht, und sich unter den Kegelschnitten (1) eben ein solcher findet. Setzt man nämlich die Coordinaten dieses fünften Punktes in (1) ein, und sind f_0, φ_0 die Ausdrücke, welche dadurch aus f, φ entstehen, so kann man die Gleichung

$$f_0 - \lambda \varphi_0 = 0$$

als eine Gleichung zur Bestimmung von λ betrachten, und die Gleichung des durch den betreffenden Punkt gehenden Kegelschnitts ist daher:

$$f - \frac{f_0}{\varphi_0} \varphi = 0 .$$

Das System dieser Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Punkten pflegt man als ein *Kegelschnittsbüschel* zu bezeichnen, die Gleichung (1) gibt dann einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels, es ist *die Gleichung des Büschels.*

Durch die *vier Grundpunkte dieses Büschels* gehen nun insbesondere drei ausgezeichnete, uneigentliche Kegelschnitte, d. h. (da wir f und φ in Punktcoordinaten gegeben annehmen) solche, die in ein Linienpaar zerfallen; es sind dies die Paare von Verbindungslinien der vier Punkte, d. h. die sechs Seiten des durch die vier Punkte bestimmten vollständigen Vierecks. Je zwei derselben, welche zusammen alle vier Punkte enthalten, bilden in der That einen Kegelschnitt unserer Art. Die drei in dieser Weise ausgezeichneten Curven müssen daher auch für besondere Werthe von λ durch die Gleichung (1) dargestellt sein. In der That führt die Bedingung, dass der Kegelschnitt $f - \lambda \varphi = 0$ zerfalle, auf eine *cubische* Gleichung für λ, denn sie ist durch das Verschwinden der Determinante dieses Kegelschnittes gegeben, und jeder Coëfficient seiner Gleichung enthält λ linear. Bezeichnen wir diese Determinante mit $\Delta(\lambda)$, so erhalten wir also die Bedingung:

$$(2) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Sind λ', λ'', λ''' die Wurzeln dieser Gleichung, die zunächst verschieden sein mögen, so stellen die entsprechenden Curven unseres Büschels obige Linienpaare dar, und wir können setzen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} f - \lambda' \varphi &= A' \cdot B', \\ f - \lambda'' \varphi &= A'' \cdot B'', \\ f - \lambda''' \varphi &= A''' \cdot B''', \end{aligned}$$

wo die A, B lineare Functionen der x bedeuten. Kennt man demnach die Wurzeln der cubischen Gleichung (2) und führt man bei zweien der Ausdrücke (3) die Zerlegung in lineare Factoren wirklich aus,

wozu nach unseren früheren Betrachtungen jedesmal eine quadratische Gleichung erforderlich ist, so geben die Durchschnitte der beiden so gefundenen Paare von Geraden die vier Schnittpunkte der beiden Curven zweiter Ordnung auf lineare Weise.

Wir wollen diese Aufgabe noch ausführlicher behandeln, indem wir von einem anderen Gesichtspunkte ausgehen; wir finden zugleich Gelegenheit, eine Reihe fundamentaler Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten zu erörtern. Wenn wir dabei scheinbar auf einem Umwege zum Ziele gelangen, indem die Lösung des Problems von der eines anderen mittelst einer cubischen Gleichung abhängig gemacht wird, so müssen wir bedenken, dass die wirkliche Lösung der direct aufgestellten biquadratischen Gleichung eben auch nur mit Hülfe einer cubischen, „ihrer *Resolvente*", erfolgen kann.*)

Construiren wir zunächst die Nebenecken des von den vier Schnittpunkten bestimmten vollständigen Vierecks (vgl. unten Fig. 22), so folgt aus der Construction der Polare, dass jede der drei Ecken die Verbindungslinie der beiden andern für beide Curven zur Polare hat. *Das von den Nebenecken gebildete Dreieck ist daher ein gemeinsames Polardreieck für beide Kegelschnitte, und zwar ist dies das einzig mögliche Dreieck der Art.* Letzteres ergibt sich, weil das Dreieck aus denselben Gründen auch für alle Kegelschnitte des Büschels

$$f - \lambda\varphi = 0$$

Polardreieck ist, insbesondere also auch für die drei darin enthaltenen Linienpaare. Für diese geht aber die Polare eines beliebigen Punktes durch den Doppelpunkt des Linienpaares. Es müssen folglich die Verbindungslinien der drei Doppelpunkte der Paare die Seiten des Polardreiecks, und die Doppelpunkte selbst die Ecken desselben bilden.

Die Aufsuchung dieses Polardreiecks bildet den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchungen. Statt nämlich die drei Linienpaare des Büschels zu bestimmen, suchen wir die Doppelpunkte derselben, d. h. die Ecken des Polardreiecks, durch deren Auffindung dann unsere Aufgabe im Wesentlichen gelöst ist.

Wir haben früher gesehen, dass in der Gleichung eines Kegelschnittes nur noch die Quadrate der Veränderlichen vorkommen, sobald ein Polardreieck als Coordinatendreieck gewählt wird. Nehmen wir daher als solches das gemeinsame Polardreieck von f und φ, so werden die Gleichungen dieser beiden Kegelschnitte von der Form:

$$f = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 = 0,$$
$$\varphi = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 = 0.$$

*) Vgl. über die Lösung der biquadratischen Gleichungen die folgende Abtheilung dieser Vorlesungen.

Die drei Coëfficienten einer der beiden Functionen f und φ kann man jedoch einfach gleich der Einheit annehmen, so dass z. B.

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

wird. Denken wir uns nämlich die y so als lineare Functionen der früheren Coordinaten x bestimmt, dass durch Einsetzung der letzteren f und φ wieder die frühere Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ und $\Sigma b_{ik} x_i x_k$ annehmen, so können wir durch Multiplication der drei Gleichungen, welche eine solche Transformation darstellen, mit passend gewählten Constanten die Definition der Coordinaten y so wählen, dass obige Factoren b_1, b_2, b_3 mit in die y eingehen.*) Freilich wird — und das soll geschehen — dabei vorausgesetzt, dass φ nicht aus einem Linienpaare besteht, wo dann einer der Coëfficienten b gleich Null sein würde. In diesem Falle wäre $\varphi = 0$ selbst eines der gesuchten drei Linienpaare; und die Bestimmung der Schnittpunkte erforderte dann nur die Trennung der beiden Factoren von φ und das Aufsuchen der Schnittpunkte der so erhaltenen Geraden mit $f = 0$. Durch diese Festsetzung über die Coëfficienten von φ sind die von f auch völlig bestimmt. Denn damit die drei Gleichungen (3) bestehen können, dürfen in einem Ausdrucke $f - \lambda\varphi$ nur noch die Quadrate von zwei Veränderlichen vorkommen; eine homogene lineare Function der Quadrate von drei Variabeln kann man nicht in lineare Factoren zerlegen. Wir haben daher die α bez. gleich den Wurzeln der Gleichung (2) zu setzen und können dann unsere Aufgabe folgendermassen formuliren:

Es soll eine lineare Substitution:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1' \, x_1 + \alpha_2' \, x_2 + \alpha_3' \, x_3 \\ y_2 &= \alpha_1'' \, x_1 + \alpha_2'' \, x_2 + \alpha_3'' \, x_3 \\ y_3 &= \alpha_1''' x_1 + \alpha_2''' x_2 + \alpha_3''' x_3 \end{aligned} \tag{4}$$

so bestimmt werden, dass zwei gegebene Functionen $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $\varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ *durch dieselbe gleichzeitig in die Formen*

$$\begin{aligned} f &= \lambda' y_1^2 + \lambda'' y_2^2 + \lambda''' y_3^2 \\ \varphi &= \quad y_1^2 + \quad y_2^2 + \quad y_3^2 \end{aligned} \tag{5}$$

übergeführt werden; wobei dann λ', λ'', λ''' die Wurzeln der cubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ werden.

*) Eine Gleichung:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

stellt zunächst nur einen imaginären Kegelschnitt dar, doch kann man auf diese Form auch die Gleichung

$$x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0$$

bringen, wenn man $y_1 = x_1$, $y_2 = \sqrt{\pm 1}\, x_2$, $y_3 = \sqrt{\pm 1}\, x_3$ setzt.

Nehmen wir diese Aufgabe zunächst als gelöst an, so sind die drei gesuchten Linienpaare dargestellt durch:

$$f - \lambda' \varphi = (\lambda'' - \lambda') y_2^2 + (\lambda''' - \lambda') y_3^2 = 0,$$
$$f - \lambda'' \varphi = (\lambda' - \lambda'') y_1^2 + (\lambda''' - \lambda'') y_3^2 = 0,$$
$$f - \lambda''' \varphi = (\lambda' - \lambda''') y_1^2 + (\lambda'' - \lambda''') y_2^2 = 0;$$

und diese Ausdrücke sind sofort in ihre linearen Factoren zu zerfällen. So sind die Linien des ersten Paares z. B. gegeben durch:

$$\sqrt{\lambda'' - \lambda'}\, y_2 + \sqrt{\lambda''' - \lambda'}\, y_3 = 0$$

und:

$$\sqrt{\lambda'' - \lambda'}\, y_2 - \sqrt{\lambda''' - \lambda'}\, y_3 = 0.$$

Um endlich die Schnittpunkte von f und φ selbst zu finden, brauchen wir nur die beiden Ausdrücke (5) gleichzeitig gleich Null zu setzen, wodurch wir zwei homogene lineare Gleichungen für y_1^2, y_2^2, y_3^2 erhalten. Aus ihnen können wir die Verhältnisse dieser Quadrate dann nach bekannten Regeln berechnen, und zwar ergibt sich, wenn ϱ ein Proportionalitätsfactor ist:

$$\varrho y_1^2 = \lambda'' - \lambda''',$$
$$\varrho y_2^2 = \lambda''' - \lambda',$$
$$\varrho y_3^2 = \lambda' - \lambda''.$$

Für die Coordinaten der Schnittpunkte haben wir also, wenn wir σ statt $\sqrt{\varrho}$ schreiben:

$$\sigma y_1 = \pm \sqrt{\lambda'' - \lambda'''},$$
$$\sigma y_2 = \pm \sqrt{\lambda''' - \lambda'}, \tag{6}$$
$$\sigma y_3 = \pm \sqrt{\lambda' - \lambda''}.$$

Die 8 Vorzeichencombinationen, welche hier möglich sind, führen in der That nur auf 4 verschiedene Werthsysteme der y, denn dieselben geben paarweise Coordinaten desselben Punktes, wenn sie sich nur um einen gemeinsamen Factor -1 unterscheiden.

Unsere Aufgabe der Bestimmung der vier Schnittpunkte ist also in allgemeinster Weise gelöst, sobald wir die y als Functionen der x durch die Gleichungen (4) gegeben voraussetzen. Wir haben nun noch die Bestimmung der Transformationscoëfficienten α wirklich durchzuführen. Ehe wir jedoch darauf eingehen, wollen wir die dualistisch entsprechenden Erörterungen, zu welchen die Aufsuchung der vier gemeinsamen Tangenten Veranlassung bietet, erwähnen; wir werden sehen, *dass die Bestimmung dieser Tangenten durch dieselbe cubische Gleichung (2) und durch dieselbe Transformation (4) geleistet werden kann.*

Verstehen wir unter den A_{ik}, B_{ik} die bez. aus den Grössen a_{ik},

b_{ik} zu bildenden zweigliedrigen Unterdeterminanten, so sind die Gleichungen der Kegelschnitte f und φ in Liniencoordinaten:

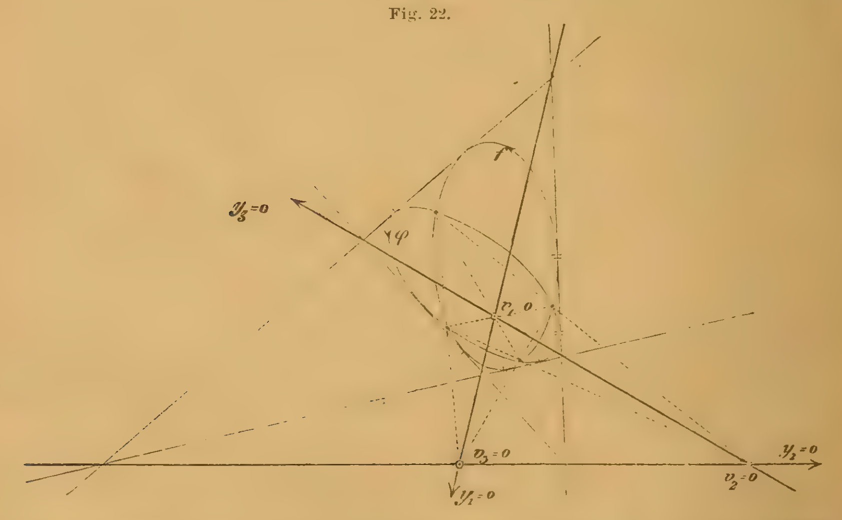
$$F = \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0\,,$$
$$\Phi = \Sigma B_{ik} u_i u_k = 0\,.$$

Ist ferner μ ein Parameter, so stellt die Gleichung

$$F - \mu \Phi = 0 \tag{7}$$

eine „Schaar" von einfach unendlich vielen Kegelschnitten dar, welche alle mit F und Φ dieselben vier Tangenten gemeinsam haben; und zwar sind unter dieser Gleichungsform *alle* Curven zweiter Klasse enthalten, welche diese vier Tangenten berühren. Insbesondere gibt es in der Schaar *drei in ein Punktepaar* zerfallende Curven; es sind dies die Paare der Schnittpunkte der vier Tangenten, d. h. die sechs Ecken des durch die letzteren bestimmten vollständigen Vierseits (vgl. Fig. 22); je zwei Punkte, durch welche zusammen die vier Tangenten alle hindurchgehen, bilden eine Curve der Schaar. Die Construction des Poles einer Geraden lehrt ferner, dass die Verbindungslinie zweier Punkte

Fig. 22.



je eines Paares Polare des Schnittpunktes der durch die beiden anderen Paare bestimmten Geraden ist, dass also *die Nebenseiten des von den gemeinsamen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits ein beiden Kegelschnitten gemeinsames Polardreieck bilden.* Da wir aber oben gezeigt haben, dass es für zwei Kegelschnitte nur ein solches Dreieck gibt, so muss das hier gefundene mit dem identisch sein, auf welches wir zuerst, von Punktcoordinaten ausgehend, geführt wurden. Man überzeugt sich davon überdies sofort durch einen Blick auf die Construction der beiden Dreiecke. Die Bestimmung der vier gemeinsamen

Tangenten geschieht nun ebenso mit Hülfe dieses Dreiecks, wie oben die der gemeinsamen Punkte; und damit ist dies Problem auf das vorige zurückgeführt, denn auch die dazu nöthige cubische Gleichung ist durch die Gleichung (2) bereits gelöst.

Legen wir nämlich das gemeinsame Polardreieck von f und φ wieder als Coordinatendreieck zu Grunde und nehnen wir diese Curven in der Form (5) an, so sind ihre Gleichungen in Liniencoordinaten:

$$(8)\qquad \begin{aligned} F &= \lambda''\lambda''' v_1^2 + \lambda'''\lambda' v_2^2 + \lambda'\lambda'' v_3^2 = 0 \\ \Phi &= \quad v_1^2 + \quad v_2^2 + \quad v_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Coëfficienten hängen also in der That nur von den Wurzeln der Gleichung

$$(2)\qquad \Delta(\lambda) = 0$$

ab.*) *Die Bestimmung der Punktepaare selbst*, d. h. der Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten, geschieht nun, indem man in der Gleichung

$$F - \mu\Phi = 0$$

μ bez. gleich $\lambda''\lambda'''$, $\lambda'''\lambda'$, $\lambda'\lambda''$ setzt. Man findet so die drei zerfallenden Kegelschnitte der Schaar:

$$\begin{aligned} F - \lambda''\lambda'''\Phi &= \lambda'''(\lambda' - \lambda'')v_2^2 + \lambda''(\lambda' - \lambda''')v_3^2 = 0 \\ F - \lambda'''\lambda'\Phi &= \lambda'''(\lambda'' - \lambda')v_1^2 + \lambda'(\lambda'' - \lambda''')v_3^2 = 0 \\ F - \lambda'\lambda''\Phi &= \lambda''(\lambda''' - \lambda')v_1^2 + \lambda'(\lambda''' - \lambda'')v_2^2 = 0, \end{aligned}$$

Für die Coordinaten der vier gemeinsamen Tangenten ergeben sich endlich aus den Gleichungen (8) die Werthe:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varrho v_1 &= \pm\sqrt{\lambda'(\lambda''' - \lambda'')} \\ \varrho v_2 &= \pm\sqrt{\lambda''(\lambda' - \lambda''')} \\ \varrho v_3 &= \pm\sqrt{\lambda'''(\lambda'' - \lambda')}; \end{aligned}$$

und die acht hier möglichen Vorzeichencombinationen geben wieder, wie bei den Gleichungen (6), in der That nur vier verschiedene Lagen der Tangenten.

Wir haben nun noch die Bestimmung der Transformationscoëfficienten α, die wir vorläufig als bekannt annahmen, wirklich auszuführen.

Lösen wir die betreffenden Transformationsgleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3 \\ y_2 &= \alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 + \alpha_3'' x_3 \\ y_3 &= \alpha_1''' x_1 + \alpha_2''' x_2 + \alpha_3''' x_3 \end{aligned}$$

*) Man sieht aus den Gleichungen (8), dass die Wurzeln der cubischen Gleichung, welche durch das Verschwinden der aus den Grössen $A_{ik} - \mu B_{ik}$ zu bildenden Determinante gegeben ist, die reciproken Werthe der Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ sind.

nach den x auf und bezeichnen die Unterdeterminante eines Elementes $\alpha_i^{(k)}$ der Determinante:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' \\ \alpha_1''' & \alpha_2''' & \alpha_3''' \end{vmatrix},$$

dividirt durch diese Determinante selbst, mit $\beta_i^{(k)}$, so erhalten wir nach bekannten Determinantensätzen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1' y_1 + \beta_1'' y_2 + \beta_1''' y_3 \\ x_2 &= \beta_2' y_1 + \beta_2'' y_2 + \beta_2''' y_3 \\ x_3 &= \beta_3' y_1 + \beta_3'' y_2 + \beta_3''' y_3 . \end{aligned} \tag{10}$$

Nach den allgemeinen, früher über Coordinatentransformation gegebenen Regeln sind die entsprechenden Gleichungen für Liniencoordinaten dann durch die transponirten Substitutionen gegeben, d. h. durch:

$$\begin{aligned} v_1 &= \beta_1' u_1 + \beta_2' u_2 + \beta_3' u_3 \qquad & u_1 &= \alpha_1' v_1 + \alpha_1'' v_2 + \alpha_1''' v_3 \\ v_2 &= \beta_1'' u_1 + \beta_2'' u_2 + \beta_3'' u_3 \qquad & u_2 &= \alpha_2' v_1 + \alpha_2'' v_2 + \alpha_2''' v_3 \\ v_3 &= \beta_1''' u_1 + \beta_2''' u_2 + \beta_3''' u_3 \qquad & u_3 &= \alpha_3' v_1 + \alpha_3'' v_3 + \alpha_3''' v_3 . \end{aligned} \tag{11}$$

Ferner haben wir uns früher auch die geometrische Bedeutung der Substitutionscoëfficienten vergegenwärtigt; es sind darnach die Grössen (vgl. p. 69)

$$\begin{matrix} \alpha_1' \;, & \alpha_2' \;, & \alpha_3' \;; \\ \alpha_1'' , & \alpha_2'' , & \alpha_3'' ; \\ \alpha_1''' , & \alpha_2''' , & \alpha_3''' \end{matrix}$$

bez. die Coordinaten der Seiten des neuen Fundamentaldreiecks in Bezug auf das alte Coordinatensystem der x, und die Grössen:

$$\begin{matrix} \beta_1' \;, & \beta_2' \;, & \beta_3' \;; \\ \beta_1'' , & \beta_2'' , & \beta_3'' ; \\ \beta_1''' , & \beta_2''' , & \beta_3''' \end{matrix}$$

bez. die Coordinaten der gegenüberliegenden Ecken des neuen Dreiecks in Bezug auf das frühere. Dies neue Coordinatendreieck ist aber in unserm Falle das den Kegelschnitten f und φ gemeinsame Polardreieck, und folglich hat jede Ecke desselben in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Polare; d. h. die Coordinaten der letzteren, gebildet in Bezug auf f und φ müssen einander proportional sein. Dadurch erhalten wir die folgenden drei Systeme von je drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\beta_1^{(i)} + a_{12}\beta_2^{(i)} + a_{13}\beta_3^{(i)} &= \mu_i\,(b_{11}\beta_1^{(i)} + b_{12}\beta_2^{(i)} + b_{13}\beta_3^{(i)}) , \\ a_{21}\beta_1^{(i)} + a_{22}\beta_2^{(i)} + a_{23}\beta_3^{(i)} &= \mu_i\,(b_{21}\beta_1^{(i)} + b_{22}\beta_2^{(i)} + b_{23}\beta_3^{(i)}) , \\ a_{31}\beta_1^{(i)} + a_{32}\beta_2^{(i)} + a_{33}\beta_3^{(i)} &= \mu_i\,(b_{31}\beta_1^{(i)} + b_{32}\beta_2^{(i)} + b_{33}\beta_3^{(i)}) . \end{aligned}$$

Hierin haben wir für $\beta_k^{(i)}$ bez. β_k', β_k'', β_k''' und für μ_i bez. μ_1, μ_2, μ_3 zu setzen, um die drei Systeme von Gleichungen zu erhalten. Ordnen wir noch nach den Grössen β, so gehen dieselben über in:

$$(12)\quad \begin{aligned} &(a_{11} - \mu_i b_{11})\,\beta_1^{(i)} + (a_{12} - \mu_i b_{12})\,\beta_2^{(i)} + (a_{13} - \mu_i b_{13})\,\beta_3^{(i)} = 0, \\ &(a_{21} - \mu_i b_{21})\,\beta_1^{(i)} + (a_{22} - \mu_i b_{22})\,\beta_2^{(i)} + (a_{23} - \mu_i b_{23})\,\beta_3^{(i)} = 0, \\ &(a_{31} - \mu_i b_{31})\,\beta_1^{(i)} + (a_{32} - \mu_i b_{32})\,\beta_2^{(i)} + (a_{33} - \mu_i b_{33})\,\beta_3^{(i)} = 0, \end{aligned}$$

und hieraus erhalten wir durch Elimination der β zur Bestimmung von μ wieder die cubische Gleichung (2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu b_{11} & a_{12} - \mu b_{12} & a_{13} - \mu b_{13} \\ a_{21} - \mu b_{21} & a_{22} - \mu b_{22} & a_{23} - \mu b_{23} \\ a_{31} - \mu b_{31} & a_{32} - \mu b_{32} & a_{33} - \mu b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Grössen μ_1, μ_2, μ_3 in den Gleichungen (12) sind also mit den eben auftretenden Wurzeln λ', λ'', λ''' dieser Gleichung identisch. Setzen wir einen dieser Werthe in (12) ein, so können wir aus je zweien der Gleichungen die Verhältnisse der $\beta_k^{(i)}$ berechnen: für die beiden anderen Systeme von je drei Gleichungen haben wir dann bez. die beiden andern Wurzeln von (2) zu verwerthen. Wir können somit die Werthe

von β_1', β_2', β_3' bis auf einen Factor ϱ'
von β_1'', β_2'', β_3'' bis auf einen Factor ϱ''
von β_1''', β_2''', β_3''' bis auf einen Factor ϱ'''

berechnen; um diese Factoren selbst endlich noch zu bestimmen, setzen wir die gefundenen Werthe der $\beta_k^{(i)}$ in die Gleichungen (10) ein; vermittelst dieser muss dann der Kegelschnitt φ auf die Form

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

gebracht werden; und gemäss dieser Forderung müssen wir ϱ', ϱ'', ϱ'' noch wählen, *wodurch dann unser Transformationsproblem vollständig gelöst ist.* —

Der Weg, welcher uns zum Ziele geführt hat, ist jedoch keineswegs als ein algebraisch eleganter zu bezeichnen; wir haben das Problem allerdings gelöst, aber das Resultat erscheint als Ergebniss unübersichtlicher Rechnung. Wir haben dabei keinen tiefern Einblick in die Natur derartiger Transformationsprobleme überhaupt gethan, während gerade die vorliegende Aufgabe bei geschickter Behandlung mannigfache Gelegenheit zu allgemeinen Erörterungen, zur Vervollständigung unserer Begriffsbildung überhaupt bietet. Wir wollen daher die Berechnung der Coëfficienten $\beta_k^{(i)}$ noch von einem anderen Gesichtspunkte aus durchführen, wobei wir dann von selbst zur Ent-

wicklung wichtiger und allgemeiner Principien Veranlassung finden werden.*)

Transformiren wir eine quadratische Function von drei homogenen Variabeln:

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

durch die Substitution (10):

$$x_i = \beta_i' y_1 + \beta_i'' y_2 + \beta_i''' y_3, \quad (i = 1, 2, 3),$$

so geht dieselbe über in eine homogene quadratische Function der y:

$$f' = \Sigma a_{ik}' y_i y_k,$$

in welcher, wie man leicht übersieht, die Coëfficienten a_{ik}' vom ersten Grade in den a_{ik}, dagegen vom zweiten Grade in den Substitutionscoëfficienten $\beta_k^{(i)}$ sind. Wir haben nun oben eine Function der a_{ik}, die aus ihnen zu bildende Determinante, kennen gelernt, welche zu der Function f in einer Beziehung stand, die durch Einführung eines neuen Coordinatensystems nicht zerstört werden kann; denn ihr Verschwinden sagte aus, dass der durch $f = 0$ dargestellte Kegelschnitt in ein Linienpaar zerfällt. Verschwindet daher diese Determinante A, so muss dies auch für die aus den a_{ik}' gebildete Determinante A' stattfinden, damit auch die Function f' in zwei lineare Factoren zerlegbar sei. Da demnach A' immer gleichzeitig mit A verschwindet und umgekehrt, so können wir setzen:

$$A' = m \,.\, A,$$

wo m ein nicht verschwindender Factor ist. Dieser letztere kann dann aber die a_{ik} nicht mehr enthalten (denn A' sowohl wie A sind von der 3. Dimension in denselben), sondern nur noch die $\beta_k^{(i)}$, und zwar in der 6. Dimension, denn zu so hohem Grade kommen dieselben in A' vor, während A von ihnen unabhängig ist: m ist also eine nicht verschwindende Function 6. Grades der $\beta_k^{(i)}$. Nun sind diese aber vollkommen willkürlich, nur haben wir ausdrücklich vorausgesetzt, dass ihre Determinante R nicht verschwinde, denn sonst würden unsere Transformationsgleichungen (10) nicht auflösbar sein. Das Quadrat dieser Determinante ist daher die einzige Function 6. Grades in den $\beta_k^{(i)}$, welche nicht verschwindet, und also muss

$$m = c \,.\, R^2$$

sein, wo c eine rein numerische Constante bedeutet. Wir bestimmen dieselbe durch Betrachtung einer speciellen linearen Transformation,

---

*) Vgl. die Behandlung des Problems bei Aronhold: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, Borchardt's Journal, Bd. 62.

wodurch ihr Werth nicht geändert werden kann. Betrachten wir nämlich die Anwendung der Gleichung

$$A' = c \,.\, R^2 A$$

auf die identische Substitution:

$$x_1 = y_1\,, \quad x_2 = y_2\,, \quad x_3 = y_3\,,$$

so wird $A' = A$, $R = 1$, und es folgt:

$$c = 1.$$

Wir haben deshalb auch im allgemeinen Falle*)

(13) $$A' = R^2 \,.\, A.$$

Dieselben Schlüsse gelten für beliebige andere Verbindungen der Coëfficienten einer oder mehrerer Curven, sobald dieselben, gleich Null gesetzt, Eigenschaften angeben, welche zu den betreffenden Curven in unzerstörbarer Beziehung stehen und deshalb von der Wahl des Coordinatendreiecks unabhängig sind. Solche Functionen der Coëfficienten pflegt man als *Invarianten* zu bezeichnen; die Invarianten sind dann allgemein charakterisirt durch die Bedingung

$$I' = R^k I\,,$$

wo I die betreffende Function für das alte Coordinatendreieck, I' dieselbe für das neue ist, und R die Substitutionsdeterminante bedeutet. Die Determinante eines Kegelschnittes bietet uns somit zum ersten Male ein Beispiel für einen äusserst fruchtbaren und für die weiteren Entwicklungen der Geometrie unentbehrlichen Begriff. In der That führt erst die systematische Untersuchung solcher invarianter Gebilde dazu, algebraische Rechnung und geometrische Ueberlegung als identische Operationen hinzustellen. Wir werden daher im Folgenden auch noch ausführlich auf die sich hieran knüpfenden Theorien eingehen müssen. Für jetzt möge noch eine Anwendung unserer Schlussweise in folgendem Beispiele dargelegt werden, welches uns dann unmittelbar die Mittel zur Lösung unseres Transformationsproblems an die Hand geben wird.

Die Bedingung, dass eine gerade Linie u den Kegelschnitt $f = 0$ berührt, d. h. die Gleichung

$$\Sigma A_{ik}\, u_i\, u_k = 0$$

drückt jedenfalls eine von der Lage des Coordinatendreiecks unabhängige Beziehung aus. Durch unsere lineare Substitution (10) hängen dann die neuen Liniencoordinaten v mit den u durch die Gleichungen

*) Man erhält diese Gleichung direct durch zweimalige Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten; vgl. Näheres hierüber am Schlusse der folgenden Abtheilung dieser Vorlesungen.

(11) zusammen, und die erwähnte Schlussweise ergibt für die transformirte Gleichung:

$$\Sigma A_{ik}' v_i v_k = R^k \cdot \Sigma A_{ik} u_i u_k .$$

Hier sind auf der linken Seite die A_{ik} in den $\beta_k^{(i)}$ von der 2. Dimension, die v dagegen linear; im Ganzen kommen also die $\beta_k^{(i)}$ links wieder in der 6. Dimension vor, und es folgt somit $k = 2$. *Wir erhalten also für die Transformation der Curvengleichung in Liniencoordinaten die Identität:**)

$$\Sigma A_{ik}' v_i v_k = R^2 \Sigma A_{ik} u_i u_k . \tag{14}$$

Setzen wir nun wieder

$$\varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{32} - \lambda b_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix}$$

und wenden die Gleichungen (13), (14) auf einen Kegelschnitt unseres Büschels

$$f - \lambda \varphi = (\lambda' - \lambda)\, y_1^2 + (\lambda'' - \lambda)\, y_2^2 + (\lambda''' - \lambda)\, y_3^2 = 0$$

an, so ergibt sich:

$$R^2 . \varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda''' - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)(\lambda''' - \lambda) \tag{15}$$

und:

$$R^2 \Sigma \varDelta_{ik} u_i u_k = (\lambda'' - \lambda)(\lambda''' - \lambda)\, v_1^2 + (\lambda''' - \lambda)(\lambda' - \lambda)\, v_2^2 + (\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)\, v_3^2, \tag{16}$$

wo die $\varDelta_{ik}$ die Unterdeterminanten von $\varDelta(\lambda)$ sind. Aus der Gleichung (15) folgt zunächst wieder, dass $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ die Wurzeln der schon mehrfach erwähnten Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ sind, ferner aber durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von λ^3:

$$1 = R^2 . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

und also:

$$R^2 = \frac{1}{B},$$

---

*) Eine directe Bestätigung dieser Formel findet man wieder durch Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten, wenn man die linke Seite der Liniencoordinatengleichung in Form einer geränderten Determinante zu Grunde legt, und zwar am einfachsten, indem man die Transformation erst auf die in einem Rand stehenden u_i allein anwendet, worauf sich ein Factor R absondert, und dann mit dem andern Rande ebenso verfährt, worauf der zweite Factor R vortritt.

wo B die Determinante des Kegelschnittes $\varphi = 0$ bedeutet, von der wir überall angenommen haben, dass sie nicht verschwinde. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir dann aus (16), indem wir nach einander $\lambda = \lambda', \lambda'', \lambda'''$ setzen, unter Berücksichtigung von (11) die Relationen:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (\beta_1' u_1 + \beta_2' u_2 + \beta_3' u_3)^2 = \frac{1}{B(\lambda'' - \lambda')(\lambda''' - \lambda')} \cdot \Sigma \varDelta_{ik}(\lambda') u_i u_k, \\ (17)\quad v_2^2 &= (\beta_1'' u_1 + \beta_2'' u_2 + \beta_3'' u_3)^2 = \frac{1}{B(\lambda''' - \lambda'')(\lambda' - \lambda'')} \cdot \Sigma \varDelta_{ik}(\lambda'') u_i u_k, \\ v_3^2 &= (\beta_1''' u_1 + \beta_2''' u_2 + \beta_3''' u_3)^2 = \frac{1}{B(\lambda' - \lambda''')(\lambda'' - \lambda''')} \cdot \Sigma \varDelta_{ik}(\lambda''') u_i u_k. \end{aligned}$$

Wir könnten hier auf beiden Seiten die Wurzeln ziehen und die $\beta_k^{(i)}$ aus den drei dann linearen Gleichungen berechnen. Direct ergeben sie sich jedoch aus der Vergleichung der Coëfficienten von $u_i u_k$, in (17), wodurch man die folgenden Bestimmungen erhält:

$$(18)\qquad \beta_i^{(h)} \beta_k^{(h)} = \frac{\varDelta_{ik}(\lambda^{(h)})}{B \cdot \mu^{(h)}}.$$

Durch diese Gleichungen sind nun die Substitutionscoëfficienten bis auf die nothwendig unbestimmt bleibenden Vorzeichen gegeben; in ihnen haben wir noch die mit dem obern Index h versehenen Buchstaben durch ein-, zwei-, oder dreimal gestrichene zu ersetzen, und es ist:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mu' &= (\lambda'' - \lambda')(\lambda''' - \lambda') \\ \mu'' &= (\lambda''' - \lambda'')(\lambda' - \lambda'') \\ \mu''' &= (\lambda' - \lambda''')(\lambda'' - \lambda'''). \end{aligned}$$

Wir haben damit unser Transformationsproblem und also auch das der Bestimmung der vier gemeinsamen Punkte von f und φ in vollständiger und systematischer Weise gelöst; und zwar sahen wir, dass dadurch gleichzeitig das dualistisch entsprechende Problem, die Aufsuchung der vier gemeinsamen Tangenten von selbst mitgelöst wurde. — Wir wollen zunächst noch einige weitere Betrachtungen über diese Kegelschnittsysteme:

$$f - \lambda\varphi = 0 \quad \text{und} \quad F - \lambda\Phi = 0$$

hinzufügen, wobei wir den gefundenen Sätzen die ihnen dualistisch entsprechenden sofort gegenüberstellen. Wir fanden schon oben die folgenden Sätze:

Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kegelschnitt des Büschels $f - \lambda\varphi$ mit 4 gemeinsamen Punkten.	*Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte der Schaar $F - \lambda\Phi$ mit 4 gemeinsamen Tangenten berührt.*

Die sich hieran anschliessende Frage nach der Zahl der Kegel-

schnitte des Büschels, welche eine gegebene Gerade berühren, wird durch Nullsetzen des Ausdruckes (16) beantwortet; denn die Gleichung

$$\Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = 0$$

ist die Gleichung einer solchen Curve in Liniencoordinaten. Setzen wir hierin für die u die Coordinaten der gegebenen Geraden ein, so erhalten wir, da die $\Delta_{ik}(\lambda)$ vom zweiten Grade in λ sind, eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von λ; und somit folgt der Satz:

Jede Gerade wird von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt.

Durch jeden Punkt gehen zwei Kegelschnitte der Schaar.

Von besonderem Interesse ist ferner die Lage der Schnittpunkte einer beliebigen Curve des Büschels mit der betrachteten Geraden gegen die Berührungspunkte der beiden soeben bestimmten Kegelschnitte. Um diese zu untersuchen, nehmen wir die betr. Gerade zur Coordinatenseite

$$x_1 = 0.$$

Setzen wir dann für einen diese Linien berührenden Kegelschnitt $x_1 = 0$, so muss eine in x_2, x_3 quadratische Gleichung mit zwei gleichen Wurzeln für $\frac{x_2}{x_3}$ übrig bleiben, d. h. das Quadrat eines in x_2, x_3 linearen Ausdruckes. Die Gleichungen der beiden berührenden Kegelschnitte sind daher von der Form:

$$f = x_1 G + H^2 = 0,$$
$$\varphi = x_1 G' + H'^2 = 0,$$

wo G, G' linear in x_1, x_2, x_3 und H, H' linear in x_2, x_3 sind. Eine beliebige Curve des Büschels ist dann dargestellt durch die Gleichung:

$$f - \lambda\varphi = x_1 (G - \lambda G') + H^2 - \lambda H'^2 = 0;$$

und die Schnittpunkte derselben mit der gegebenen Geraden bestimmen sich durch:

$$x_1 = 0,$$
$$H^2 - \lambda H'^2 = 0,$$

die letzte Gleichung stellt ein von der Ecke $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Coordinatendreiecks nach den betreffenden Schnittpunkten gehendes Geradenpaar dar, gebildet aus den beiden Linien:

$$H - \sqrt{\lambda}\, H' = 0,$$

$$H + \sqrt{\lambda}\, H' = 0.$$

Diese beiden Geraden sind aber harmonisch zu den von ihrem Schnittpunkte nach den Berührungspunkten von f und φ gehenden Linien, welche durch $H = 0$, $H' = 0$ gegeben sind; und also liegen die ge-

suchten Schnittpunkte zu den beiden Berührungspunkten harmonisch. Ein solches System von Punktepaaren auf einer geraden Linie, wo jedes Paar zu denselben zwei bestimmten Punkten harmonisch liegt, nennt man nun eine *Involution* und die beiden ausgezeichneten Punkte *die Doppelpunkte der Involution* (ebenso spricht man auch von einer Involution von Geradenpaaren in einem Strahlbüschel). Es sind dies im Grunde nichts weiter, als die Doppelpunkte zweier vereinigt gelegener projectivischer Punktreihen von speciellem Charakter (vgl. p. 51). Letztere erhält man in diesem Falle, wenn man jedem Punkte der Geraden den vierten harmonischen in Bezug auf zwei feste Punkte (die beiden Doppelpunkte) zuordnet, also jedes Punktepaar der Involution in zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen auflöst.*) Unter Benutzung dieses auch für andere Probleme äusserst wichtigen Begriffes der Involution können wir jetzt folgende Sätze aussprechen:

Die Schnittpunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit einer Geraden bilden auf dieser eine Involution. In den beiden Doppelpunkten derselben wird die Gerade von je einer Curve des Büschels berührt.

Die von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar gehenden Tangenten bilden eine Involution. Die beiden Doppelstrahlen derselben werden in dem Punkte von je einer Curve der Schaar berührt.

VI. Besondere Lagen zweier Kegelschnitte gegen einander.

Es gibt einige Fälle, in denen die oben zur Bestimmung der Transformationscoëfficienten $\beta_k^{(i)}$ angewandte Methode nicht zum Ziele führt. Dieselbe ist nämlich nur so lange zulässig, als alle $\mu^{(h)}$ (vgl. Gl. (18)) von Null verschieden sind. Die Grössen $\mu^{(h)}$ verschwinden aber nur (vgl. (19)), wenn zwei Wurzeln der Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ einander gleich werden. Bei der näheren Durchführung zeigt sich, dass noch immer besonders zu berücksichtigen ist, ob für eine mehrfache Wurzel auch alle Unterdeterminanten von $\varDelta$ verschwinden, oder nicht. Wir haben sonach die folgenden Ausnahmefälle zu unterscheiden.

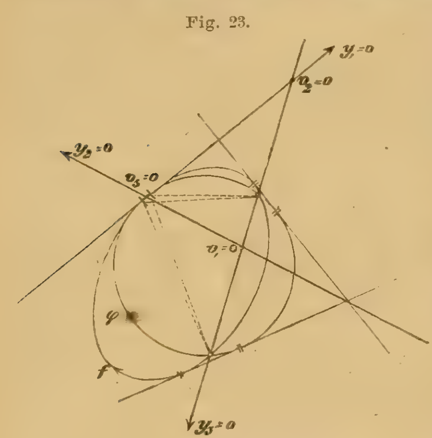
1. *Zwei Wurzeln λ sind gleich.*
2. *Zwei Wurzeln λ sind gleich, und die zugehörigen Unterdeterminanten $\varDelta_{ik}$ verschwinden sämmtlich.*
3. *Alle Wurzeln λ sind gleich.*
4. *Alle Wurzeln λ sind gleich, und die zugehörigen $\varDelta_{ik}$ verschwinden sämmtlich.*
5. *Alle drei Wurzeln sind gleich und jedes einzelne Glied der Determinante $\varDelta(\lambda)$ verschwindet für diesen Werth von λ.*

*) Vgl. Näheres hierüber in der dritten Abtheilung dieser Vorlesungen.

Diese Fälle wollen wir im Folgenden der Reihe nach näher behandeln; auf den zuletzt genannten brauchen wir jedoch nicht näher einzugehen, denn für denselben werden die a_{ik} den b_{ik} proportional: *Beide Kegelschnitte sind identisch.*

1. *Wenn zwei der $\lambda^{(i)}$ einander gleich werden,* so bedeutet dies im Allgemeinen, dass zwei Seiten, resp. Ecken des Polardreiecks einander unendlich nahe rücken. Daher ist dasselbe dann als Coordinatendreieck unbrauchbar, und unsere obige Transformation verliert ihre Bedeutung. Aus der früher gegebenen Construction des Polardreiecks folgt in diesem Falle, dass zwei der durch die Schnittpunkte der Curven gelegten Linienpaare unendlich wenig verschieden sind. Diese gehen aber noch nicht (was erst im zweiten Falle eintritt) in eine Doppellinie über; daher sind nothwendig zwei ihrer Schnittpunkte unendlich benachbart zu den beiden einander unendlich nahen Doppelpunkten der Paare (d. i. Ecken des Polardreiecks). Somit fallen in der Grenze zwei Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte zusammen in einen Punkt: *die Curven berühren sich in diesem Punkte P* (vgl. Fig. 23), und in ihm liegen gleichzeitig zwei Ecken des Polardreiecks vereinigt. Letzteres geschieht aber so, dass die gemeinsame Tangente der Curven in P mit der Verbindungslinie der unendlich nahen Dreiecksecken das Doppelpaar harmonisch theilt; wobei diese Linie als Polare des Schnittpunktes Q der Tangente mit der Verbindungslinie der beiden andern gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte construirt werden kann. Ebenso werden die Schnittpunkte der doppeltzählenden Tangente mit den beiden getrennt gebliebenen gemeinsamen Tangenten durch die Punkte P und Q harmonisch getrennt.

Fig. 23.



Es liegt nahe, hier neben den beiden noch verschiedenen Seiten des Polardreiecks als dritte Coordinatenseite die Verbindungslinie der beiden getrennten Schnittpunkte der Curven einzuführen. Sei also $y_1 = 0$ die Gleichung der gemeinsamen Tangente des Berührungspunktes, $y_2 = 0$ die der einfachen Seite des Polardreiecks, $y_3 = 0$ die der erwähnten dritten Linie, so kann man die beiden Linienpaare, bei geeigneter Bestimmung der absoluten Werthe der Coëfficienten, in der Form darstellen:

$$f - \lambda' \varphi = (y_1^2 + y_2^2)(\lambda'' - \lambda'),$$
$$f - \lambda'' \varphi = -2 y_1 y_2 \ (\lambda'' - \lambda').$$

In der That werden dann die beiden Geraden des ersten Paares harmonisch von den Seiten $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ getrennt, während die des zweiten mit zwei Seiten des Coordinatendreiecks zusammenfallen. Die kanonische Form, in welche wir hier die Curven $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ und $\varphi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ zu transformiren haben, ist somit die folgende:

$$f = \lambda'' (y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda' y_1 y_3\,,$$
$$\varphi = \quad y_1^2 + y_2^2 \; + 2 \quad y_1 y_3\,.$$

Um die dazu nöthigen Substitutionscoëfficienten zu berechnen, wenden wir wieder die Gleichungen (13) und (15) auf eine Curve des Systems $f - \lambda\varphi = 0$ an. Alsdann ergibt sich:

$$R^2 \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda'' - \lambda & 0 & \lambda' - \lambda \\ 0 & \lambda'' - \lambda & 0 \\ \lambda' - \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda'' - \lambda)(\lambda' - \lambda)^2.$$

Es ist also λ' die doppelte, λ'' die einfache Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$; durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von λ^3 folgt:

$$R^2 = -\frac{1}{B}\,,$$

wo B wieder die Determinante von φ bedeutet. Die Anwendung von Gleichung (14) p. 132 auf die Curve $f - \lambda\varphi$, ergibt ferner:

$$R^2 \cdot \Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = -(\lambda' - \lambda) v_2^2 + (\lambda'' - \lambda) v_3^2 - 2(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda) v_1 v_3\,,$$

und hieraus folgt, wenn

$$\Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = P - 2\lambda Q + \lambda^2 S$$

gesetzt wird:

$$R^2 \,.\, P = -\lambda'^2 v_2^2 + \lambda''^2 v_3^2 - \quad 2\lambda'\lambda'' \, v_1 v_3\,,$$
$$R^2 \,.\, Q = -\lambda' \, v_2^2 + \lambda'' \, v_3^2 - (\lambda' + \lambda'') \, v_1 v_3\,,$$
$$R^2 \,.\, S = - \quad v_2^2 - \quad v_3^2 - \quad 2 \, v_1 v_3\,.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen bez. einmal mit $1, -2\lambda'', \lambda''^2$, einmal mit $1, -2\lambda', \lambda'^2$, und dann noch bez. mit $1, -(\lambda' + \lambda''), \lambda'\lambda''$ und addiren dieselben jedesmal, so erhalten wir:

$$R^2 (P - \quad 2\lambda'' Q + \lambda''^2 S) = -(\lambda' - \lambda'')^2 v_2^2$$
$$R^2 (P - \quad 2\lambda' Q + \lambda'^2 S) = +(\lambda' - \lambda'')^2 v_3^2$$
$$R^2 (P - (\lambda' + \lambda'') Q + \lambda'\lambda'' S) = +(\lambda' - \lambda'')^2 v_1 v_3\,.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen könnten wir nun v_2, v_3, aus der letzten dann durch Division v_1 berechnen. Durch Vergleichung der beiderseitigen Coëfficienten von $u_i u_k$ dagegen finden wir direct die gesuchten Transformationscoëfficienten durch die Gleichungen, welche an Stelle der Gleichungen (18) auf p. 133 treten:

$$\beta_i'' \beta_k'' = \frac{1}{B(\lambda' - \lambda'')^2} (P_{ik} - 2\lambda'' Q_{ik} + \lambda''^2 S_{ik})$$

$$\beta_i''' \beta_k''' = \frac{-1}{B(\lambda' - \lambda'')^2} (P_{ik} - 2\lambda' Q_{ik} + \lambda'^2 S_{ik})$$

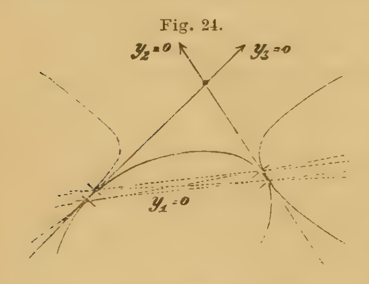
$$\beta_i' \beta_k''' + \beta_i''' \beta_k' = \frac{-1}{B(\lambda' - \lambda'')^2} (P_{ik} - (\lambda' + \lambda'') Q_{ik} + \lambda' \lambda'' S_{ik}) .$$

In ihnen haben die $\beta_k^{(i)}$ dieselbe Bedeutung, wie in (11) p. 128 und es ist gesetzt:

$$P = \Sigma P_{ik} u_i u_k , \quad Q = \Sigma Q_{ik} u_i u_k , \quad S = \Sigma S_{ik} u_i u_k .$$

2. *Wenn ausser $\varDelta(\lambda) = 0$ für die Doppelwurzel auch alle Gleichungen $\varDelta_{ik}(\lambda) = 0$ erfüllt sind**), so werden die $\beta_k^{(i)}$ nicht unendlich gross, sondern unbestimmt, die beiden Seiten des Polardreiecks, welche vorhin zusammenfielen, nehmen eine unbestimmte Richtung an. Zugleich vereinigen sich die beiden unendlich nahen Linienpaare des vorigen Falles zu einer einzigen Doppellinie oder eigentlich vierfach zählenden Linie, denn die Bedingung dafür ist eben nach p. 106 das Verschwinden aller $\varDelta_{ik}$. Sämmtliche Curven des Systems müssen sich daher in den Schnittpunkten der Doppellinie mit $f = 0$ oder $\varphi = 0$ berühren (vgl. Fig. 24); d. h. es ist dies ein System der Art, wie wir es schon früher (vgl. p. 116) behandelt haben. Hierdurch erklärt es sich auch geometrisch, dass unendlich viele gemeinsame Polardreiecke möglich sind; eine Seite eines solchen ist nämlich immer jene Doppellinie, die andern beiden Seiten gehen durch den Pol derselben und liegen harmonisch zu den beiden gemeinsamen Tangenten.

Fig. 24.



Um auf ein bestimmtes, ausgezeichnetes Coordinatendreieck zu kommen, kann man dasjenige wählen, welches durch die Doppellinie und die in den beiden Berührungspunkten gezogenen Tangenten (die zusammen auch einen Kegelschnitt des Systems geben) gebildet wird. Sind $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ diese Tangenten, ist ferner $y_1 = 0$ die Doppellinie, λ' die einfache, λ'' die Doppel-Wurzel von $\varDelta(\lambda) = 0$, so hat man die Linienpaare:

---

*) Dies Letztere kann auch nur bei einer Doppelwurzel eintreten, denn es ist

$$\frac{\partial \varDelta(\lambda)}{\partial \lambda} = - \Sigma \varDelta_{ik} b_{ik} ;$$

mit allen $\varDelta_{ik}$ verschwindet also auch immer $\frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda}$, was die Bedingung einer Doppelwurzel ist. Ebenso würde ein Verschwinden der zweiten Unterdeterminanten nur bei einer dreifachen Wurzel eintreten können.

$$f - \lambda'' \varphi = \qquad y_1^2 (\lambda' - \lambda'')$$
$$f - \lambda' \varphi = -2 y_2 y_3 (\lambda' - \lambda''),$$

also:

$$f = \lambda' y_1^2 + 2 \lambda'' y_2 y_3$$
$$\varphi = \quad y_1^2 + \quad 2 y_2 y_3 .$$

Zur Durchführung des betreffenden Transformationsproblems benutzen wir wieder die Gleichung:

$$A' = R^2 \cdot A,$$

welche jetzt übergeht in:

$$R^2 . \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' - \lambda \\ 0 & \lambda'' - \lambda & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)^2;$$

und hieraus folgt wieder:

$$R^2 = -\frac{1}{B} .$$

Ferner haben wir:

$$R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\lambda) u_i u_k = -(\lambda'' - \lambda)^2 v_1^2 - 2(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda) v_2 v_3;$$

und es ergeben sich die Coordinaten der Doppellinie v_1 $(\beta_1', \beta_2', \beta_3')$, wenn wir $\lambda = \lambda'$ setzen und die Coëfficienten gleicher Producte $u_i u_k$ vergleichen. Wir finden so:

$$\beta_1'^2 = \frac{\Delta_{11}(\lambda')}{B(\lambda'' - \lambda')^2},$$

$$\beta_1' \beta_2' = \frac{\Delta_{12}(\lambda')}{B(\lambda'' - \lambda')^2},$$

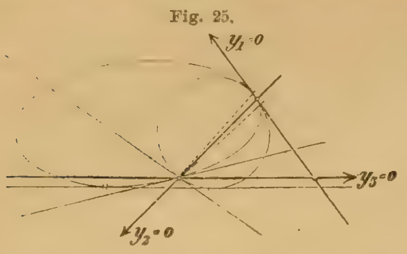
$$\beta_1' \beta_3' = \frac{\Delta_{13}(\lambda')}{B(\lambda'' - \lambda')^2} .$$

Nachdem die Doppellinie gefunden, ist die Bestimmung der beiden Tangenten auf ein bestimmtes Problem, welches wir früher (vgl. p. 107) behandelten, zurückgeführt.

3. *Wenn alle drei Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ gleich werden, ohne dass die Unterdeterminanten verschwinden,* so rücken alle drei Linienpaare zusammen, ohne jedoch in Doppellinien überzugehen; denn das Auftreten von Doppellinien würde ein identisches Verschwinden der Unterdeterminanten zur Folge haben (vgl. den folgenden Fall). Von den beiden Schnittpunkten zweier unendlich naher Linienpaare, welche im ersten Falle sich nicht in der Nähe ihrer Doppelpunkte befanden, muss noch einer diesen ebenfalls unendlich nahe rücken, damit auch das dritte Linienpaar sich mit jenen vereinige. *Die Curven berühren sich also in einem Punkte zweipunktig*, was so zu verstehen ist, dass die eine Curve die andere in 3 benachbarten Punkten schneidet: sie tritt in dieselbe hinein, geht wieder heraus und tritt dann sofort

wieder ein (vgl. Fig. 25); der vierte Schnittpunkt bleibt dagegen isolirt, und ebenso haben die Curven eine isolirte gemeinsame Tangente. Es existirt kein eigentliches gemeinsames Polardreieck mehr; ein ausgezeichnetes Coordinatendreieck dagegen ist uns durch die folgenden Linien gegeben: die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte ($y_1 = 0$), die Verbindungslinie dieses mit dem isolirten Schnittpunkte ($y_2 = 0$), und die durch den letztern gehende Linie, welche mit $y_2 = 0$ und den Tangenten der beiden Curven in dem Punkte harmonisch liegt ($y_3 = 0$). Da die Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ und $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ dann beiden Curven angehören, so müssen in f und φ die Glieder y_1^2, y_3^2 fehlen; da ferner $y_1 = 0$ Tangente ist, so müssen f, φ für $y_1 = 0$ in Quadrate übergehen, also müssen auch die Glieder mit $y_2\, y_3$ fehlen. Endlich müssen die mit y_1 multiplicirten Theile, welche die Tangenten im isolirten Schnittpunkte darstellen, harmonisch zu $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sein, d. h. sich als Summe und Differenz darstellen. Wir können daher setzen:

Fig. 25.



$$f = 2\lambda' y_1 \quad (y_2 + y_3) \quad + \lambda' y_2^2$$
$$\varphi = \quad 2 y_1 (-y_2 + y_3) + \quad y_2^2 .$$

In der That gibt dann die Gleichung $f - \lambda'\varphi = 0$ das einzige in dem Büschel noch vorhandene Linienpaar: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Zur Bestimmung der Transformation von f und φ auf diese kanonische Form, welche aber nicht zu sich selbst dualistisch ist, haben wir:

$$R^2 \,.\, \varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \lambda' + \lambda & \lambda' - \lambda \\ \lambda' + \lambda & \lambda' - \lambda & 0 \\ \lambda' - \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda' - \lambda)^3,$$

also:

$$R^2 = -\frac{1}{B},$$

und ferner:

$$R^2 \Sigma \varDelta_{ik}(\lambda) u_i u_k - R^2 (P - 2\lambda Q + \lambda^2 S) = -\left\{(\lambda' - \lambda) v_2 - (\lambda' + \lambda) v_3\right\}^2 - 2(\lambda' - \lambda)^2 v_1 v_3 .$$

Setzt man hierin nach einander $\lambda = \lambda'$, $\lambda = -\lambda'$, $\lambda = 0$, so findet man durch Combination der erhaltenen Gleichungen:

$$P - 2\lambda' Q + \lambda'^2 S = -\frac{4\lambda'^2}{B} v_3^2$$
$$P - S \quad = + \frac{4\lambda'^2}{B} v_2 v_3$$
$$P + S \quad = -\frac{2\lambda'^2}{B} (v_2^2 + v_3^2 - 2 v_1 v_3),$$

und hieraus ergeben sich durch Vergleichung der Coëfficienten gleicher Producte der u_i die gesuchten Substitutionscoëfficienten $\beta_k^{(i)}$.

4. *Der vierte Fall, wo alle Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ einander gleich werden, und zugleich alle Unterdeterminanten Δ_{ik} verschwinden*, vereinigt den zweiten und dritten: die Curven berühren sich dreipunktig (d. h. schneiden sich in vier successiven Punkten) und haben demnach keinen weiteren Punkt gemein. Anhaltspunkte für ein besonders ausgezeichnetes Coordinatensystem sind nicht mehr gegeben. Nehmen wir jedoch die gemeinsame Tangente im Berührungspunkte zur Geraden $y_1 = 0$, und sei $y_2 = 0$ irgend eine durch diesen Punkt gehende Linie, so können wir die beiden Curven in der Form schreiben:

$$f = y_1^2 + \lambda' (\alpha y_2^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_1 y_3),$$
$$\varphi = y_1^2 + \quad (\alpha y_2^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_1 y_3),$$

denn die Gleichung $f - \lambda' \varphi = 0$ gibt dann in der That die einzige im System noch vorhandene Gerade

$$y_1^2 = 0.$$

— Während wir bisher die verschiedenen Lagen betrachteten, welche bei zwei Kegelschnitten durch verschiedenartiges Zusammenrücken zweier oder mehrerer der 4 Schnittpunkte entstehen können, wollen wir jetzt noch einen Blick auf diejenigen Lagenbeziehungen werfen, welche dadurch bedingt werden, dass das Polardreieck eine besondere Lage gegen die unendlich ferne Gerade hat. Dies wird insbesondere eintreten, wenn eine Seite des Dreiecks mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, woraus dann folgt, dass die beiden Kegelschnitte einen gemeinsamen Mittelpunkt (den Pol der unendlich fernen Geraden) haben; und nach unseren früheren Erörterungen (vgl. p. 81) bilden die beiden andern Seiten des Polardreiecks ein Paar conjugirter Durchmesser in Bezug auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte. Die Aufgabe, bei zwei Kegelschnitten mit demselben Mittelpunkte das ihnen gemeinsame Paar conjugirter Durchmesser zu finden, ist also durch unsere obigen allgemeineren Betrachtungen schon gelöst; wir wollen nur noch die Gestaltung der betreffenden Gleichungen unter Benutzung nicht homogener Coordinaten näher verfolgen.

Nehmen wir an, dass der Anfangspunkt des Coordinatensystems bereits in den Mittelpunkt verlegt sei, so haben die beiden Kegelschnittgleichungen die Form (vgl. p. 87)

$$\begin{aligned} f &= a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 - 1 = 0, \\ \varphi &= b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2 - 1 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

und wir haben dieselben auf die Form:

$$(2)\qquad \begin{aligned} f &= \frac{x'^2}{p'^2} + \frac{y'^2}{q'^2} - 1 = 0 \\ \varphi &= \frac{x'^2}{p''^2} + \frac{y'^2}{q''^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

zu transformiren. Die letzteren Gleichungen zeigen, da sie nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten, unmittelbar, dass die vier Schnittpunkte von f und φ symmetrisch gegen die gemeinsamen conjugirten Durchmesser liegen; und Gleiches folgt für die vier gemeinsamen Tangenten, denn die Gleichungen in Liniencoordinaten werden:

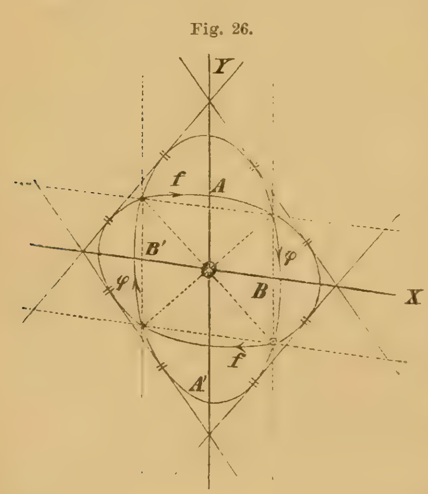
$$p'^2 u^2 + q'^2 v^2 - 1 = 0$$
$$p''^2 u^2 + q''^2 v^2 - 1 = 0.$$

Wir können auch die Coordinaten der gemeinsamen Elemente vermöge der Gleichungen (6) auf p. 125 und (9) auf p. 127 leicht angeben; sie sind:

$$x = \pm p' p'' \sqrt{\frac{q'^2 - q''^2}{p''^2 q'^2 - p'^2 q''^2}}, \quad u = \pm \sqrt{\frac{q''^2 - q'^2}{p'^2 q''^2 - q''^2 q'^2}},$$
$$y = \pm q' q'' \sqrt{\frac{p''^2 - p'^2}{p''^2 q'^2 - p'^2 q''^2}}, \quad v = \pm \sqrt{\frac{p'^2 - p''^2}{p'^2 q'' - p'' q'^2}}.$$

Die Lage der Schnittpunkte ergibt sich auch aus unserer obigen allgemeinen Construction des Polardreiecks, wenn wir die Ausartung desselben näher verfolgen. Die drei Linienpaare des Büschels $f - \lambda \varphi = 0$ bestehen nämlich aus je zwei Parallelen zu den gemeinsamen conjugirten Durchmessern, und aus zwei Geraden, welche sich im Mittelpunkte schneiden. Ebenso sind die gemeinsamen Tangenten von f und φ zu zweien einander parallel und schneiden sich auf den beiden gemeinsamen conjugirten Durchmessern (vgl. Fig. 26).

Fig. 26.



Die betreffende Transformation möge nun durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta \\ x &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta \end{aligned}$$

geleistet werden; wir haben dann $\alpha, \beta, p', q', p'', q''$ zu bestimmen. Die Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ gibt uns hier:

$$(4)\qquad \varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{21} - \lambda b_{21} & 0 \\ a_{12} - \lambda b_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

und es ist uns eine Wurzel $\lambda = 1$ unmittelbar bekannt, was dem Umstande entspricht, dass wir die eine Ecke des Polardreiecks, den Mittelpunkt, als gegeben annehmen. Sind λ', λ'' die beiden andern Wurzeln von (4), so können wir nach dem Früheren sofort eine Substitution angeben, wodurch die Ausdrücke f und φ übergehen in:

$$(5)\qquad \begin{aligned} f &= \lambda' x''^2 + \lambda'' y''^2 - 1 \\ \varphi &= \quad x''^2 + \quad y''^2 - 1 \end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen gelangen wir dann zu der Form (2), wenn wir weiter setzen:

$$\frac{x'}{p''} = x'', \quad \frac{y'}{q''} = y''.$$

Die Wurzeln von (4) geben uns also unmittelbar nur die Verhältnisse der Längen der conjugirten Durchmesser, d. h. es ist:

$$\lambda' = \frac{p''^2}{p'^2}, \quad \lambda'' = \frac{q''^2}{q'^2}.$$

Die Längen derselben selbst finden wir durch Benutzung der Gleichungen (18), p. 133:

$$(6)\qquad \beta_i' \beta_k' = \frac{\Delta_{ik}(\lambda')}{(\lambda'' - \lambda')(\lambda''' - \lambda')} \cdot \frac{1}{B}, \text{ u. s. f.}$$

An Stelle der durch die Grössen $\beta_k^{(i)}$ bestimmten Substitution (Gleichung (10), p. 128) tritt nun hier die folgende:

$$\begin{aligned} x &= p'' \cos\alpha\, x'' + q'' \cos\beta\, y'', \\ y &= p'' \sin\alpha\, x'' + q'' \sin\beta\, y''. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$A = b_{11} b_{22} - b_{12}^2,$$

und also erhalten wir aus (6):

$$\begin{aligned} p''^2 \cos^2\alpha &= \frac{a_{22} - \lambda' b_{22}}{\lambda' - \lambda''} \cdot \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}, \\ p''^2 \cos\alpha \sin\alpha &= -\frac{a_{12} - \lambda' b_{12}}{\lambda' - \lambda''} \cdot \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}, \\ p''^2 \sin^2\alpha &= \frac{a_{11} - \lambda'' b_{11}}{\lambda'' - \lambda'} \cdot \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$p''^2 = \frac{(a_{22} - \lambda' b_{22}) - (a_{11} - \lambda'' b_{11})}{(\lambda' - \lambda'')(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)},$$

ebenso könnte man $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und q'' berechnen. Für p' findet man:

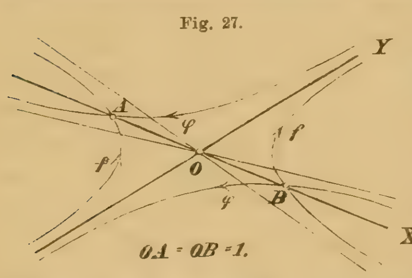
$$p'^2 = \frac{(a_{22} - \lambda' b_{22}) - (a_{11} - \lambda'' b_{11})}{\lambda'(\lambda' - \lambda'')(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)},$$

und einen ähnlichen Ausdruck würde man für q' erhalten.

Der hier eingeschlagene Weg wird wieder unmöglich, resp. unbestimmt, wenn einer der soeben behandelten Ausnahmefälle eintritt, d. h. wenn sich die Kegelschnitte irgendwie berühren. Da uns hier aber immer eine isolirte Ecke (der Mittelpunkt) und eine isolirte Seite des Polardreiecks (die unendlich ferne Gerade) gegeben sind, so können nur die Fälle 1. und 2. vorkommen, in denen sich die Curven auf einer Seite des Polardreiecks in einem, bez. in zwei Punkten berühren. Im Falle 2. gibt es unendlich viele gemeinsame Polardreiecke, deren eine Seite immer die Berührungssehne ist, während die beiden andern Seiten immer durch den Pol dieser Linie gehen. Die unendlich ferne Gerade wird daher Seite eines solchen Dreiecks sein können, wenn sie selbst Berührungssehne ist, oder wenn sich die beiden Kegelschnitte auf einem gemeinsamen Durchmesser berühren, wo dann der Pol der Berührungssehne auf der unendlich fernen Geraden liegt. Für unsere jetzige Betrachtung *tritt also ein Ausnahmefall ein, wenn die Curven eine oder zwei gemeinsame Asymptoten haben, oder wenn die beiden ihnen gemeinsamen Durchmesser zusammenfallen.*

Im erstern Falle sind die beiden conjugirten Durchmesser in die Asymptote zusammengefallen, was damit übereinstimmt, dass eine jede Asymptote (vgl. p. 82) ein Paar conjugirter Durchmesser vertritt. Das bei unserer obigen Behandlung (p. 136) ausgezeichnete Coordinatendreieck wird durch die gemeinsame Asymptote ($x = 0$), die Verbindungslinie der beiden noch getrennt liegenden Schnittpunkte ($y = 0$) und die unendlich ferne Gerade gegeben (vgl. Fig. 27). Unter Zugrundelegung dieses Dreiecks werden die Gleichungen der beiden Kegelschnitte von der Form:

Fig. 27.



$$f = a\,(x^2 + 1) + 2\,b\,x\,y = 0$$
$$\varphi = \quad x^2 + 1 \; + \; 2\,x\,y = 0\,.$$

Haben die Kegelschnitte beide Asymptoten gemeinsam, so wird unsere Aufgabe unbestimmt: die Curven haben alle Paare conjugirter Durchmesser gemein. Dieser letzte Satz gilt gleichmässig für Ellipsen und Hyperbeln, nur dass bei ersteren die beiden Asymptoten imaginär sind. *Man nennt in diesem Falle die Kegelschnitte ähnlich und ähnlich gelegen.* Zur Bestimmung der Asymptoten von f und φ dienen uns nämlich bez. die Gleichungen (p. 84):

$$a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0\,,$$
$$b_{11}x^2 + 2\,b_{12}xy + b_{22}y^2 = 0\,.$$

Sollen nun die Asymptoten zusammenfallen, so können sich beide Gleichungen nur um einen constanten Factor unterscheiden, d. h. es ist:

$$a_{11} : a_{12} : a_{22} = b_{11} : b_{12} : b_{22} ,$$

und deshalb werden die Curven ähnlich genannt. Ihre Gleichungen haben alsdann die Form:

$$f = \quad a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi = m\,(a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2) - 1 = 0.$$

Der erste oben genannte Fall dagegen kann bei zwei Ellipsen überall nicht vorkommen, weil die beiden Asymptoten einer solchen immer conjugirt imaginär sind. Fallen also zwei derselben zusammen, so muss dies auch mit den beiden andern der Fall sein.

VII. Der Kreis.

Wir haben in unseren bisherigen Betrachtungen immer zwischen metrischen und rein projectivischen Eigenschaften geometrischer Gebilde unterschieden. Die letzteren waren im Wesentlichen dadurch charakterisirt, dass bei ihnen von Winkeln und Entfernungen nicht die Rede war, dass vielmehr gewisse Doppelverhältnissrelationen *) (hauptsächlich harmonische Theilung bei der Polarentheorie) den Hauptgegenstand der Untersuchung bildeten. Wir werden jedoch nunmehr im Anschlusse an die Kreistheorie eine Methode entwickeln, durch welche es gelingt, alle auf Winkel bezüglichen Sätze als besondere Fälle allgemeinerer, auf den Begriff des Doppelverhältnisses gegründeter Beziehungen aufzufassen. Es führt dazu der folgende fundamentale Satz: *Alle Kreise haben zwei imaginäre (bei allen Bewegungen der Ebene in sich absolut feste), auf der unendlich fernen Geraden gelegene Punkte gemein.*

Zwei Kreise können sich bekanntlich nur in zwei reellen Punkten schneiden; und in der That erhalten wir bei Benutzung Cartesischer Coordinaten zur Bestimmung der Schnittpunkte nur eine quadratische Gleichung. Als charakteristisch für die Kreisgleichung erkannten wir früher den Umstand, dass ihre höchsten Terme (bei rechtwinkligen Coordinaten) immer die Form $x^2 + y^2$ haben und das Glied mit xy fehlt (vgl. p. 88). Die Gleichungen zweier Kreise sind also:

$$x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2\,a'x + 2\,b'x + c' = 0\,.$$

Aus ihnen ergibt sich durch Subtraction eine lineare Gleichung, die der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte. Die letzteren selbst

*) In der That kann man nach v. Staudt (vgl. Geometrie der Lage. 1847.) auch ein Doppelverhältniss ohne Benutzung des Begriffs der Entfernung definiren.

sind also dann durch eine quadratische Gleichung bestimmt. Dass die Aufsuchung der Schnittpunkte hier in so einfacher Weise möglich ist, ist lediglich in der speciellen Beziehung des Kreises zum rechtwinkligen Coordinatensysteme begründet. Führen wir nämlich mittelst der Substitution:

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} = \frac{A}{C}$$

$$y = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} = \frac{B}{C}$$

homogene Veränderliche ein, wo dann $C = 0$ die unendlich ferne Gerade darstellt, so werden die Gleichungen der beiden Kreise:

$$A^2 + B^2 + 2\,a\,AC + 2\,b\,AC + c\,C^2 = 0$$
$$A^2 + B^2 + 2\,a'\,AC + 2\,b'\,AC + c'\,C^2 = 0;$$

und zur Bestimmung der Schnittpunkte erhalten wir:

$$C\left(2\,(a - a')\,A + 2\,(b - b')\,B + (c - c')\,C\right) = 0,$$

also ein Linienpaar. Der eine Factor desselben, $C = 0$, gibt die beiden früher nicht berücksichtigten Schnittpunkte. Die biquadratische Gleichung, welche im Allgemeinen die vier Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten bestimmt, ist also in unserem Falle durch zwei quadratische Gleichungen lösbar. Es liegt dies daran, dass sich die früher zur Lösung benutzte cubische Resolvente ($\Delta\,(\lambda) = 0$) auf eine quadratische Gleichung reducirt; denn wir werden sehen, dass eine Seite des zwei Kreisen gemeinsamen Polardreiecks immer mit ihrer Centrale zusammenfällt, und dem entsprechend ist eine Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta\,(\lambda) = 0$ von vornherein gegeben. Die durch $C = 0$ gegebenen Schnittpunkte sind durch den Schnitt der unendlich fernen Geraden mit dem imaginären, zerfallenden Kegelschnitte:

$$A^2 + B^2 = 0$$

oder:

$$x^2 + y^2 = 0$$

bestimmt, also unabhängig von den Coëfficienten a, b, c, a', b', c' in den Gleichungen der beiden Kreise. Wir haben somit den Satz:

Alle Kreise der Ebene gehen durch dieselben beiden imaginären Punkte, die der unendlich fernen Geraden angehören. Wir wollen dieselben in der Folge kurz als die *imaginären Kreispunkte* der Ebene bezeichnen. Die Gleichung dieser Punkte in Liniencoordinaten ergibt sich durch Elimination von A, B, C aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} A \pm iB \qquad &= 0 \\ C &= 0 \\ Au + Bv + C &= 0 \end{aligned}$$

in der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = \pm iu - v = 0,$$

Es ist daher das Product der Kreispunkte dargestellt durch:

$$u^2 + v^2 = 0. \tag{1}$$

Die Richtungen nach diesen ausgezeichneten Punkten, d. h. die der Asymptoten des Kreises, sind durch die Gleichung:

$$\text{tang}^2\,\alpha + 1 = 0$$

also durch $\text{tang}\,\alpha = \pm\sqrt{-1}$ bestimmt. Wir können somit den erwähnten Satz auch folgendermassen aussprechen:

Die Asymptoten aller Kreise sind parallel, wenn anders wir auch von parallelen imaginären Linien sprechen wollen. Die so bestimmten Richtungen haben noch andere merkwürdige und wichtige Eigenschaften, von denen zunächst die folgenden beiden erwähnt sein mögen:

1) *Sie bilden mit allen anderen Richtungen denselben (unendlich grossen) Winkel.* Ist nämlich $\text{tang}\,\alpha = i = \sqrt{-1}$, so ist:

$$\text{tang}\,(\varphi - \alpha) = \frac{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,\alpha} = \frac{\text{tang}\,\varphi - i}{1 + i\,\text{tang}\,\varphi} = i,$$

also von φ unabhängig; ebenso für $\text{tang}\,\alpha = -i$. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Winkel α, und also überhaupt der Winkel einer Linie, welche durch einen der Kreispunkte geht, mit einer beliebigen anderen Geraden als ein unendlich grosser aufzufassen ist. Wir haben nämlich:

$$\text{arc tang}\,\alpha = \int_0^\alpha \frac{dx}{1 + x^2},$$

und dies Integral wird unendlich für $x = \pm i$. Während also die Punkte, deren Entfernung von einem beliebigen Punkte unendlich gross ist, auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden, liegen, *umhüllen die Linien, welche mit einer beliebigen andern Linie einen unendlich grossen Winkel bilden, und die man daher als unendlich ferne Linien bezeichnen könnte, ein Punktepaar: die imaginären Kreispunkte.* In diesem verschiedenen Verhalten der unendlich fernen Punkte und der unendlich fernen Linien ist weiterhin die Ungültigkeit des Princips der Dualität bei metrischen Relationen begründet.

2) *Zwei auf einander senkrechte Linien sind harmonisch zu den von ihrem Schnittpunkte nach den beiden imaginären Kreispunkten gezogenen Geraden.* In der That sind dann die beiden letzteren Asymptoten für einen jeden Kreis, der seinen Mittelpunkt in ihrem Schnittpunkte

hat, und die beiden gegebenen Geraden sind conjugirte Durchmesser eines solchen Kreises, also nach früheren allgemeinen Sätzen harmonisch zu den Linien nach den imaginären Kreispunkten, w. z. b. w.

Diese beiden Sätze zeigen, in wie inniger Beziehung die beiden ausgezeichneten Punkte der Ebene zu allen Winkelrelationen stehen; insbesondere ist durch den zweiten Satz das Ziehen von senkrechten Linien auf die rein projectivische Aufgabe einer harmonischen Theilung zurückgeführt. Dieser Zusammenhang geht aber noch weiter. Die Theorie der Kreise muss zufolge unserer Definition des Kreises übereinstimmen mit derjenigen der Kegelschnitte mit 2 gemeinsamen Punkten. Die Untersuchung dieser letzteren erfordert aber nur rein projectivische Betrachtungen; und *somit erscheint die gewöhnliche metrische Geometrie, insofern sie auf der Kreistheorie beruht, nur als Anwendung unserer früheren rein von Lagenverhältnissen abhängigen Erörterungen.**) Insbesondere ist die Definition des Kreises selbst als eines die Kreispunkte enthaltenden Kegelschnittes jeder metrischen Gestalt entkleidet; und auch den Begriff des Winkels können wir, wie sogleich gezeigt werden soll, direct durch den eines Doppelverhältnisses ersetzen, welch' letzterer ja in unseren bisherigen Betrachtungen als fundamental für alle projectivischen Untersuchungen auftrat. Der Winkel zweier Linien mit den Coordinaten u, v und u', v' wird bekanntlich gegeben durch:

$$\alpha = \arc\cos \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u'^2+v'^2}};$$

und dies ist nach einer bekannten Formel der Analysis**):

$$= \frac{i}{2} \log \frac{uu' + vv' + \sqrt{(uu'+vv')^2 - (u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}}{uu' + vv' - \sqrt{(uu'+vv')^2 - (u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}}.$$

Hier haben wir den Logarithmus eines Ausdrucks vor uns, welchen wir sofort als den Quotienten der Wurzeln erkennen, die sich für λ aus der Gleichung:

$$u^2 + v^2 + 2\lambda(uu' + vv') + \lambda^2(u'^2 + v'^2) = 0$$

ergeben. Dies ist aber nach (1) die Gleichung des Productes der imaginären Kreispunkte (1), wenn man darin die Coordinaten $u + \lambda v$, $u' + \lambda v'$ einsetzt; und somit haben wir den Satz:

Der Winkel zweier Geraden ist gleich dem mit $\frac{i}{2}$ *multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches dieselben mit den von ihren Schnittpunkten nach den imaginären Kreispunkten gehenden Linien bilden,* ein Satz, durch den die projectivische Auffassung der Winkel-Geometrie in jeder Weise durchgeführt werden kann: Man untersuche

*) Als Begründer dieser Anschauungsweise ist besonders Chasles zu nennen.

**) Diese Definition gab Laguerre: Nouvelles annales de math. 1853, p. 57.

die zu betrachtenden Gebilde in ihrer Beziehung zu zwei beliebigen Punkten und zu deren Verbindungslinie, man ersetze diese Punkte dann durch die imaginären Kreispunkte, also ihre Verbindungslinie durch die unendlich ferne Gerade, und es ergeben sich aus den gefundenen projectivischen Sätzen metrische Relationen in ihrer gewöhnlichen Form. Als Beispiele mögen noch für den Kreis die folgenden Beziehungen erwähnt werden:

Ein Kreis ist durch drei Punkte der Ebene vollkommen bestimmt; denn er ist ein Kegelschnitt, der ausserdem noch durch die beiden Kreispunkte gehen muss, für den also fünf Punkte gegeben sind.

Der Mittelpunkt eines Kreises, wie überhaupt eines Kegelschnittes, ist der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf denselben; in Folge dessen *sind concentrische Kreise dadurch definirt, dass sie gemeinsame Asymptoten haben.* Sie berühren sich also in den beiden Kreispunkten, können sich daher nicht mehr schneiden. Ein solches System von Kreisen wird dargestellt durch die Gleichung (vgl. p. 139)

$$x_1 x_2 - \lambda x_3^2 = 0,$$

wo $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade gibt, während $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Asymptoten sind. Um auf rechtwinklige Coordinaten zu kommen, müssen wir setzen $\left(i = \sqrt{-1}\right)$:

$$x_1 = x + iy, \quad x_2 = x - iy, \quad x_3 = 1,$$

und erhalten dann die gewöhnliche Form:

$$x^2 + y^2 - \lambda = 0,$$

wo nun der Parameter λ das Quadrat des variirenden Radius ist.

Auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel sind gleich, denn dies ist nur eine andere Form des bekannten Satzes, dass das Doppelverhältniss der von einem Punkte des Kegelschnittes nach vier festen Punkten desselben gezogenen Strahlen constant ist. Diese vier Strahlen nämlich gehen in unserm Falle von dem Scheitel des betreffenden Winkels nach den Endpunkten des betrachteten Bogens und nach den beiden imaginären Kreispunkten.

Je zwei conjugirte Durchmesser eines Kreises stehen auf einander senkrecht, denn zwei solche Linien sind der Definition nach harmonisch zu den beiden Kreisasymptoten (vgl. p. 82). Da wir nun früher gesehen haben, dass jede Asymptote eines Kegelschnittes als ein Paar zusammenfallender conjugirter Durchmesser zu betrachten ist, so könnte man den paradox scheinenden Satz aussprechen: *Jede Kreisasymptote (jede unendlich ferne Gerade) steht zu sich selbst senkrecht.*

Durch die obigen Erörterungen ist nur der Begriff des *Winkels* durch den rein projectivischen eines Doppelverhältnisses ersetzt; in ähnlicher Weise muss aber auch die *Strecke* definirbar sein, wenn

man alle metrischen Sätze in projectivische übertragen will. Letzteres gelingt jedoch nicht so unmittelbar, denn zur Messung eines Winkels ist uns eine bestimmte Einheit (etwa der Winkel von 90^0) von vornherein gegeben; zur Messung einer Strecke dagegen müssen wir eine willkürlich zu wählende Einheit zu Grunde legen. Bezeichnen wir nun mit r, s, bez. r', s' die Entfernungen zweier Punkte A, C von zwei anderen Punkten B, D ihrer Verbindungslinie, die in demselben Sinne, wie früher, gemessen sein mögen (vgl. p. 33), so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte gleich $\frac{r}{s} \cdot \frac{s'}{r'}$, also gleich r für $s = s'$, $r' = 1$. Nehmen wir insbesondere $s = s' = \infty$, so haben wir den Satz: *Die Entfernung zweier Punkte A und B ist (bei richtiger Wahl des Sinnes) gleich dem Doppelverhältnisse, welches mit ihnen der unendlich ferne Punkt und der um die Einheit von B entfernte Punkt bilden.* Dieser Satz würde von Nutzen werden, wenn wir auch Streckenrelationen projectivisch auffassen wollten. Um dann auf verschiedenen Geraden gelegene Strecken zu vergleichen, muss man noch die Festsetzung machen, dass die Punkte eines Kreises von seinem Mittelpunkte *gleich weit* entfernt heissen sollen; wir gehen darauf im Folgenden jedoch nicht weiter ein.*)

---

*) Zufolge dieser Ausführungen kann man die metrische Geometrie auffassen als die Theorie der Beziehungen ebener Figuren zu einem in ein Punktepaar zerfallenden Kegelschnitte. In ähnlicher Weise lassen sich auch alle projectivischen Beziehungen ebener Figuren zu einem allgemeinen Kegelschnitte in ein metrisches Gewand einkleiden, wodurch dann die betreffenden Sätze wesentlich kürzer und präciser auszusprechen sind: Man wird die Tangenten des ausgezeichneten „Fundamentalkegelschnittes" ebenso einführen, wie die unendlich fernen (durch die Kreispunkte gehenden) Geraden, die Punkte desselben, wie die unendlich fernen Punkte, und somit den (mit einer Constanten multiplicirten) Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches zwei beliebige Linien mit den beiden durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten des Fundamentalkegelschnittes bilden, als *Winkel* der beiden Linien bezeichnen. Ist also $\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten, so ist der Winkel zweier Geraden u, v

$$= c \log \frac{H + \sqrt{GL - H^2}}{H - \sqrt{GL - H^2}},$$

wo G, L, H die frühere Bedeutung haben (p. 111), und woraus für $\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = u^2 + v^2$ und $c = \frac{i}{2}$ wieder die Definition der gewöhnlichen metrischen Geometrie folgt. Unter Benutzung eines allgemeinen Kegelschnittes ist aber auch das Princip der Dualität für metrische Relationen vollkommen gültig; man hat daher auch zur Messung von Strecken eine bestimmt gegebene Einheit und man wird die *Entfernung* zweier Punkte definiren als den (mit einer Constanten multiplicirten) Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches mit ihnen die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitte bilden. Die Entfernung zweier Punkte x, y wird also

$$= c' \log \frac{Q + \sqrt{PR - Q^2}}{Q - \sqrt{PR - Q^2}},$$

Von besonderer Wichtigkeit ist die in den angeführten Sätzen ausgesprochene Beziehung der metrischen Geometrie zur projectivischen für eine systematische Behandlung geometrischer Aufgaben. Nur zu oft beruht die Lösung der letzteren, wenn man von den imaginären und unendlich fernen Elementen keinen Gebrauch macht, auf Kunstgriffen, deren Zweckmässigkeit eben nur der Erfolg lehrt. Mit Hülfe unserer Anschauungsweise gelingt es jedoch metrische Aufgaben sofort in ein allgemeineres Gewand einzukleiden und dann auf dieselben die allgemein gültigen, directen Methoden der projectivischen Geometrie anzuwenden. Andererseits können wir auch aus jedem bekannten metrischen Satze einen allgemeineren ableiten, wenn wir einfach die Kreispunkte durch zwei beliebige Punkte der Ebene ersetzen. Für beide Fälle werden uns im Folgenden noch verschiedene Beispiele begegnen. Wir wenden uns jedoch zunächst dazu, die Gestaltung unserer allgemeinen Kegelschnitttheorie für die Kreise weiter zu verfolgen, indem wir die Beziehungen zwischen zwei Kreisen untersuchen.

Dieselben können sich (ausser in den Kreispunkten) nur noch in zwei reellen, oder conjugirt imaginären Punkten schneiden. Jedenfalls ist daher die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte stets reell. Wir wollen sie als die *Chordale der beiden Kreise* bezeichnen; für dieselbe gibt die folgende Betrachtung eine bemerkenswerthe Eigenschaft.

Es sei die Gleichung des einen Kreises gegeben durch*):

$$K = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0;$$

alsdann hat der Ausdruck K in ähnlicher Weise, wie die Hesse'sche Normalform der Geraden (p. 23), für jeden bestimmten Punkt (x, y) eine geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir nämlich die Entfernung des Punktes (xy) vom Mittelpunkte (a, b) mit ϱ, so ist

$$K = \varrho^2 - r^2 = t^2,$$

wenn t die Länge der von dem Punkte an den Kreis gezogenen Tangente bedeutet. Ist nun

---

wo P, Q, R die früher so genannten Ausdrücke bedeuten. Insbesondere sind hiernach zwei Linien zu einander *rechtwinklig*, wenn $\Pi = 0$ $(uu' + vv' = 0$ für die gewöhnliche Metrik), also wenn die Linien harmonisch sind zu den von ihrem Schnittpunkte ausgehenden Tangenten. Mit den so als Winkel und Entfernungen definirten Grössen lässt sich weiterhin ebenso operiren, wie mit denen der gewöhnlichen Metrik. Vgl. Näheres hierüber bei Cayley: A sixth memoir upon quantics, Philos. Transactions, vol. 149, 1859 und Klein: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. IV und VI.

*) Vgl. für die Darstellung des Folgenden Plücker: Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1., und über die Eigenschaft der Chordale, Radicalaxe oder Potenzlinie: Steiner in Crelle's Journal, Bd. 1 und Gaultier: Journal de l'école polytechnique, cah. 16.

$$K' = (x - a')^2 + (y - b')^2 - r'^2 = 0$$

die Gleichung des zweiten Kreises, so ist die der Chordale gegeben durch:

$$K - K' = 0$$

d. h. es ist für einen Punkt dieser Linie

$$t^2 = t'^2$$

wenn t' die Länge der von dem Punkte an den zweiten Kreis gezogenen Tangente ist. Also folgt:

Die Chordale ist der geometrische Ort der Punkte, für welche die an die beiden Kreise gezogenen Tangenten einander gleich sind.

Die Bestimmung der auf dieser Linie gelegenen Schnittpunkte geschieht nun durch eine quadratische Gleichung. Wir setzen:

$$c = a^2 + b^2 - r^2, \quad c' = a'^2 + b'^2 - r'^2,$$
$$u = x^2 + y^2$$

und haben dann für dieselben:

$$u - 2ax - 2by + c = 0$$
$$u - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

Hieraus können wir x und y linear durch u ausdrücken und haben zur Bestimmung von u diese Werthe dann nur noch in die Gleichung $u = x^2 + y^2$ einzusetzen.

Hierdurch sind *die vier gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise* ebenfalls gegeben, denn sie hängen allein von der *Lage des gemeinsamen Polardreiecks* ab, welches durch die vier Schnittpunkte völlig bestimmt ist. Die Ecken dieses Dreiecks sind die Doppelpunkte der drei in dem Kreisbüschel:

$$K - \lambda K' = 0$$

enthaltenen Linienpaare. Von diesen ist nur eines reell: gebildet von der Chordale und der unendlich fernen Geraden; die beiden anderen sind immer imaginär, ihre Doppelpunkte aber ebenfalls reell, wenn sich die Kreise in zwei imaginären Punkten schneiden. Man erkennt dies daraus, dass dann die vier Tangenten reell sind, und somit auch das Polardreieck. In diesem Falle sind zwei Seiten des Dreiecks (s_1 und s_2 in Fig. 28) parallel der Chordale (c) und die zwischen ihnen gelegene Strecke der Centrale (s_3) wird von der Chordale halbirt; denn die Richtung der letzteren bestimmt die unendlich ferne Ecke

*) Eine gerade Linie bildet also nach unserer Definition des Kreises zusammen mit der unendlich fernen Geraden einen Kreis (mit unendlich grossem Radius); ebenso bilden zwei conjugirt imaginäre Linien, z. B. $x + iy = 0$ und $x - iy = 0$, von denen jede durch je einen Kreispunkt geht, einen Kreis vom Radius Null: $x^2 + y^2 = 0$.

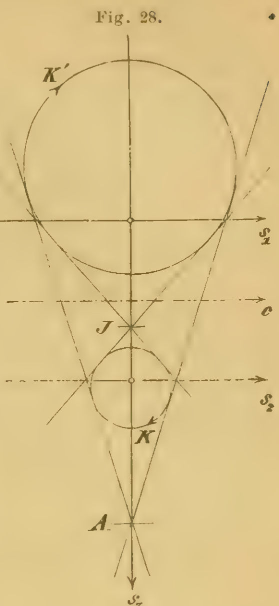


Fig. 28.

des Polardreiecks, und die Centrale muss als Polare dieses unendlich fernen Punktes die dritte Seite des Dreiecks sein. Eine jede solche Seite wird aber von den beiden andern und dem entsprechenden Linienpaare des Büschels $K - \lambda K' = 0$ harmonisch getheilt, woraus in der That, da die Chordale mit der unendlich fernen Geraden zusammen ein solches Linienpaar bildet, die Halbirung der erwähnten Strecke folgt. Auch die beiden andern Seiten des Dreiecks (ausser der Centrale) sind leicht zu construiren, da sich die gemeinsamen Tangenten der Kreise auf den drei Seiten schneiden müssen. Durch diese Schnittpunkte sind dann die drei Punktepaare gegeben, welche in der durch die beiden Kreise bestimmten Kegelschnittschaar vorkommen.

Insbesondere liegen zwei dieser Punkte auf der Centrale: *die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise* (J und A in Fig. 28). Analytisch kann man diese in folgender Weise erhalten.*) Die Gleichungen der Kreise in Liniencoordinaten sind (vgl. p. 31):

$$u^2 + v^2 - \frac{P^2}{r^2} = 0,$$

$$u^2 + v^2 - \frac{P'^2}{r'^2} = 0,$$

wo durch

$$P = ua + vb + 1 = 0,$$
$$P' = ua' + vb' + 1 = 0$$

bez. die Mittelpunkte der Kreise gegeben sind. Durch Subtraction der Kreisgleichungen erhalten wir dann das Punktepaar:

$$\frac{P^2}{r^2} - \frac{P'^2}{r'^2} = 0,$$

oder aufgelöst:

$$\frac{P}{r} - \frac{P'}{r'} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{P}{r} + \frac{P'}{r'} = 0. \tag{3}$$

In jedem dieser Punkte schneiden sich zufolge der Ableitung zwei der gemeinsamen Tangenten; (2) und (3) sind also die *Gleichungen*

*) Vgl. z. B. Hesse: Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, etc. Leipzig 1873, 2. Auflage.

der beiden Aehnlichkeitspunkte. Sie liegen harmonisch gegen die Mittelpunkte der Kreise und theilen den Abstand dieser im Verhältnisse der Radien (daher der Name). Ersteres zeigt unmittelbar die Gleichungsform; das andere folgt, weil die Abstände einer Linie (u, v) von den Mittelpunkten bez. gegeben sind durch:

$$\frac{P}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{P'}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

und weil diese Abstände, wenn die Linie durch einen Aehnlichkeitspunkt geht, wegen (2) und (3) noch bez. den Bedingungen:

$$(4) \qquad \frac{P}{P'} = \frac{r}{r'}, \quad \frac{P}{P'} = -\frac{r}{r'},$$

genügen müssen. Im ersten Falle sind beide Radien in derselben Richtung von der Centrale aus gemessen, dies gibt den *äusseren Aehnlichkeitspunkt,* im zweiten Falle in entgegengesetzter Richtung: *innerer Aehnlichkeitspunkt.* Für ersteren haben wir aus (2) die Coordinaten:

$$x = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a'}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}, \qquad y = \frac{\frac{b}{r} - \frac{b'}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}},$$

für den innern Punkt dagegen aus (3):

$$x = \frac{\frac{a}{r} + \frac{a'}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}, \qquad y = \frac{\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe können wir nunmehr *die Coordinaten der gemeinsamen Tangenten* unmittelbar berechnen, und zwar wie bei den Schnittpunkten mit Hülfe von nur quadratischen Gleichungen. Wir haben wegen (4) für

den äussern Punkt:	den innern Punkt:
$P = r\,z$	$P = r\,z$
$P = r'z$	$P' = r'z$
$u^2 + v^2 = z^2,$	$u^2 + v^2 = z^2,$

woraus durch Elimination von u, v jedesmal eine *quadratische* Gleichung für z resultirt. Die Coordinaten der beiden durch den betreffenden Aehnlichkeitspunkt gehenden Tangenten sind dann linear bestimmt. Sie werden für beide Punkte imaginär, wenn der eine Kreis innerhalb des andern liegt, nur für den innern, wenn sich die beiden Kreise in reellen Punkten schneiden. Die Aehnlichkeitspunkte sind jedoch immer reell vorhanden; der innere fällt bei äusserer, der äussere bei innerer Berührung mit dem Berührungspunkte zusammen. Der Satz von der Theilung der Centrale im Verhältnisse der Radien behält jedoch immer reelle Gültigkeit. —

Betrachten wir ein System von drei Kreisen:

$$K = 0\,, \quad K' = 0\,, \quad K'' = 0\,,$$

so sind die Gleichungen der bez. durch je zwei derselben bestimmten Chordalen:

$$K - K' = 0\,, \quad K' - K'' = 0\,, \quad K'' - K' = 0\,;$$

und da die Summe dieser drei Gleichungen Null ist, so haben wir unter Berücksichtigung einer oben für die Punkte der Chordalen erwähnten Eigenschaft den Satz:

Die durch drei Kreise bestimmten drei Chordalen schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte eines Kreises, welcher die drei gegebenen unter rechtem Winkel schneidet, des sogenannten Orthogonalkreises. In der That sind nämlich die Längen der Tangenten, welche man vom Mittelpunkte des letzteren an die drei Kreise legen kann, einander gleich. Bezeichnen wir die Längen dieser Tangenten mit ϱ, die Coordinaten des Mittelpunktes mit α, β, so haben wir zur Berechnung dieser Grössen die drei Gleichungen:

$$(\alpha - a\ )^2 + (\beta - b\ )^2 - r^{\ 2} = \varrho^2,$$
$$(\alpha - a'\ )^2 + (\beta - b'\ )^2 - r'^{\ 2} = \varrho^2,$$
$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 - r''^2 = \varrho^2,$$

und dies sind, wenn man noch

$$u = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2$$

setzt, drei für α, β, u lineare Gleichungen.

Der zuletzt bewiesene Satz gilt, wie man leicht übersieht, nicht nur für die drei gegebenen Kreise, sondern für alle die einfach unendlich vielen Kreise des Systems*):

$$K + \lambda K' + \mu K'' = 0,$$

wo λ, μ veränderliche Parameter sind. Entsprechendes muss aber auch für Curven zweiter Ordnung überhaupt gelten, die zwei feste Punkte gemein haben. Uebertragen wir die für Kreise gewonnenen Sätze demnach in eine allgemeinere Form, indem wir die imaginären Kreispunkte durch zwei beliebige Punkte ersetzen, so erhalten wir:

Von allen Kegelschnitten, welche dieselben zwei Punkte enthalten, haben je zwei eine bewegliche Sehne gemein. Zieht man von einem Punkte derselben die vier Tangenten an die beiden Kegelschnitte, so liegen die vier Berührungspunkte mit den beiden festen Punkten auf

---

*) Ein System von Kegelschnitten, in dem jede Curve von zwei linear vorkommenden Parametern abhängt, wird als *Kegelschnittnetz* bezeichnet. Auf die allgemeinen Kegelschnittnetze werden wir in der 3ten und 5ten Abtheilung dieser Vorlesungen zurückkommen.

einer Curve zweiter Ordnung. Nimmt man drei Curven des Systems, so schneiden ihre drei Sehnen sich in einem Punkte; die sechs von ihm an die Curven gelegten Tangenten berühren in sechs Punkten, die mit den beiden festen Punkten auf einem Kegelschnitte liegen. Der Pol der Verbindungslinie dieser beiden Punkte in Bezug auf letztere Curve ist der Schnittpunkt jener drei Sehnen.

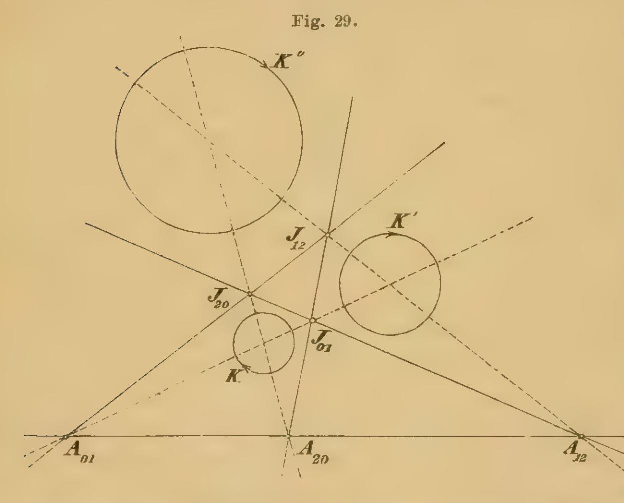
Von Interesse ist ferner in dem System der drei Kreise die Lage der durch je zwei bestimmten Aehnlichkeitspunkte. — Die drei äusseren von ihnen (A_{01}, A_{12}, A_{20} in Fig. 29) sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{P}{r} - \frac{P'}{r'} = 0, \quad \frac{P'}{r'} - \frac{P''}{r''} = 0, \quad \frac{P''}{r''} - \frac{P}{r} = 0,$$

und die drei inneren (I_{01}, I_{12}, I_{20} in Fig. 29) durch:

$$\frac{P}{r} + \frac{P'}{r'} = 0, \quad \frac{P'}{r'} + \frac{P''}{r''} = 0, \quad \frac{P''}{r''} + \frac{P}{r} = 0.$$

Fig. 29.



Da sowohl die Differenz je zweier Gleichungen der zweiten Reihe, vermehrt um die nicht darüber stehende der ersten Reihe, als auch die Summe der drei ersten Gleichungen identisch verschwindet, so haben wir den Satz:

Die durch je zwei von drei gegebenen Kreisen bestimmten sechs Aehnlichkeitspunkte bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits. Eine Seite desselben enthält die drei äusseren, jede andere einen äusseren und die zwei mit ihnen nicht auf derselben Centrale liegenden inneren Aehnlichkeitspunkte. Die drei Nebenseiten des Vierseits sind die Centralen der drei Kreise. —

Wir wollen die gewonnenen Resultate noch zur *Lösung einiger Aufgaben* verwerthen. Unter Benutzung des Satzes, dass sich die durch drei Kreise bestimmten Chordalen in einem Punkte schneiden, kann man zunächst auch für zwei sich nicht in reellen Punkten schneidende Kreise *die Chordale construiren.* Um einen Punkt dieser Linie zu finden, hat man nämlich nur den Schnittpunkt der Chordalen zu nehmen, welche ein beliebiger dritter, die ersten beiden in reellen Punkten treffender Kreis mit ihnen bestimmt. Wird der dritte Kreis

so gewählt, dass er die beiden gegebenen berührt, so schneiden sich die Tangenten desselben in den Berührungspunkten auf der gesuchten Chordale. Bei dieser Annahme des Hülfskreises fallen (bei äusserer Berührung) die beiden inneren Aehnlichkeitspunkte, welche er mit jedem der gegebenen Kreise bestimmt, mit den Berührungspunkten zusammen, und da dieselben zufolge unseres letzten Satzes auf einer Geraden mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise liegen müssen, so können, falls dieser Punkt bekannt ist, einfach zwei Punkte der Chordale gefunden werden, ohne dass man einen Hülfskreis zu zeichnen braucht. Man übersieht leicht, wie sich diese Betrachtung ändert, wenn man vom inneren Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise ausgeht. Noch einfacher gestaltet sich die Construction mit Hülfe des folgenden, aus der Elementargeometrie bekannten Satzes:

Legt man durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise irgend zwei Gerade, so liegen je zwei nicht homologe Schnittpunkte der einen Geraden mit den Kreisen und je zwei nicht homologe Schnittpunkte der anderen auf einem Kreise. Man hat also nur zwei solche Linien zu ziehen, von ihren 8 Schnittpunkten zwei Paare nicht homologer Punkte herauszuwählen und je zwei auf demselben Kreise liegende Punkte der letzteren zu verbinden, um als Schnitt der Verbindungslinien einen Punkt der Chordale zu erhalten.

Aus dem zuletzt erwähnten Satze folgt unmittelbar der folgende:

*Wenn zwei Kreise von zwei anderen berührt werden, so geht die Chordale eines jeden dieser Paare von Kreisen durch einen Aehnlichkeitspunkt des andern Paares, vorausgesetzt dass die beiden ersten Kreise von den beiden andern gleichartig berührt werden.**) Denn die Berührungspunkte eines jeden Kreises des einen Paares müssen als Aehnlichkeitspunkte mit einem solchen des andern Paares auf gerader Linie liegen; und zwei solche Geraden müssen sich auf der Chordale des letztern Paares schneiden, da die vier Berührungspunkte nach dem vorigen Satze auf einem Kreise liegen.

Durch diese Ueberlegungen sind wir in den Stand gesetzt, folgende, schon im Alterthume als Problem des Apollonius behandelte,

---

*) D. h. wir haben die folgenden Möglichkeiten:

1) Beide Kreise berühren die gegebenen Kreise von aussen, oder beide von innen, oder jeder der beiden Kreise berührt den einen von aussen, den andern von innen. Hier geht die Chordale des einen Paares durch einen äusseren Aehnlichkeitspunkt des andern.

2) Der eine Kreis berührt beide gegebene von aussen, der andere beide von innen, oder

3) der eine Kreis berührt den einen der gegebenen von aussen, den andern von innen, und der zweite Kreis verhält sich umgekehrt. Die Chordale geht in den beiden letzten Fällen durch einen inneren Aehnlichkeitspunkt.

Aufgabe ziemlich einfach zu lösen: *Es soll ein Kreis construirt werden, welcher drei gegebene Kreise berührt.*

Es seien α, β die Coordinaten des Mittelpunktes, ϱ der Radius für den gesuchten Kreis; alsdann haben wir zur Bestimmung dieser Grössen, wie man unmittelbar aus der Lage der Kreise ersieht, die drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&(a\ \ -\alpha)^2+(b\ \ -\beta)^2=(\varrho\pm r\ )^2\\
(5)\qquad &(a'\ -\alpha)^2+(b'\ -\beta)^2=(\varrho\pm r')^2\\
&(a''-\alpha)^2+(b''-\beta)^2=(\varrho\pm r'')^2.
\end{aligned}
$$

Es sind hier in den rechts stehenden Ausdrücken im Ganzen 8 verschiedene Vorzeichencombinationen möglich. Da sich jedoch durch gleichzeitige Aenderung sämmtlicher Vorzeichen die aufgestellten Gleichungen nicht ändern, so haben wir die folgenden vier Combinationen zu berücksichtigen:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\varrho+r, \quad \varrho+r', \quad \varrho+r'',\\
&\varrho-r, \quad \varrho+r', \quad \varrho+r'',\\
&\varrho+r, \quad \varrho-r', \quad \varrho+r'',\\
&\varrho+r, \quad \varrho+r', \quad \varrho-r''.
\end{aligned}
$$

Durch Benutzung einer jeden dieser Reihen erhalten wir nun zwei Lösungen, und *es sind daher im Ganzen acht Lösungen der Aufgabe möglich.* Setzen wir nämlich:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\alpha^2\ \ +\beta^2\ \ -\varrho^2\ \ &=u,\\
a^2\ \ +b^2\ \ -r^2\ \ &=c,\\
a'^2\ +b'^2\ -r'^2\ &=c',\\
a''^2+b''^2-r''^2&=c'',
\end{aligned}
$$

so erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen von r, r', r'' in den Gleichungen (5) z. B. alle positiv nehmen, die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{u+c}{2}&=a\ \alpha+b\ \beta+r\ \varrho\\
\frac{u+c'}{2}&=a'\alpha+b'\beta+r'\varrho\\
\frac{u+c''}{2}&=a''\alpha+b''\beta+r''\varrho.
\end{aligned}
$$

Hieraus können wir α, β, ϱ linear durch u ausdrücken, und dies in die quadratische Gleichung (7) eingesetzt, erlaubt in der That zwei Lösungen.

Die gestellte Aufgabe enthält eine Reihe specieller Fälle, welche durch sie von selbst mit gelöst sind: je nachdem man den Radius eines oder mehrerer der gegebenen Kreise unendlich klein oder unendlich gross werden lässt. Setzen wir z. B. $r=0$, so sind in den

Gleichungen (5) nur noch vier Vorzeichencombinationen möglich, ist auch $r' = 0$, so sind nur noch zwei Combinationen vorhanden; also:

Es gibt vier Kreise, welche zwei gegebene berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen.

Es gibt zwei Kreise, welche einen gegebenen berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen. Und endlich:

Es gibt einen Kreis, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Lassen wir dagegen r unendlich gross werden, so muss der Punkt (α, β) von der dadurch entstandenen Geraden um ϱ entfernt sein, und es ist die erste der Gleichungen (4) zu ersetzen durch (vgl. p. 23):

$$\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - d = \pm \varrho .$$

Da hierin nur $\pm \varrho$ und nicht ϱ^2 vorkommt, so sind immer noch 8 Lösungen möglich; ebenso wenn gleichzeitig $r' = \infty$ wird. Ist dagegen auch $r'' = \infty$, so haben wir statt der Gleichungen (5) die folgenden:

$$\begin{aligned} \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - d &= \pm \varrho \\ \alpha \cos \varphi' + \beta \sin \varphi' - d' &= \pm \varrho \\ \alpha \cos \varphi' + \beta \sin \varphi' - d'' &= \pm \varrho . \end{aligned}$$

Diese sind alle in ϱ linear, und es gibt nur noch vier wesentlich verschiedene Zeichencombinationen. Wir haben also:

Es gibt vier Kreise, welche drei gegebene gerade Linien berühren.

Es gibt acht Kreise, welche drei gegebene Kreise, oder zwei Kreise und eine Gerade, oder einen Kreis und zwei Gerade berühren.

Die constructive Behandlung unserer allgemeinen Aufgabe ergibt sich nun einfach aus den sogleich zu erwähnenden beiden Sätzen, die eine unmittelbare Folge der früheren sind. Es sei zuvor bemerkt, dass wir durch unsere Construction immer zwei der acht Kreise gleichzeitig finden, und zwar sind diese vier Paare dieselben, welche durch das Schema (6) gegeben sind, nämlich:

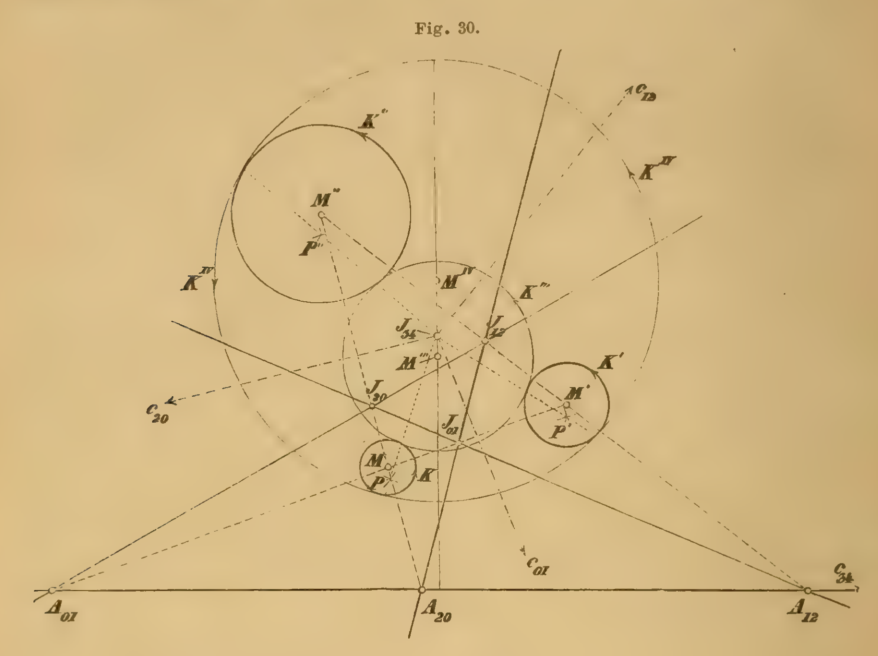
1) ein Kreis, der alle drei von innen und einer, der sie alle von aussen berührt;
2) ein Kreis, der K von innen, K' und K'' von aussen berührt, und einer, der K von aussen, K' und K'' von innen berührt;
3) ein Kreis, der K' von innen, K und K'' von aussen berührt, und einer, der K' von aussen, K und K'' von innen berührt;
4) ein Kreis, der K'' von innen, K und K' von aussen berührt, und einer, der K'' von aussen, K und K' von innen berührt.

Nehmen wir nun eines dieser Paare (K''' und K^{IV} in Fig. 30) mit je zwei der gegebenen Kreise zusammen, so muss die Chordale jedes Paares durch einen Aehnlichkeitspunkt des andern gehen; und somit folgen die Sätze:

Der Mittelpunkt des Orthogonalkreises der gegebenen Kreise ist ein

Aehnlichkeitspunkt für jedes der vier Paare der gesuchten Kreise, und zwar ein innerer für das erste Paar, ein äusserer für jedes der beiden anderen Paare.

Fig. 30.



$M^{(i)}$ ist der Mittelpunkt des Kreises $K^{(i)}$.
I_{ik} „ der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise $K^{(i)}$ und $K^{(k)}$.
A_{ik} „ „ äussere „ „ „ $K^{(i)}$ „ $K^{(k)}$.
c_{ik} „ die Chordale derselben Kreise.
$P^{(i)}$ „ der Pol von c_{34} in Bezug auf $K^{(i)}$.

Die Chordale jedes der vier Paare ist eine Seite des durch die sechs Aehnlichkeitspunkte der drei gegebenen Kreise bestimmten Vierseits (Aehnlichkeitsaxe); und zwar enthält die Chordale des ersten Paares die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte, die eines der anderen je einen äusseren und zwei innere Aehnlichkeitspunkte. Die drei Berührungssehnen für eins der vier Paare müssen nun als Verbindungslinien von zwei Aehnlichkeitspunkten (hier den Berührungspunkten) noch einen bestimmten dritten enthalten, d. h. wie man nach dem Vorhergehenden leicht übersieht, durch den Mittelpunkt des Orthogonalkreises der gegebenen Kreise gehen. Ferner schneiden sich die in den Berührungspunkten eines der drei Kreise gezogenen Tangenten auf der Chordale des betreffenden Paares (vgl. einen Satz auf p. 157), d. h. der Pol der Berührungssehne in Bezug auf den gegebenen Kreis liegt auf dieser Chordale. Daher muss der Pol der Chordale auf der

Berührungssehne liegen, und wir können so einen zweiten Punkt derselben finden, da die Chordalen als Aehnlichkeitsaxen der gegebenen Kreise bekannt sind.

Wir construiren also die Pole $[P, P', P'']$ einer der vier Aehnlichkeitsaxen (in Fig. 30 ist die äussere $[c_{34}]$ gewählt) in Bezug auf die drei Kreise, und verbinden dieselben mit dem Mittelpunkte des Orthogonalkreises (I_{34}); diese Verbindungslinien schneiden die gegebenen Kreise in 6 Punkten, in welchen zwei der gesuchten Kreise berühren; und damit ist unsere Aufgabe gelöst. In der That bietet die Construction der Mittelpunkte M''', M^{IV} der drei Kreise, welche mit I_{34} auf einer zu c_{34} senkrechten Linie liegen müssen, keinerlei Schwierigkeiten mehr.

VIII. Die Brennpunkte der Kegelschnitte.

In der Einleitung lernten wir bei Hyperbel und Ellipse zwei Punkte, bei der Parabel einen solchen kennen, welche zu diesen Curven in einer besonderen metrischen Beziehung standen, und welche wir als Brennpunkte derselben bezeichneten. Auf diese Punkte werden wir jetzt naturgemäss wieder geführt, wenn wir einen Kegelschnitt in seiner Beziehung zu den imaginären Kreispunkten betrachten; erst dadurch sind wir im Stande, die wahre Natur dieser merkwürdigen Punkte in voller Allgemeinheit aufzufassen.

Von einem jeden der Kreispunkte gehen nämlich, wie von jedem Punkte der Ebene, zwei (hier imaginäre) Tangenten an einen gegebenen Kegelschnitt; so entstehen vier Linien, welche sich noch in weiteren vier Punkten schneiden: in *den vier Brennpunkten des Kegelschnittes.* Von letzteren sind, wenn die Curve selbst reell ist, zwei (nicht auf derselben Tangente liegende) Punkte imaginär, die beiden anderen reell; und wir werden sehen, dass die reellen Brennpunkte mit den früher so genannten Punkten identisch sind. Analytisch werden die so definirten vier Punkte folgendermassen gefunden.

Es seien

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \Phi = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Liniencoordinaten; alsdann sind in der Schaar

$$F - \lambda \Phi = 0 \tag{1}$$

im Allgemeinen (vgl. p. 126) drei Punktepaare enthalten: die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten von F und Φ. Lassen wir insbesondere eins dieser Paare mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so geben die beiden anderen Paare die vier Brennpunkte. Um dies analytisch auszudrücken, brauchen wir nur

$$\Phi = u^2 + v^2$$

zu setzen, denn das System (1) wird dadurch nicht geändert, und dann können wir F in der Gestalt annehmen:*)

$$F = a^2 u^2 + b^2 v^2.$$

Dadurch geht die Gleichung (1) über in

$$(2) \qquad (a^2 - \lambda)\, u + (b^2 - \lambda)\, v - 1 = 0.$$

Das eine Punktepaar der Schaar erhalten wir für $\lambda = \infty$ (die Kreispunkte); für die beiden andern Paare bestimmt sich λ durch:

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0.$$

Setzen wir die Wurzeln dieser Gleichung in (2) ein, so ergeben sich die Gleichungen der beiden Paare von Brennpunkten in der Form:

$$(3) \qquad (b^2 - a^2)\, v^2 - 1 = 0$$

$$(4) \qquad (a^2 - b^2)\, u^2 - 1 = 0.$$

Nehmen wir, wie gewöhnlich $a^2 > b^2$ an, so stellt (2) die imaginären (3) die reellen Brennpunkte dar. Für die Coordinaten der letzteren findet man:

$$x = \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$
$$y = 0;$$

dieselben stimmen daher in der That mit den früher so bezeichneten Punkten überein (vgl. p. 8).

Wie diese vier Punkte, so werden auch ihre Polaren in Bezug auf F eine ausgezeichnete Stellung einnehmen. Die Gleichung von F in Punktcoordinaten ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

also die der Polare eines Punktes (x', y'):

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} - 1 = 0.$$

Setzen wir hierin die Coordinaten eines reellen Brennpunktes ein, so geht dies über in:

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

d. h. in die Gleichung einer der Directricen von F (vergl. p. 11). Also:

*) Die Transformation der Schaar $F + \lambda \Phi = 0$ auf die kanonische Form kommt also auf die Bestimmung der Hauptaxen von $F = 0$ zurück. Das letztere Problem erscheint somit jetzt als specieller Fall für die Aufsuchung des gemeinsamen Polardreiecks: es hängt nur von einer quadratischen Gleichung ab (p. 89), da eine Seite des Dreiecks, die unendlich ferne Gerade, schon bekannt ist.

Die Directricen eines Kegelschnittes sind die Polaren seiner reellen Brennpunkte.

Es gibt nun eine Menge von Sätzen über die merkwürdigen Eigenschaften der Brennpunkte, die bei unserer Behandlungsweise dieses Gegenstandes sich einfach als Specialfälle allgemeinerer Betrachtungen ergeben. Um den Charakter dieser Sätze zu zeigen, mögen nur noch einige derselben erwähnt werden.

Wir haben früher gesehen (vgl. p. 49), dass das Doppelverhältniss, nach dem eine beliebige Tangente eines Kegelschnittes vier feste Tangenten desselben schneidet, constant ist. Nehmen wir nun statt der vier festen Tangenten die zwei durch einen der Brennpunkte gehenden und zwei beliebige andere Tangenten, so ist also das Doppelverhältniss der vier Strahlen constant, welche von dem Brennpunkte nach den imaginären Kreispunkten und nach den Schnittpunkten der beweglichen Tangente mit den beiden festen gehen, oder mit anderen Worten:

Die Strecke, welche auf einer beweglichen Tangente des Kegelschnittes von zwei festen Tangenten ausgeschnitten wird, erscheint, von einem Brennpunkte aus gesehen, immer unter demselben Winkel.

Zieht man von einem beliebigen Punkte die beiden Tangenten an einen Kegelschnitt, so sind dieselben bekanntlich harmonisch zu je zwei conjugirten Polaren, welche durch den Punkt gehen. Nehmen wir daher statt dieses Punktes einen Brennpunkt, so haben wir, da die Tangenten dann durch die Kreispunkte gehen, den Satz:

Je zwei Linien, welche durch einen Brennpunkt gehen und auf einander senkrecht stehen, sind conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt. —

Das Kegelschnittsystem:

$$F - \lambda \Phi = 0,$$

von welchem wir ausgingen, ist ein specieller Fall der allgemeinen früher behandelten Kegelschnittschaar, und nur dadurch ausgezeichnet, dass die vier gemeinsamen Tangenten desselben durch die Kreispunkte gehen. Alle Curven dieser Schaar haben mit F dieselben Brennpunkte, denn diese waren als die Punktepaar der Schaar bestimmt; man nennt daher die Gesammtheit dieser Curven *ein System von confocalen Kegelschnitten.* Solche Systeme kommen in den Anwendungen häufig vor; wir wollen deshalb noch einige Eigenschaften derselben anführen, indem wir einfach unsere früheren allgemeineren Resultate entsprechend particularisiren. Wir erhalten so die folgenden Sätze:

Die Gleichung der Kegelschnitte eines confocalen Systems in Punktcoordinaten ist (wegen (2)):

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0 .$$

Jede Gerade der Ebene wird von einem Kegelschnitte des Systems berührt.

Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Curven des Systems (vgl. Fig. 31).

Die in dem System enthaltenen Punktepaare sind die imaginären Kreispunkte und die beiden Paare von Brennpunkten.

Es gibt keine in Linienpaare zerfallende Curven in dem System.

Alle Curven haben dieselben Hauptaxen; diese bilden mit der unendlich fernen Geraden zusammen das den Curven des confocalen Systems gemeinsame Polardreieck.

Die Tangenten der beiden durch einen Punkt gehenden Curven der Schaar sind die Doppelelemente der Involution, welche die durch den Punkt gehenden Tangentenpaare bilden (vgl. p. 135), d. h. sie sind stets harmonisch zu je zwei von dem Punkte an eine andere Curve der Schaar gelegten Tangenten, also in unserem Falle auch harmonisch zu den beiden Verbindungslinien des Punktes mit den Kreispunkten, oder mit anderen Worten:

Die beiden durch einen Punkt gehenden Kegelschnitte des confocalen Systems durchschneiden sich rechtwinklig.

Unter den von dem betrachteten Punkte an die Curven des Systems gehenden Tangentenpaaren sind auch insbesondere die Linien nach den beiden reellen Brennpunkten (F und F' in Fig. 31), auch diese sind also harmonisch zu den Doppelstrahlen der beiden vereinigt gelegenen involutorischen Strahlbüschel. Sie bilden daher, weil die letzteren auf einander senkrecht stehen, mit diesem gleiche Winkel (vgl. p. 40), d. h.

Die Tangente in einem Punkte eines Kegelschnittes bildet gleiche Winkel mit den Verbindungslinien ihres Berührungspunktes und der Brennpunkte. Und zwar gilt dieser, besonders für physikalische Anwendungen ausserordentlich wichtige Satz für jeden Kegelschnitt, ganz unabhängig von dem confocalen Systeme, von welchem wir ausgingen. —

Die Parameterwerthe für die beiden durch einen gegebenen Punkt (x, y) gehenden Kegelschnitte sind bestimmt durch die quadratische Gleichung für λ:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0 . \tag{5}$$

Sehen wir dann x und y als variabel an, so stellt dieselbe (wenn wieder $a^2 > b^2$)

für $b^2 > \lambda$ eine Ellipse,
für $b^2 < \lambda$, $a^2 > \lambda$ eine Hyperbel,
für $a^2 < \lambda$, $b^2 < \lambda$ einen imaginären Kegelschnitt

dar. Wir werden jedoch sehen, dass hier für reelle Werthe von x und y immer die beiden ersten Fälle möglich sind. Wir setzen:

$$f(\lambda) = x^2 (b^2 - \lambda) + y^2 (a^2 - \lambda) - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} f(a^2) &= x^2 (b^2 - a^2), \text{ also negativ}, \\ f(b^2) &= y^2 (a^2 - b^2), \text{ also positiv}, \\ f(-\infty) &= \{-\lambda^2 + \dots\}_{\lambda = -\infty}, \text{ also negativ.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Gleichungen, dass die beiden Wurzeln der Gleichung (5) reell sind, und dass die eine zwischen a^2 und b^2, die andere zwischen b^2 und $-\infty$ liegen muss. Zufolge der eben aufgestellten Merkmale für die besondere Art der durch (2) dargestellten Curven ergibt sich sonach:

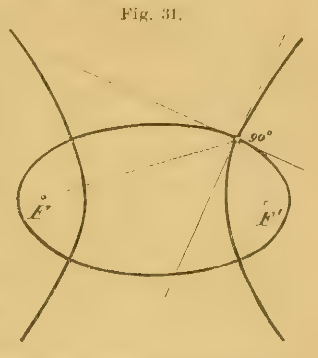


Fig. 31.

Durch jeden reellen Punkt der Ebene geht eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dem System confocaler Kegelschnitte angehören, und andere reelle Curven kommen ausser dem Paare der Brennpunkte nicht vor. Es ist leicht, sich hiernach ein Bild von der gegenseitigen Lage der Curven zu machen (vgl. Fig. 31).

Dass sich je zwei solche Kegelschnitte, die durch einen Punkt (x', y') gehen, rechtwinklig schneiden, ist unschwer analytisch einzusehen. Die Gleichungen der beiden Tangenten in dem Punkte sind, unter λ, μ die entsprechenden Parameterwerthe verstanden:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{x'x}{a^2 - \lambda} + \frac{y'y}{b^2 - \lambda} - 1 = 0, \\ \frac{x'x}{a^2 - \mu} + \frac{y'y}{b^2 - \mu} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Zieht man dieselben von einander ab, so findet sich unter Vernachlässigung eines Factors $(\lambda - \mu)$:

$$\frac{x^2}{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)} + \frac{y^2}{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)} = 0,$$

und dies ist in der That die Bedingung dafür, dass die Linien (6) auf einander senkrecht stehen. Den Factor $(\lambda - \mu)$ konnten wir fortlassen, da derselbe nur für einen auf den vier gemeinsamen Tangenten gelegenen Punkt verschwinden kann. In ähnlicher Weise sind auch die andern oben erwähnten Sätze leicht zu beweisen; es ist dies aber durch unsere allgemeinere Darstellung nicht nur vollständig, sondern auch in systematisch consequenter Weise geleistet.

Wir verlassen hiermit zunächst die Theorie der Curven zweiter Ordnung und Klasse, um uns zu anderen Betrachtungen von fundamentaler Bedeutung zu wenden. Dieselben werden uns neue Methoden und Hülfsmittel kennen lehren, deren Anwendung auf die Kegelschnitttheorie uns Gelegenheit geben wird, die Hauptmomente derselben noch einmal hervorzuheben und von einem neuen Gesichtspunkte aus zu überblicken. Es führt hierzu die allgemeine Invariantentheorie der algebraischen Formen, deren Wichtigkeit wir schon gelegentlich bei dem Probleme der gleichzeitigen Transformation zweier Kegelschnitte in die kanonische Form erkannt und hervorgehoben haben.

Dritte Abtheilung.

Einleitung in die Theorie der algebraischen Formen.

I. Vorbemerkungen. — Resultanten und Discriminanten.

Unter der *Theorie der algebraischen Formen* verstehen wir die Theorie der ganzen homogenen Functionen einer beliebigen Zahl von Veränderlichen, insbesondere hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber beliebigen linearen Transformationen der Variabeln. Dieselbe ist zuerst für die Zahlentheorie von grosser Bedeutung geworden; in *der* Form jedoch, in welcher wir sie im Folgenden behandeln wollen, ist sie im Wesentlichen aus der analytischen Geometrie erwachsen. Anfangs nur im Dienste dieser verwerthet, hat sie sich allmählich zu einer selbständigen Disciplin erhoben. Den ersten Anstoss dazu gaben wohl die Untersuchungen von Hesse über die ebenen Curven dritter Ordnung; ihre heutige Gestalt verdankt die Theorie jedoch wesentlich den Arbeiten englischer Mathematiker, unter denen Cayley und Sylvester vor Allen zu nennen sind, und denen sich in Deutschland besonders Aronhold anschliesst. Den Grundgedanken der heutigen Formentheorie können wir in folgender Weise aussprechen: Man führe in eine gegebene algebraische Form statt der n Veränderlichen, von welchen sie abhängt, n neue Veränderliche ein, welche mit den ursprünglichen durch n homogene lineare Gleichungen zusammenhängen. Alsdann geht die gegebene Form in eine andere über, welche mit ihr gewisse Eigenschaften gemein haben wird; *und das Studium solcher durch lineare Substitution unzerstörbaren Eigenschaften der Formen ist als Hauptaufgabe der Formentheorie zu bezeichnen.* Es kommt dies dann weiterhin im Wesentlichen darauf hinaus, solche homogene ganze Functionen der Coëfficienten (die auch noch Variable enthalten können) aufzustellen, welche bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante denselben Werth annehmen, gleichviel ob man sie für die ursprüngliche oder für die transformirte Function bildet, oder, wie man sich kurz ausdrückt, *welche die „Invarianteneigenschaft“ haben.* Beispiele für solche „invariante Bildungen“ haben wir schon bei den Kegelschnitten kennen gelernt; wir brauchen nur an die Discriminante einer Curve zweiter Ordnung oder an ihre Gleichung in Linien-

coordinaten zu erinnern. Geht nämlich die Gleichung einer solchen Curve:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

durch die Substitution:

$$x_i = \beta_i' y_1 + \beta_i'' y_2 + \beta_i''' y_3$$

über in

$$\Sigma a_{ik}' y_i y_k = 0,$$

so fanden wir, wenn r die aus den β gebildete Determinante bedeutet, für die Discriminante:

$$r^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix}$$

und für die linke Seite der Gleichung in Liniencoordinaten, wenn letztere für das neue Coordinatensystem durch v_i bezeichnet sind:

$$r^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & v_1 \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & v_2 \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Es wird hiernach klar sein, was im Allgemeinen unter der Invarianteneigenschaft zu verstehen ist. Gleichzeitig zeigen aber diese Beispiele den engen Zusammenhang der Theorie der *ternären algebraischen Formen*, d. h. derjenigen mit drei Variabeln, und der Geometrie der Ebene: Letztere erscheint geradezu als anschauliches Bild der ersteren. Sie entsteht direct aus dieser, indem man diejenigen Curven untersucht, welche durch Nullsetzen einer algebraischen Form dargestellt werden; und die zugehörigen invarianten Bildungen geben durch ihr Verschwinden Eigenschaften dieser Curven, welche von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig sind, resp., wenn sie noch Veränderliche enthalten, andere Curven, die zu der gegebenen in einer durch Coordinatentransformation unzerstörbaren Beziehung stehen.

In ähnlicher Weise, wie die Theorie der ternären Formen mit der sogenannten *projectivischen* Geometrie der Ebene identisch ist, d. h. mit der Theorie ebener Figuren (so weit dieselbe von metrischen Verhältnissen unabhängig dasteht) fällt die Theorie der „*quaternären*“ *Formen*, der Formen mit vier homogenen Variabeln, mit der projectivischen Geometrie des Raumes zusammen, d. h. mit der Theorie der Curven und Flächen im Raume. Die Formen mit mehr als vier Variabeln erlauben eine solche geometrische Interpretation nicht unmittelbar; man gebraucht daher für solche auch keine besonderen Namen

mehr, sondern untersucht dann sogleich Formen mit n Veränderlichen. Neben diese Eintheilung stellt sich eine andere *nach dem Grade, zu welchem die Veränderlichen in den untersuchten Formen vorkommen;* und nach diesem Grade behandelt man dann innerhalb der einzelnen, durch die Zahl der Variabeln getrennten Gebiete die verschiedenen Formen, von denen niedrigeren Grades zu höheren aufsteigend.

Für die Geometrie der Ebene würden wir also zunächst auf die ternären Formen näher eingehen müssen. Es gibt jedoch noch eine Vorstufe, welche wir bisher nicht so explicite berücksichtigt haben: *die Theorie der Formen mit zwei homogenen Veränderlichen, der binären algebraischen Formen.* Dieselbe findet, wie wir weiterhin sehen werden, ihre geometrische Interpretation in jedem Gebiete, dessen einzelne Inviduen nur von einer Variabeln (zunächst linear) abhängen, also insbesondere: in der *Geometrie auf einer Punktreihe* (Geraden) *oder in einem Strahlbüschel*,*) Gebilde, deren Untersuchung wir früher beiläufig durch Einführung eines Parameters schon begonnen haben (vergl. p. 33). Die weitere Entwicklung der ebenen Geometrie und mit ihr der ternären Formentheorie, sowie vor Allem ein systematisch consequentes Fortschreiten von einfachen Gebilden zu complicirteren erfordert unbedingt ein genaueres, directes Studium dieser binären Formen: die Geometrie auf der Geraden oder im Strahlbüschel ist ebenso als ein selbständiges Gebiet aufzufassen, wie die in der Ebene oder im Raume. In der That hat sich diese Theorie in den letzten Jahren auch schon zu einer umfassenden Wissenschaft selbstständig entwickelt; und wenn wir im Folgenden auf dieselbe eingehen, so müssen wir uns darauf beschränken, die Gesichtspunkte zu kennzeichnen, nach denen dieselbe in neuerer Zeit vorwiegend bearbeitet wurde.**) Nur die weiterhin geometrisch unmittelbar zu verwerthenden Abschnitte werden wir ausführlicher darlegen.

Die mehrfach erwähnte *geometrische Interpretation der binären Formen* ergibt sich in folgender Weise. Es seien auf einer geraden Linie zwei Punkte A, B (die „*Grundpunkte*") fest gegeben; ihr gegen-

---

*) Dazu tritt im Raume noch das Ebenenbüschel.

**) Die betreffenden Untersuchungen finden sich mehr oder weniger vollständig in den folgenden Werken zusammengefasst:

Cayley: Fourth und Fifth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions, vol. 148, 1858.

Salmon: Lessons introductory to the modern higher Algebra; deutsch von Fiedler. Leipzig 1863.

Fiedler: Elemente der neueren Geometrie. Leipzig 1862.

Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig 1872.

Auf letzteres Werk verweisen wir insbesondere für alle die Punkte, welche im Folgenden nur andeutungsweise berührt werden.

seitiger Abstand sei c. Ist nun p der Abstand eines beweglichen Punktes C von A, q der desselben Punktes von B, so ist immer

$$p + q = c\,. \tag{1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass p und q beide positiv gezählt werden, wenn C zwischen A, B liegt und dass, wenn dies nicht der Fall ist, der Abstand von dem näheren der beiden Punkte A, B negativ genommen wird. Es ist nun offenbar der Punkt C vollkommen bestimmt, sobald für ihn eine der Grössen p, q oder das Verhältniss beider bekannt ist; denn man kann in letzterem Falle wegen (1) p und q einzeln berechnen. Dasselbe gilt aber auch noch, wenn nicht das Verhältniss der bezeichneten Abstände selbst gegeben ist, sondern das Product desselben in eine gewisse Constante; und es ist zweckmässig diese Constante der Allgemeinheit wegen hinzuzufügen. Ein Punkt der Geraden ist daher durch zwei Zahlen x_1, x_2, *seine Coordinaten*, völlig bestimmt, wenn wir dieselben folgendermassen definiren:

Die Coordinaten (x_1, x_2) *eines Punktes sind zwei Zahlen, welche sich verhalten, wie die Abstände des Punktes einer Geraden von zwei festen Grundpunkten derselben, jeder Abstand multiplicirt mit einer beliebig aber fest gewählten Constanten.**) Bezeichnen wir diese Constanten mit a, b, und ist ϱ irgend eine willkürliche Grösse, so haben wir also die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= ap\,, \\ \varrho x_2 &= bq\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Jedem Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$ entspricht nur ein Werth von $\frac{p}{q}$, und somit auch nur ein Punkt der Geraden. Insbesondere ist der eine Grundpunkt gegeben durch $x_1 = 0$, der andere durch $x_2 = 0$. Die Bedeutung des Abstandsverhältnisses $\frac{x_1}{x_2}$ ist also für $a = b$ ganz dieselbe, wie die des früher zur Darstellung eines Punktes der Geraden benutzten Parameters λ, wo die Punkte der Verbindungslinie zweier Punkte $(x_0, y_0;\ x_1, y_1)$ gegeben waren durch die Gleichungen:

---

*) Man kann über diese Constanten insbesondere so verfügen, dass die Coordinaten als Doppelverhältnisse auffassbar sind. Man nimmt alsdann $a = b$ und zeichnet noch einen dritten Punkt aus, für den $\frac{x_1}{x_2} = 1$: den sogenannten *Einheitspunkt*. Der Quotient $\frac{x_1}{x_2}$ gibt dann für einen beliebigen Punkt (x_1, x_2) das *Doppelverhältniss*, welches derselbe mit den beiden Grundpunkten ($x_1 = 0$ und $x_2 = 0$) und dem Einheitspunkte ($x_1 = x_2$) bestimmt; und dadurch sind dann die Coordinaten rein projectivisch definirt; vgl. Fiedler: Darstellende Geometrie. Leipzig 1871, Anhang.

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}. \end{aligned}$$

Wir können daher alle an diesen Parameter geknüpften Betrachtungen über die Geometrie auf einer Geraden unmittelbar für unsere jetzige Anschauung, d. h. für das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2}$ verwerthen; mussten wir doch auch damals der Allgemeinheit wegen statt λ einen Parameter μ einführen, der von λ nur um eine von der Lage des Punktes auf der Geraden unabhängigen constanten Factor verschieden war.

Durch dieselben Gleichungen (3) stellten wir aber auch die Strahlen eines Büschels dar; wir hatten für ein solches:

$$u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda},$$

$$v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda},$$

Der Parameter λ ist wieder bis auf eine Constante gleich einem Abstandsverhältnisse, nämlich:

$$\lambda = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{s},$$

wo r, s die Längen der von einem Punkte des beweglichen Strahles auf die beiden Grundstrahlen gefällten Lothe bedeuteten. Wir können daher für die Grössen x_1, x_2 auch folgende geometrische Interpretation wählen:

Es sind x_1, x_2 zwei Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Lothe von einem beweglichen Strahle eines Strahlbüschels auf seine festen Grundstrahlen, die Länge eines jeden Lothes multiplicirt mit einer beliebig, aber fest gewählten Constanten. Wir haben in diesem Falle zu setzen:

$$\varrho x_1 = ar,$$

$$\varrho x_2 = bs,$$

wenn a, b wieder die willkürlichen Constanten bedeuten. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass auch die für Strahlbüschel früher gemachten Bemerkungen hier ohne Weiteres ihre Gültigkeit behalten. Im Folgenden werden wir jedoch die geometrischen Sätze nur für die Geometrie auf der Geraden aussprechen; die Uebertragung derselben auf Strahlbüschel ist dann selbstverständlich.

Die geometrische Bedeutung der linearen Transformationen, mit welchen wir es im Folgenden stets zu thun haben, ist hiernach sofort verständlich. Wählen wir als Grundpunkte statt A, B zwei andere Punkte A_1, B_1 der Geraden, von denen (um die Ideen zu fixiren) A_1

um d jenseits A, B_1 um e jenseits B liegen mag, und nennen y_1, y_2 die Coordinaten des Punktes C in Bezug auf diese neuen Grundpunkte, so sind y_1, y_2 proportional zu den Abständen des Punktes C von A_1 und B_1, multiplicirt mit zwei neuen Constanten α, β; und wir haben:

Fig. 32.

$$\sigma y_1 = \alpha (p + d),$$
$$\sigma y_2 = \beta (q + e),$$

also wegen (1), wenn wir statt $\sigma . c$ wieder σ schreiben:

$$\sigma y_1 = \alpha (cp + d (p + q))$$
$$\sigma y_2 = \beta (cq + e (p + q)).$$

Drücken wir noch p, q nach (2) durch x_1, x_2 aus, so kommt:

$$\sigma y_1 = \alpha \varrho \left\{ \frac{c + d}{a} x_1 + \frac{d}{b} x_2 \right\}$$
$$\sigma y_2 = \beta \varrho \left\{ \frac{c + e}{b} x_2 + \frac{e}{a} x_1 \right\},$$

oder, da es nur auf das Verhältniss $\frac{y_1}{y_2}$ ankommt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \sigma y_1 &= \alpha \{ b (c + d) x_1 + a d x_2 \} \\ \sigma y_2 &= \beta \{ b c x_1 + a (c + e) x_2 \}, \end{aligned}$$

Dies sind ganz allgemeine lineare Beziehungen zwischen den y und x, für welche auch die Bedingung, dass die Substitutionsdeterminante

$$\alpha \beta a b c (c + d + e)$$

nicht verschwindet, erfüllt ist; denn Letzteres würde nur eintreten für $c = 0$, d. h. wenn die Punkte A und B zusammenfallen, oder für $c + d + e = 0$, d. h. wenn die Punkte A_1 und B_1 zusammenfallen. Wir haben somit den Satz:

Jede lineare Substitution, deren Determinante nicht verschwindet, ist identisch mit einer Veränderung der Grundpunkte und der multiplicirenden Constanten in jener geometrischen Interpretation, bei welcher das Verhältniss der Veränderlichen durch einen Punkt einer Geraden dargestellt wird.

Auch die Coëfficienten in den Gleichungen (4) haben eine directe geometrische Bedeutung, es sind die Coordinaten der neuen Grundpunkte in Bezug auf die alten. Bezeichnen wir dieselben bez. mit x_1', x_2' und x_1'', x_2'', so ergibt sich unmittelbar aus der Bedeutung der Grössen a, b, c, d, e:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1' &= -ad, & \varrho x_1'' &= a (c + e), \\ \varrho x_2' &= b (c + d), & \varrho x_2'' &= -bc. \end{aligned}$$

Man erkennt dies auch daran, dass für die Punkte A_1, B_1 bez. die Gleichungen

$$(6) \qquad y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

bestehen müssen.*) Eine lineare Gleichung:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

stellt nämlich immer einen Punkt mit den Coordinaten $a_2, -a_1$ dar, wie sich durch Auflösung nach $\frac{x_1}{x_2}$ sofort ergibt; und hierdurch würde man wieder aus (6) die Relationen (5) erhalten.

Ueberhaupt können wir jede homogene Gleichung zwischen x_1, x_2:

$$f(x_1, x_2) = 0$$

als eine Gleichung für das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2}$ auffassen, für welches sich aus ihr im Allgemeinen eine bestimmte Anzahl von Werthen ergibt, oder geometrisch ausgedrückt:

Eine binäre algebraische Form von der n^{ten} Ordnung stellt, gleich Null gesetzt, ein System von n Punkten auf einer Geraden dar.

Wirklich construirbar sind diese Punkte jedoch nur alle, wenn die Gleichung für $\frac{x_1}{x_2}$ lauter reelle Wurzeln hat. Um auch die imaginären Wurzeln zu repräsentiren, werden wir auch von imaginären Punkten der Geraden sprechen, in ähnlicher Weise, wie wir früher solche Punkte in der Ebene schon mehrfach eingeführt haben.**) Es ist dann erlaubt, alle algebraischen Sätze auch geometrisch auszusprechen. unabhängig von der Realität der betreffenden Grössen. Dieselben gelten dann aber auch unabhängig von der Realität der Coëfficienten in den betreffenden binären Formen. *Wir können die letzteren daher auch stets als complexe Grössen voraussetzen*, wo dann der Form im Allgemeinen kein reeller Punkt entspricht; und es sei dies im

*) Vgl. die entsprechenden Bemerkungen für die lineare Transformation ternärer Formen auf p. 69.

**) Auch die imaginären Wurzeln kann man geometrisch repräsentiren, wenn man nach Gauss die complexe Ebene ($x + iy$) als Träger des binären Gebietes betrachtet, oder besser bie Riemann'sche Kugelfläche (vgl. z. B. C. Neumann: Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig 1863), wie dies in der Functionentheorie üblich ist. Vgl. hierüber Möbius: Berichte der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften; math.-phys. Klasse, 1852 und 1853, oder Crelle's Journal, Bd. 52, p. 218 und 229; ferner Beltrami: Sulla geometria delle forme binarie cubiche, Acad. di Bologna, 1871; F. Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, p. 47. — In Betreff einer *rein* projectivischen Definition der imaginären Elemente des binären Gebietes vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857; Stolz: Math. Annalen, Bd. 4 und Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, ib. Bd. 8.

Gegensatze zu der in der Kegelschnitttheorie gemachten Voraussetzung ausdrücklich hervorgehoben.

Die Bedingung, dass ein solches System von Punkten eine von der Lage der Grundpunkte unabhängige Eigenschaft habe, wird nach den angeführten allgemeinen Bemerkungen gegeben durch das Verschwinden einer ganzen rationalen Function der Coëfficienten der das Punktsystem darstellenden Form, welche die Invarianteneigenschaft hat.*) *Eine solche Function der Coëfficienten wird als Invariante der Form bezeichnet.*

Ferner wird es im Allgemeinen für ein gegebenes Punktsystem gewisse andere Punktsysteme geben, welche zu demselben eine ausgezeichnete, von der Lage der Grundpunkte unabhängige Beziehung haben. Eine Punktgruppe der Art wird dann durch das Verschwinden einer Function dargestellt, welche die Invarianteneigenschaft hat, und welche ausser den Coëfficienten der gegebenen Form auch noch die Veränderlichen x_1, x_2 enthält. *Eine solche Function heisst eine Covariante der gegebenen Form.* Dass die Ordnung einer solchen Covariante in den Veränderlichen, wie überhaupt jeder Form, bei linearer Transformation ungeändert bleibt, ist unmittelbar ersichtlich. Betrachtet man gleichzeitig mehrere Formen, so wird es invariante Bildungen geben, welche gleichzeitig von den Coëfficienten der verschiedenen Formen abhängen; diese werden dann *simultane Covarianten oder simultane Invarianten des Systems* genannt, je nachdem sie die Veränderlichen enthalten, oder nicht.

Bezeichnen wir also durch a_0, a_1, $a_2 \ldots$ die Coëfficienten der Form $f(x_1, x_2)$ und durch a_0', a_1', $a_2' \ldots$ die einer Form $F(y_1, y_2)$, wo F aus f durch eine lineare Transformation entsteht, ist ferner Π eine ganze rationale Function ihrer Argumente und r die Substitutionsdeterminante, *so ist eine Invariante von f definirt durch***):

---

*) Es kann auch eintreten, dass das Verschwinden einer oder mehrerer Invarianten nicht genügt, um die betreffende Eigenschaft darzustellen, sondern dass dazu noch das identische Verschwinden von Covarianten erforderlich ist. — Näher werden wir auf diese Frage bei den ternären Formen eingehen, dort auch die betreffenden Beweise erbringen, nachdem wir in der Theorie der binären Formen Beispiele für das Verschwinden von Covarianten kennen gelernt haben.

**) Daneben stellt sich eine andere Definition der Invarianten durch gewisse partielle Differentialgleichungen, deren rationale Lösungen sie sind. Vgl. Cayley: Crelle's Journal, Bd. 47 und Aronhold: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, ib. Bd. 62. Für diese Fragestellung ist ferner von Wichtigkeit der Aufsatz Christoffel's: Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie, Borchardt's Journal, Bd. 68; vgl. auch Aronhold, ib. Bd. 69. Letzterer gibt noch eine andere Definition, wobei die Invarianten durch die Relationen bestimmt sind, welche unabhängig von den Transformationscöefficienten zwischen den Coëfficienten zweier Formen bestehen, wenn dieselben linear in einander transformirbar sein sollen. Ueber jene Differentialgleichungen vergl. auch Clebsch: Theorie der binären Formen, § 80, und Borchardt's Journal, Bd. 65, p. 267.

$$\Pi\,(a_0', a_1', a_2' \ldots) = r^\lambda\,\Pi\,(a_0, a_1, a_2 \ldots),$$

und eine Covariante von f durch:

$$\Pi\,(a_0', a_1', a_2' \ldots;\ y_1, y_2) = r^\lambda\,\Pi\,(a_0, a_1, a_2 \ldots;\ x_1, x_2).$$

Es möge dies an einigen *Beispielen* erläutert werden.

Es seien zunächst zwei Formen beliebiger Ordnung:

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

gegeben; dann ist, wie wir zeigen wollen, die Form:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

die sogenannte *Functional-* oder (nach ihrem Entdecker) Jacobi'*sche Determinante* von f und φ*), eine simultane Covariante der letzteren. Machen wir nämlich die lineare Substitution:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ x_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2. \end{aligned} \tag{7}$$

und sind $F(y_1, y_2)$, $\Phi(y_1, y_2)$ bez. die Formen, in welche f, φ dadurch übergehen, so sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \beta\frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta\frac{\partial f}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{8}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \beta\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

In Folge dessen geht unsere Determinante, gebildet für die Formen F, Φ über in:

$$\begin{vmatrix} \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma\dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \beta\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \delta\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \alpha\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \beta\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \delta\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

und nach dem Multiplicationssatze der Determinanten haben wir also:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

*) Vgl. Jacobi: De determinantibus functionalibus, Crelle's Journal, Bd. 22. — Gleich Null gesetzt gibt dieselbe die Punkte, deren lineare Polaren (vgl. den folgenden Abschnitt) in Bezug auf f und φ identisch sind.

d. h. *die Functionaldeterminante von f und φ ist eine simultane Covariante,* q. e. d.; in unserem Falle ist nämlich:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}.$$

Ein Beispiel für eine Covariante einer einzigen gegebenen Form $f(x_1, x_2)$ gibt uns die Determinante aus den zweiten Differentialquotienten derselben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

welche nach ihrem Entdecker Hesse*) gewöhnlich als die Hesse'*sche Determinante* von f bezeichnet wird. Es sei wieder $F(y_1, y_2)$ die Form, in welche $f(x_1, x_2)$ durch die Transformation (7) übergeht; dann folgt durch Differentiation der Gleichungen (8):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} &= \frac{\partial p}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial p}{\partial x_2}\gamma \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} &= \frac{\partial p}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial p}{\partial x_2}\delta = \frac{\partial q}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial q}{\partial x_2}\gamma \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} &= \frac{\partial q}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial q}{\partial x_2}\delta,
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(9) \qquad \begin{aligned} p &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma \\ q &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die für F gebildete Determinante ein, so wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial p}{\partial x_2}\gamma & \frac{\partial p}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial p}{\partial x_2}\delta \\ \frac{\partial q}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial q}{\partial x_2}\gamma & \frac{\partial q}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial q}{\partial x_2}\delta \end{vmatrix};$$

und dies ist nach dem Determinantenmultiplicationssatze

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_1} & \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Wenden wir endlich hierauf unter Berücksichtigung der Gleichungen (9) noch einmal den mehrfach erwähnten Multiplicationssatz an, so kommt:

*) Vgl. Crelle's Journal, Bd. 28, p. 83.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = r^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix};$$

d. h. *die* Hesse'*sche Determinante einer Form ist eine Covariante derselben.*

Eine *simultane* Invariante zweier Formen f, φ ist jedenfalls durch die Bedingung gegeben, dass die beiden zugehörigen Punktgruppen einen Punkt gemeinsam haben, denn diese Bedingung ist von der zufälligen Lage der Coordinatengrundpunkte unabhängig. Sind beide Formen linear, so ist dieselbe leicht zu bilden. Es bestehen dann für den gemeinsamen Punkt die Gleichungen:

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$
$$\varphi = b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0,$$

und die Elimination der x ergibt für die fragliche Bedingung das Verschwinden der Determinante:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dies ist aber nichts anderes, als die Functionaldeterminante von f, φ; sie hat daher in der That die Invarianteneigenschaft. Letzteres ergibt sich auch direct in derselben Weise, wie das Entsprechende für Functionaldeterminanten nachgewiesen wurde. Durch Anwendung der Substitution (7) nämlich gehen f und φ bez. über in:

$$F = (a_1 \alpha + a_2 \gamma)\, y_1 + (a_1 \beta + a_2 \delta)\, y_2$$
$$\Phi = (b_1 \alpha + b_2 \gamma)\, y_1 + (b_1 \beta + b_2 \delta)\, y_2;$$

und unsere Determinante, gebildet für diese beiden Formen, zerfällt sofort wieder in das Product:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ q. e. d.}$$

Ist nur *eine* lineare Form gegeben, so stellt dieselbe einen einzelnen Punkt dar; ein solcher kann aber offenbar keine geometrische Eigenschaft mehr haben ausser der, dass er überhaupt vorhanden ist, d. h. dass die betreffende lineare Form nicht identisch verschwindet, d. h. nicht jeder ihrer Coëfficienten einzeln Null ist. Also: *Es gibt keine Invariante einer linearen Form.* Anders ist dies schon, wenn eine quadratische Form vorliegt; denn hier können die beiden ihr entsprechenden Punkte zusammenfallen. Soll dies eintreten, so muss die durch Nullsetzen der Form entstehende quadratische Gleichung für $\frac{x_1}{x_2}$:

$$f = a_0 x_1^2 + 2\, a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln haben; und die Bedingung hierfür ist bekanntlich:

(12) $$a_0 a_2 - a_1^2 = 0.$$

Dies ist aber bis auf einen Zahlenfactor die Hesse'sche Determinante der Form f, denn wir haben hier:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2\, a_0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = 2\, a_1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2\, a_2\,,$$

und somit:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 4\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,.$$

Da sich nun die Hesse'sche Determinante, wie soeben gezeigt ist, stets bei einer linearen Transformation nur um das Quadrat der Substitutionsdeterminante ändert, so ist dies auch mit dem Ausdrucke (12) der Fall, d. h. *derselbe ist eine Invariante von f.*

Die hier zuletzt gegebenen Beispiele für Invarianten sind specielle Fälle von invarianten Bildungen allgemeinerer Art, die man bez. als *Resultanten* und *Discriminanten* bezeichnet*); diese sind allgemein in folgender Weise definirt:

Die Resultante zweier Formen f und φ ist diejenige ganze Function ihrer Coëfficienten, welche verschwinden muss, damit ein Punkt der zu f gehörigen Punktgruppe mit einem Punkte der zu φ gehörigen Gruppe zusammenfalle; d. h. damit die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ eine gemeinsame Wurzel haben.

Die Discriminante einer Form f ist diejenige ganze Function ihrer Coëfficienten, welche verschwindet, sobald zwei Punkte der zu f gehörigen Gruppe zusammenfallen, d. h. sobald die Gleichung $f = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat.

Für diese Functionen kann man nun ganz allgemeine Bildungsgesetze angeben; und zwar folgen die für die Discriminanten aus denen für die Resultanten. Wir beginnen daher mit den letzteren.

Ist eine Gleichung n^{ten} Grades für $x : f = 0$ gegeben, und sind $p, p^{(1)}, p^{(2)} \ldots p^{(n-1)}$ die Wurzeln derselben, so ist bekanntlich, wenn c eine Constante bedeutet:

$$f = c\,(x - p)\,(x - p^{(1)})\,(x - p^{(2)}) \ldots (x - p^{(n-1)}).$$

---

*) Vgl. hierüber neben den erwähnten Werken von Clebsch und Salmon: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig 1870, § 11 und für die später zu besprechende symbolische Darstellung besonders: Gordan: Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen, Math. Annalen, Bd. 3.

Setzen wir nun $x = \frac{x_1}{x_2}$, so ist f eine binäre Form, und setzen wir gleichzeitig $p = \frac{p_1}{p_2}$, $p^{(1)} = \frac{p_1^{(1)}}{p_2^{(1)}}$, ... $p^{(n-1)} = \frac{p_1^{(n-1)}}{p_2^{(n-2)}}$, so sind die p die Coordinaten der die Form f repräsentirenden Punkte. Wir haben dann für $\gamma = c \cdot p_2 p_2^{(1)} \ldots p_2^{(n-1)}$:

$$f = \gamma\,(x_1 p_2 - x_2 p_1) \cdot (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)})(x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) \ldots (x_1 p_2^{(n-1)} - x_2 p_1^{(n-1)}),$$

oder wenn wir zur Abkürzung (rs) für die Determinante $(r_1 s_2 - r_2 s_1)$ schreiben:

$$f = \gamma\,(xp)\,(xp^{(1)})\,(xp^{(2)}) \ldots (xp^{(n-1)}). \tag{13}$$

Ist ferner eine zweite Form φ vom m^{ten} Grade gegeben, und sind q die Coordinaten ihrer Verschwindungspunkte, so haben wir ebenso:

$$\varphi = \gamma'\,(xq)\,(xq^{(1)})\,(xq^{(2)}) \ldots (xq^{(m-1)}). \tag{14}$$

Soll nun ein Punkt $p^{(\mu)}$ von f mit einem Punkte $q^{(\nu)}$ von φ zusammenfallen, so muss die Determinante

$$(p^{(\mu)} q^{(\nu)}) = p_1^{(\mu)} q_2^{(\nu)} - p_2^{(\mu)} q^{(\nu)}$$

verschwinden. In diesem Falle muss auch immer die gesuchte Resultante R ihrer Definition nach Null werden, und zwar für jedes Werthepaar der Indices μ; ν. Andererseits darf diese Function aber auch nur unter dieser Bedingung verschwinden; sie muss daher das Product aller der Determinanten $(p^{(\mu)} q^{(\nu)})$ sein, und wir haben:

$$\begin{array}{llllll} R = & (p\,q) & (p\,q') & (p\,q'') & \ldots\ldots & (p\,q^{(m-1)}) \\ \cdot & (p'\,q) & (p'\,q') & (p'\,q'') & \ldots\ldots & (p'\,q^{(m-1)}) \\ \cdot & (p''\,q) & (p''\,q') & (p''\,q'') & \ldots\ldots & (p''\,q^{(m-1)}) \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ & (p^{(n-1)}\,q) & (p^{(n-1)}\,q') & (p^{(n-1)}\,q'') & \ldots\ldots & (p^{(n-1)}\,q^{(m-1)}) \end{array} \tag{15}$$

Uns kommt es jedoch wesentlich darauf an, die Resultante in Function der Coëfficienten von f und φ, ohne Benutzung der Verschwindungswerthe p, q zu bilden. Die Coëfficienten einer dieser Formen sind leicht in R einzuführen; denn die Horizontalreihen in dem gegebenen Ausdrucke (15) entstehen, wenn man in φ die x der Reihe nach durch die verschiedenen p ersetzt und die Verticalreihen, indem man in f die x durch die q ersetzt. Es ist somit auch:

$$\begin{aligned} R &= f\,(q_1, q_2) \cdot f\,(q_1', q_2') \cdot f\,(q_1'', q_2'') \ldots f\,(q_1^{(m-1)}, q_2^{(m-1)}) \\ &= \varphi\,(p_1, p_2) \cdot \varphi\,(p_1', p_2') \cdot \varphi\,(p_1'', p_2'') \ldots \varphi\,(p_1^{(n-1)}, p_2^{(n-1)}), \end{aligned}$$

und die Form dieser Bildungen ergibt unmittelbar den Satz:

Die Resultante zweier Formen der m^{ten} und n^{ten} Ordnung ist in den Coëfficienten derselben homogen und vom n^{ten} Grade in den Coëfficienten der ersten, vom m^{ten} Grade in den Coëfficienten der zweiten.

Zur directen Darstellung der Resultante in Function der Coëfficienten beider Formen hat man verschiedene Methoden, die jedoch im Ganzen keinen Einblick in die eigentlichen Bildungsgesetze liefern, wenigstens nicht in dem Sinne, wie es die Invariantentheorie fordern muss. Man kann z. B. nach dem Vorgange von Sylvester in folgender Weise verfahren:

Wenn für einen Werth von x f und φ verschwinden ($x = \frac{x_1}{x_2}$ gesetzt), so müssen auch die folgenden $m + n$ Gleichungen bestehen:

$$f = 0, \quad x \cdot f = 0, \quad x^2 \cdot f = 0, \ldots \, x^{m-1} \cdot f = 0,$$
$$\varphi = 0, \quad x \cdot \varphi = 0, \quad x^2 \cdot \varphi = 0, \ldots \, x^{n-1} \cdot \varphi = 0.$$

Aus ihnen können wir dann die $(m + n)$ Grössen: $1, x, x^2, \ldots x^{m+n-1}$ eliminiren und erhalten so die Resultante in der Form einer $(m + n)$-gliedrigen Determinante. Ist z. B. f vom zweiten, φ vom dritten Grade, also:

$$f = a_0 x^2 + 2\,a_1 x + a_2$$
$$\varphi = b_0 x^3 + 3\,b_1 x^2 + 3\,b_2 x + b_3,$$

so bestehen für eine gemeinsame Wurzel die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x^2 \cdot f &= a_0 x^4 + 2\,a_1 x^3 + a_2 x^2 &= 0\\
x \cdot f &= a_0 x^3 + 2\,a_1 x^2 + a_2 x &= 0\\
f &= a_0 x^2 + 2\,a_1 x + a_2 &= 0\\
x \cdot \varphi &= b_0 x^4 + 3\,b_1 x^3 + 3\,b_2 x^2 + b_3 x &= 0\\
\varphi &= b_0 x^3 + 3\,b_1 x^2 + 3\,b_2 x + b_3 &= 0,
\end{aligned}$$

und die Elimination von $x^4, x^3, x^2, x, 1$ ergibt:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Schon etwas übersichtlicher wird das Eliminationsresultat bei zwei Formen gleicher Ordnung nach einer von Bézout und Cayley gegebenen Methode. Sind nämlich f und φ beide von der n^{ten} Ordnung, so ist:

$$f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y)$$

ein Ausdruck, welcher unabhängig von y für einen gemeinsamen Punkt

von f und φ verschwindet, und der durch $(x - y)$ theilbar sein muss, da er für $x = y$ Null wird. Daher ist

$$F(x, y) = \frac{f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y)}{x - y}$$

eine Form von der Ordnung $(n - 1)$ in den x, die für jeden Werth von y verschwindet, sobald x eine gemeinsame Wurzel von f und φ ist. Ordnen wir F nach Potenzen von y, so erhalten wir dafür die Form:

$$\begin{aligned}(16)\quad F = \;& c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \ldots + c_{0\,n-1}x^{n-1} \\ & + y\;(c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \ldots + c_{1\,n-1}x^{n-1}) \\ & + y^2\;(c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + \ldots + c_{2\,n-1}x^{n-1}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y^{n-1}(c_{n-1,0} + c_{n-1,1}x + c_{n-1,2}x^2 + \ldots + c_{n-1,n-1}x^{n-1}).\end{aligned}$$

Soll diese Function nun unabhängig von y verschwinden, so müssen die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von y sämmtlich Null sein. Dies gibt n Gleichungen, aus denen wir die Grössen $1, x, x^2 \ldots. x^{n-1}$ eliminiren können, um dann die Resultante in Gestalt einer Determinante zu bekommen, nämlich:

$$R = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \ldots & c_{0\,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1\,n-1} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hülfe der eingeschobenen Form F haben wir in diesem Falle die Resultante auf eine $n$gliedrige Determinante reducirt, während sie nach der Sylvester'schen Methode $2n$ Reihen enthalten würde. —

Auf die Elimination von x aus zwei Gleichungen von gleich hohem Grade lässt sich auch immer die Bildung der *Discriminante* zurückführen. Soll nämlich eine Form n^{ter} Ordnung $f(x_1, x_2)$, wenn man sie wie in (13) in ihre linearen Factoren auflöst, das Quadrat eines derselben enthalten, so kommt dieser Factor in den Functionen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ noch linear vor, wenn man für x_1, x_2 die Coordinaten des betreffenden doppelt zählenden Punktes einsetzt; und man hat daher für diesen Punkt gleichzeitig die beiden Gleichungen $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(17)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Aus ihnen sind x_1, x_2 zu eliminiren. Die Gleichung $f = 0$ brauchen wir dabei nicht mehr zu berücksichtigen, denn sie ist wegen der Relation:

$$n f = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2$$

eine Folge der Gleichungen (17).

Die Discriminante einer Form ist also die Resultante der beiden ersten Differentialquotienten der Form und daher vom Grade $2(n-1)$ *in den Coëfficienten derselben.*

Als Function der Wurzeln von $f = 0$ können wir die Discriminante, ähnlich wie die Resultante, leicht darstellen. Sie muss nämlich immer und nur dann verschwinden, wenn zwei Wurzeln $\frac{p_1^{(i)}}{p_2^{(i)}}$ und $\frac{p_1^{(k)}}{p_2^{(k)}}$ von $f = 0$ einander gleich werden. Eine Function der Art ist aber jedenfalls das Product aller Factoren

$$p_1^{(i)} p_2^{(k)} - p_2^{(i)} p_1^{(k)} = (p^{(i)} p^{(k)}),$$

welche man aus den n Wurzeln von f bilden kann, d. h. der Ausdruck:

$$\begin{aligned} P = (p^{(1)} p^{(2)}) \,.\, (p^{(1)} p^{(3)}) \,.\, (p^{(1)} p^{(4)}) \,.\,.\,.\,.\, &(p^{(1)} \quad p^{(n)}) \\ .\, (p^{(2)} p^{(3)}) \,.\, (p^{(2)} p^{(4)}) \,.\,.\,.\,.\, &(p^{(2)} \quad p^{(n)}) \\ .\, (p^{(3)} p^{(4)}) \,.\,.\,.\,.\, &(p^{(3)} \quad p^{(n)}) \\ \ldots\ldots\ldots \\ .\, &(p^{(n-1)} p^{(n)}) \,. \end{aligned}$$

Das „Differenzenproduct“ P ändert aber sein Zeichen, wenn man irgend zwei der Wurzeln mit einander vertauscht, was bei einer rationalen Function der Coëfficienten von f, wie es die Discriminante ist, nicht eintreten darf, weil diese Coëfficienten dadurch nicht geändert werden. Da sich nun eine *symmetrische* Function der Wurzeln immer als *rationale* Function der Coëfficienten darstellen lässt, so *ist die Discriminante durch das Quadrat des Differenzenproductes der Wurzeln von* $f = 0$ *gegeben,* d. h. durch das Quadrat von P.

Um ein Beispiel für die Bildung der Discriminante als Resultante der Formen $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ zu geben, führen wir dieselbe noch für eine cubische Form aus. Ist also:

$$f = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_2 + 3 c x_1 x_2^2 + d x_2^3,$$

so haben wir die Resultante zu bilden aus:

$$\tfrac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial x_1} = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 ,$$

$$\tfrac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial x_2} = b x_1^2 + 2 c x_1 x_2 + d x_2^2 .$$

und daher ist die Discriminante von f, wenn wir das Sylvester'sche Eliminationsverfahren anwenden

$$= \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Diese Betrachtungen haben uns allerdings gezeigt, wie es möglich ist, die Resultanten und Discriminanten allgemein aufzustellen; aber dieselben erscheinen in einer Form, welche uns nicht ohne weitläufige Rechnungen ihren invarianten Charakter erkennen lässt, obgleich letzterer nach ihrer Bedeutung vorhanden sein muss. Man kann jedoch die fraglichen Bildungen auch in solcher Form herstellen, dass ihre Invarianteneigenschaft, auf die es uns hier wesentlich ankommt, sofort in's Auge fällt; und zwar geschieht dies mit Hülfe der im Folgenden zu entwickelnden Methoden. Dieselben lassen nämlich überhaupt jede Invariante und Covariante so darstellen, dass sie als solche ohne weitere Rechnung sofort erkannt wird.

II. Die symbolische Darstellung der binären Formen.

Die für die weitere Entwicklung der Invariantentheorie fundamentale Betrachtungsweise, welcher wir uns jetzt zuwenden, stützt sich im Wesentlichen auf den folgenden Satz:

Ist Π eine Function der Coëfficienten $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ einer allgemeinen Form n^{ter} Ordnung $f(x_1, x_2)$, welche die Invarianteneigenschaft besitzt, so hat die Form:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} b_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} b_n$$

ebenfalls die Invarianteneigenschaft, wenn die b die entsprechenden Coëfficienten einer anderen Form n^{ter} Ordnung φ sind.

Legen wir nämlich statt f die Form $f + \varkappa\varphi$ zu Grunde, so muss Π eine Invariante dieser Form sein, sobald man darin die a durch die Coëfficienten $a + \varkappa b$ ersetzt, da die Form $f + \varkappa\varphi$ von ebenso allgemeiner Natur ist, als f; und zwar muss dies unabhängig von dem Werthe von $\varkappa$ stattfinden. Es ist also:

$$\Pi(a_0' + \varkappa b_0', a_1' + \varkappa b_1', \dots a_n' + \varkappa b_n') = r^\lambda \Pi(a_0 + \varkappa b_0, a_1 + \varkappa b_1, \dots a_n + \varkappa b_n),$$

wenn die gestrichenen Buchstaben die Coëfficienten von Formen sind, welche aus f und φ durch eine lineare Transformation mit der Determinante r hervorgehen. Diese Gleichung soll unabhängig von $\varkappa$ bestehen, und folglich müssen, wenn man nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt, die Coëfficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten dieselben sein. Insbesondere hat man also für die erste Potenz von $\varkappa$:

$$(1)\quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_0'} b_0' + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1'} b_1' + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n'} b_n' = r^\lambda \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} b_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} b_n \right\},$$

und damit ist unser Satz bewiesen. Man erkennt auch leicht, dass derselbe ebenso für eine simultane Invariante eines Systems von Formen gilt: Fügt man diesem Systeme eine weitere Form φ hinzu, so erhält man eine simultane Invariante des so erweiterten Systems, indem man eine simultane Invariante des ursprünglich gegebenen Systems in der bezeichneten Weise nach den Coëfficienten einer der gegebenen Formen, welche mit φ von gleicher Ordnung ist, differentiirt, bez. mit den Coëfficienten von φ multiplicirt und addirt. — Setzt man dann in (1) $b_i = a_i$, so entsteht nach dem Euler'schen Satze von den homogenen Functionen wieder bis auf einen Zahlenfactor die ursprüngliche Invariante Π.

Der Grad von Π in den Coëfficienten von f wird durch Anwendung dieses Differentiationsprocesses jedesmal um eine Einheit verringert. Wir können daher, indem wir nach einander die Coëfficienten verschiedener neuer Formen einführen, es erreichen, dass aus Π eine in den Coëfficienten aller dieser Formen und in denen von f lineare Invariante entsteht. *So wird eine Invariante ν^{ten} Grades in den Coëfficienten einer gegebenen Form n^{ter} Ordnung unzweideutig vorgestellt durch eine Invariante, welche die Coëfficienten von ν Formen n^{ter} Ordnung je zum ersten Grade enthält, und bis auf einen Zahlenfactor in die gegebene Invariante übergeht, wenn man die ν Formen alle der ursprünglichen gleich setzt.*

Wir können in dieser Reduction aber noch weiter gehen: wir werden zeigen, dass eine jede Invariante formal so darstellbar ist, als wäre sie eine simultane Invariante von lauter *linearen* Formen; und darauf beruht dann die sogenannte symbolische Darstellung der binären Formen. Zu dem Zwecke müssen wir zunächst die Systeme von solchen linearen Formen näher in's Auge fassen. Es sei eine Anzahl linearer Formen gegeben, bez. mit den Coëfficienten a_1, a_2; b_1, b_2; $c_1, c_2 \ldots$; wir stellen uns die Aufgabe, den formalen Typus einer simultanen Invariante

$$\Pi\,(a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2;\ \ldots)$$

dieses Systems ganz allgemein anzugeben.*) Es kommt im Wesentlichen darauf an, den Ausdruck Π als Aggregat anderer Ausdrücke darzustellen, die zum Theil aus weniger linearen Formen gebildet, zum Theil auch von niedererem Gesammtgrade als Π sind, wobei unter Gesammtgrad die Summe der Grade in den Coëfficienten der einzelnen Formen verstanden ist.

---

*) Ausführlicheres hierüber vgl. bei Clebsch: Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 59; und: Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, p. 24 ff.

Wir bezeichnen durch Π' das, was aus Π entsteht, wenn man darin $a_i = b_i$ setzt, also:

$$\Pi' = \Pi\,(a_1, a_2;\ a_1, a_2;\ c_1, c_2;\ \ldots);$$

und bilden die folgende Reihe von Functionen, die nach unserem letzten Satze sämmtlich simultane Invarianten sind:

$$\Pi_1' = \frac{\partial \Pi'}{\partial a_1}\, b_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2}\, b_2$$

$$\Pi_2' = \frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_1}\, b_1 + \frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_2}\, b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Pi_l' = \frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_1}\, b_1 + \frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_2}\, b_2 .$$

Es ist dabei unter l der Grad von Π in den Coëfficienten $b_1 . b_2$ verstanden; alsdann ist durch diesen successiven Process aus Π' wieder rückwärts eine Invariante Π_l' gebildet, welche die a und b zu demselben Grade enthält, wie Π, nur in anderer Weise, denn Π_l' ist abgeleitet aus einer Invariante Π' einer um Eins geringeren Anzahl von linearen Formen. Ist ferner k der Grad von Π in den Coëfficienten a_1, a_2, so ist Π' vom Grade $k + l$ in den a, Π_1' dagegen vom Grade $k + l - 1$, und allgemein Π_r' vom Grade $k + l - r$ in den a. Wir haben somit nach dem Euler'schen Satze über homogene Functionen:

$$(\Pi_1')_{b=a} = \frac{\partial \Pi'}{\partial a_1}\, a_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial a_2}\, a_2 = (k + l)\, \Pi'$$

$$(\Pi_2')_{b=a} = \left(\frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_1}\, a_1 + \frac{\partial \Pi_1'}{\partial a_2}\, a_2\right)_{b=a} = (k + l - 1)\,(k + l)\, \Pi'$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(\Pi_l')_{b=a} = \left(\frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_1}\, a_1 + \frac{\partial \Pi'_{l-1}}{\partial a_2}\, a_2\right)_{b=a} = \ldots = (k+1)\,(k+2)\ldots(k+l) . \Pi' .$$

So entsteht also Π' einmal (bis auf einen Zahlenfactor) aus Π_l' für $a_i = b_i$, einmal aus Π für $a_i = b_i$. Wir haben daher die Relationen:

$$\{\Pi_l' - (k + 1)\,(k + 2)\ldots(k + l)\,\Pi\}_{a_i = b_i} = 0 .$$

Wenn aber die links stehende Differenz für $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ immer verschwinden soll, so muss sie durch den Factor

$$(ab) = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

theilbar sein; und wir können setzen:

$$\Pi - m\,\Pi_l' = (ab) . M ,$$

wo M eine neue Function von invariantem Charakter ist, und m den

reciproken Werth des Zahlenfactors $(k+1)(k+2)\ldots(k+l)$ bedeutet. Wir haben somit Π zunächst zerlegt in eine Invariante Π_l', welche aus Π' durch unseren invarianten Process hervorgeht, wo Π' eine Reihe von Coëfficienten weniger, als Π enthält, und in eine andere M von niedererem Gesammtgrade, multiplicirt in die Determinante (ab).

Es ist nun klar, wie man diesen Zerlegungsprocess fortsetzen kann, indem man Π_l' und M wieder derselben Operation unterwirft, u. s. f. bis man schliesslich zu lauter Producten aus Invarianten vom Gesammtgrade 2 gelangt, bei denen nur je zwei lineare Formen benutzt sind (aus einer einzigen Form der Art ist ja überall keine Invariante zu bilden). Zwei solche Formen, etwa

$$a_1 x_1 + a_2 x_2$$

und

$$b_1 x_1 + b_2 x_2$$

haben aber nur *eine* Invariante, die wir schon oben betrachteten, (p. 177) nämlich

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (ab),$$

denn zwei Punkte können offenbar keine andere besondere Lagenbeziehung zu einander haben, als die, dass sie zusammenfallen.*) — Die hier durchgeführte Ueberlegung begründet nun den folgenden fundamentalen Satz:

Jede simultane Invariante von linearen Formen ist ein Aggregat aus Producten der aus je zweien der Formen gebildeten Invarianten: (ab), (ac), (bc), u. s. f.

Für den allgemeinen Typus der simultanen *Covarianten* eines Systems von linearen Formen brauchen wir nunmehr keine besondere Betrachtung mehr anzustellen. Eine Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

gleich Null gesetzt, stellt nämlich einen Punkt dar mit den Coordinaten $y_1 = -a_2$, $y_2 = a_1$ (vgl. p. 173). Wir erhalten daher aus jeder Invariante linearer Formen eine Covariante, wenn wir darin eine Reihe von Coëfficienten mittelst der Gleichungen

$$a_1 = x_2 \qquad a_2 = -x_1 \tag{2}$$

durch Veränderliche ersetzen. In der That erkennt man leicht, dass sich die Coëfficienten in derselben Weise linear transformiren, wie die Variabeln, denn durch die Substitution

*) Ein algebraischer Beweis hierfür findet sich unten, wo bei den quadratischen Formen gezeigt ist, dass eine solche Form nur eine Invariante hat, welche durch ihr Verschwinden aussagt, dass die beiden repräsentirenden Punkte zusammenfallen.

$$\varrho x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad \varrho x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

wird:

$$\varrho (a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1' y_1 + a_2' y_2,$$

wenn man setzt:

$$a_1' = \alpha a_1 + \gamma a_2, \quad a_2' = \beta a_1 + \delta a_2.$$

Man hat also in den Substitutionsgleichungen der Variabeln nur die Coëfficienten zu transponiren, um diejenigen der Coëfficienten linearer Formen zu erhalten.

Durch die Substitution (2) geht aber jeder Determinantenfactor (ab) über in einen linearen Factor $b_1 x_1 + b_2 x_2$; und da umgekehrt auch aus jeder simultanen Covariante durch die Substitution (2) eine Invariante, also eine Bildung aus Determinanten (ab), (ac), u. s. f. entsteht, so folgt:

Jede simultane Covariante von einer Reihe linearer Formen ist ein Aggregat von Producten, deren Factoren einen der folgenden Typen haben:

1) (ab), *Invariante aus je zweien der linearen Formen*
2) $a_1 x_1 + a_2 x_2$, *eine der linearen Formen selbst.*

Wendet man die Substitution (2) gleichzeitig auf mehrere Reihen von Coëfficienten an, indem man auch mehrere Reihen von Variabeln einführt, so sieht man, dass ausser den genannten Factoren nur noch solche vom Typus (xy) vorkommen: sogenannte *identische Covarianten.* Man könnte ferner überhaupt bei der Untersuchung Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen $(x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; \ldots)$ zu Grunde legen. Es lässt sich jedoch zeigen, dass man dabei nicht zu neuen Bildungen gelangt, dass es vielmehr hinreichend allgemein ist, bei den Grundformen *eine* solche Reihe allein anzunehmen; und so werden wir es im Folgenden immer thun. —

Indem wir nun eine *symbolische Bezeichnung für die binären Formen* einführen, gelingt es mittelst der hier für lineare Formen gegebenen Sätze auch den Typus einer beliebigen invarianten Bildung allgemein anzugeben. Wir erörtern dies zunächst an einem einfachen Beispiele, und zwar wollen wir die Discriminante der quadratischen Form:

$$f = a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

als Product zweier Determinantenfactoren (ab) darstellen. Zu dem Zwecke fassen wir f *symbolisch* als Quadrat einer linearen Form auf (vgl. auch p. 72) und setzen:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2.$$

Wir können dann, wenn wir wollen, statt der Symbole a_1, a_2 stets wieder die wirklichen Coëfficienten einführen mittelst der Gleichungen:

$$a_1^2 = a_{11}, \quad a_1 a_2 = a_{12}, \quad a_2^2 = a_{22};$$

doch dies geht nur, wenn wir es mit einer in den a_{ik} linearen Bildung zu thun haben. In der That könnte man z. B. für $a_1^2 a_2^2$ ebensowohl das Product $a_{11} a_{22}$, als das Quadrat a_{12}^2 setzen; es würden also Mehrdeutigkeiten möglich sein. Um das zu vermeiden, führen wir in der unsere Discriminante darstellenden Determinante:

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

in der ersten Verticalreihe die angegebene Substitution aus, schreiben aber in der zweiten Reihe neue Symbole b statt der a, welche mit diesen gleichwerthig sein sollen:

$$b_1^2 = a_{11}, \quad b_1 b_2 = a_{12}, \quad b_2^2 = a_{22}.$$

Dann wird:

$$I = \begin{vmatrix} a_1 a_1 & b_1 b_2 \\ a_2 a_1 & b_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 (ab).$$

Da es aber gleichgültig sein muss, in welcher Verticalreihe wir die a, in welcher die b einführen, so ist auch

$$I = b_1 a_2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -b_1 a_2 (ab),$$

und wenn wir die Summe beider Ausdrücke bilden:

$$I = \tfrac{1}{2} (a_1 b_2 - b_1 a_2)(ab) = \tfrac{1}{2} (ab)^2,$$

womit die verlangte Darstellung geleistet ist. Statt der Symbole a, b können wir nun umgekehrt unzweideutig wieder die Coëfficienten a_{ik} einführen; denn man findet unmittelbar

$$2I = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 a_2^2 = 2 (a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

— Im Allgemeinen gestaltet sich die Einführung der verschiedenen Symbole jedoch nicht so einfach; vielmehr ist dazu die wiederholte Anwendung des bekannten Differentiationsprocesses nöthig. Die betreffenden Erörterungen stellen sich folgendermassen.

Wir haben gesehen (p. 184), dass man eine beliebige Invariante in eine solche überführen kann, welche die Coëfficienten jeder Form einer Reihe von Formen gleicher Ordnung linear enthält, wobei wir uns nachher diese Formen als mit der Grundform identisch angenommen dachten. Statt der Coëfficienten jeder dieser Formen können wir nun weiter die einer linearen Form einführen, indem wir eine jede der Hülfsformen durch die Potenz einer linearen Form ersetzen. Wir schreiben also statt der Coëfficienten a der gegebenen Grundform die entsprechenden der Form

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$$

und ebenso statt der Coëfficienten b einer der anderen Formen n^{ter} Ordnung die der Form

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n,$$

u. s. w. *Alsdann ist unsere invariante Bildung unzweideutig durch die Coëfficienten dieser linearen Formen:* $a_1 x_1 + a_2 x_2$, $b_1 x_1 + b_2 x_2$, *u. s. f. ausgedrückt;* denn man kann von dieser *„symbolischen Darstellung“* derselben*) jederzeit zu der wirklichen Darstellung zurückkehren. Sei nämlich die Grundform f gegeben durch:

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

so haben wir nur die folgenden Substitutionen zu machen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_1^n &&= b_1^n &&= c_1^n &&= \ldots \\
a_1 &= a_1^{n-1} a_2 &&= b_1^{n-1} b_2 &&= c_1^{n-1} c_2 &&= \ldots \\
a_2 &= a_1^{n-2} a_2^2 &&= b_1^{n-2} b_2^2 &&= c_1^{n-2} c_2^2 &&= \ldots \\
&\ldots \\
a_n &= a_2^n &&= b_2^n &&= c_2^n &&= \ldots
\end{aligned}$$

Eine nothwendige Bedingung für die Möglichkeit dieser Substitutionen — und darin liegt der Grund für die Einführung obiger Hülfsformen — ist immer die, dass die invariante Bildung in der That linear in den Coëfficienten einer jeden der Hülfsformen angenommen wird. Andernfalls würde, wie schon obiges Beispiel lehrte, der Rückgang zur ursprünglichen Function nicht mehr eindeutig möglich sein; denn käme z. B. ein Glied mit dem symbolischen Coëfficienten

$$b_1^{2n-i} \cdot b_2^i$$

vor, so könnte man dies für $i = k + l$ auf sehr verschiedene Weise in zwei Factoren von der Form:

$$b_1^{n-k} b_2^k, \quad b_1^{n-l} b_2^l,$$

zerlegen und die zugehörigen wirklichen Coëfficienten a_k, a_l würden also unbestimmt werden. — *Einige Beispiele* werden diese Methode der symbolischen Rechnung am besten erläutern. Wir beginnen wieder mit der Invariante einer quadratischen Form

*) Die symbolische Darstellung in der hier angewandten Form wurde zuerst von Aronhold mit Erfolg gebraucht (Borchardt's Journal, Bd. 39, 55 und 62) und von Clebsch zur Grundlage der ganzen Invariantentheorie gemacht (vgl. ib. Bd. 59). Schon vorher wurde von Cayley eine Symbolik benutzt (vgl. besonders die Memoirs upon Quantics und Salmon's Introductury lessons etc.), welche sich von der unsrigen eigentlich nur durch die Bezeichnungsweise unterscheidet und in dieser sich mehr an die auch sonst in der Theorie der Differentialgleichungen (von Cauchy, Boole u. A.) oder in der Darstellung der Taylor'schen Reihe angewandte Symbolik anlehnt.

$$f = a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

d. h. mit der Function

$$I = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 .$$

Sind nun b_{11}, b_{12}, b_{22} die Coëfficienten einer zweiten, nachher mit f identisch zu setzenden Form, so haben wir bei Anwendung der allgemeinen Methode:

$$I' = \frac{\partial I}{\partial a_{11}} b_{11} + \frac{\partial I}{\partial a_{12}} b_{12} + \frac{\partial I}{\partial a_{22}} b_{22} = a_{11} b_{22} + b_{11} a_{22} - 2\, a_{12} b_{12} .$$

Hierin sind noch die a_{ik} durch die Coëfficienten der Form:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 ,$$

die b_{ik} durch die der Form

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)^2$$

zu ersetzen, um unsere Invariante I symbolisch in der Gestalt

$$I' = a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 - 2\, b_1 b_2 a_1 a_2$$

zu erhalten. Da für $b = a$ nun $I' = 2\, I$ wird, und da wir hier in der That die Symbole b, ebenso wie die a, durch wirkliche Grössen a_{ik} ersetzt denken müssen, so haben wir:

$$2\, I = a_1^2 b_2^2 - 2\, a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 ,$$

oder, wie schon früher gefunden:

$$I = \tfrac{1}{2}\, (a\, b)^2 = \tfrac{1}{2}\, (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2$$

als symbolische Darstellung unserer Invariante.

Ein anderes Beispiel möge uns die Functionaldeterminante zweier binären Formen liefern, welche wir ebenfalls schon als Covariante erkannten (vgl. p. 175). Es seien

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^m$$
$$\varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)^n$$

die beiden Formen in ihrer symbolischen Gestalt, die wir noch kürzer durch Einführung der Bezeichnung:

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$
$$\alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

in der Form schreiben können:

$$f = a_x^m = b_x^m$$
$$\varphi = \alpha_x^n = \beta_x^n .$$

Die Functionaldeterminante ist dann gegeben durch:

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix} .$$

Auf unsere symbolischen Potenzen f, φ können wir nun die gewöhnlichen Regeln der Differentiation anwenden; denn der Grad der Form in den Coëfficienten wird durch diese Operation nicht beeinflusst, und es kann also dadurch keine Zweideutigkeit entstehen: Wir erhalten:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = m a_x^{m-1} a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = m a_x^{m-1} a_2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = n \alpha_x^{n-1} \alpha_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = n \alpha_x^{n-1} \alpha_2,$$

und die Functionaldeterminante wird symbolisch dargestellt durch:

$$F = \begin{vmatrix} m a_x^{m-1} a_1 & m a_x^{m-1} a_2 \\ n \alpha_x^{n-1} \alpha_1 & n \alpha_x^{n-1} \alpha_2 \end{vmatrix} = m n a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} (a \alpha).$$

In ganz analoger Weise stellt sich die (Hesse'sche) Determinante Δ der zweiten Differentialquotienten einer Form $f = a_x^n = b_x^n$ dar. Wir setzen in ihr:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = n(n-1) a_x^{n-2} a_1^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = n(n-1) a_x^{n-2} a_1 a_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = n(n-1) b_x^{n-2} b_1 b_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = n(n-1) b_x^{n-2} b_2^2,$$

und erhalten:

$$\Delta = n^2 (n-1)^2 a_1 b_2 (ab) a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$

also auch wegen der gleichen Bedeutung der a und b:

$$\begin{aligned} \Delta &= n^2 (n-1)^2 a_2 b_1 (ab) \; a_x^{n-2} b_x^{n-2} \\ &= \tfrac{1}{2} n^2 (n-1)^2 \quad (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}. \end{aligned}$$

Es erinnert die sogenannte symbolische Bezeichnung an eine abkürzende Schreibweise, deren wir uns schon in der Theorie der Kegelschnitte bedienten (vgl. p. 72); aber, während sie dort eben nur als erleichterndes Hülfsmittel verwerthet wurde, bietet sie uns jetzt die principielle Grundlage für die ganze Theorie; und zwar gewinnt sie diese hohe Bedeutung durch den folgenden Satz, der sich aus unseren bisherigen Ueberlegungen unmittelbar ergibt:

Jede Invariante einer binären algebraischen Form stellt sich symbolisch als das Aggregat von Producten symbolischer Determinanten vom Typus (ab) dar; jede Covariante als das Aggregat von Producten symbolischer Determinanten (ab) mit linearen symbolischen Factoren vom Typus c_x.

Der zu diesem Satze führende Gedankengang, welcher durch die Beispiele wiederholt unterbrochen war, ist kurz folgender. Wir haben gezeigt, dass jede solche Invariante oder Covariante als simultane Bildung mit Invarianteneigenschaft eines Systems von linearen Formen angesehen werden kann, deren Potenzen als symbolische Ausdrücke

für die Grundform dienen; ferner, dass jede solche Invariantenbildung linearer Formen ein Aggregat von Producten aus Factoren vom Typus (ab), resp. c_x sein muss; und diese beiden Bemerkungen haben wir nur zusammenzufassen. — Die principielle Wichtigkeit des Satzes ist evident; denn, während wir früher erst durch Rechnung die Invarianteneigenschaft nachweisen mussten, können wir letztere nunmehr an der symbolischen Form ohne Weiteres direct aus der Natur ihrer Bildung abnehmen: jeder einzelne Factor hat eben für sich invarianten Charakter. — Dass der Satz auch umkehrbar ist, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden: *Man kann jede Invariante oder Covariante linearer Formen, welche die Coëfficienten dieser Formen in geeigneten Dimensionen enthält, als symbolische Darstellung einer Invariante oder Covariante höherer Formen auffassen*; die Dimensionen müssen dabei nur bez. dieselben sein, wie die Ordnungen der entsprechenden höheren Formen. In der That ist es auch evident, dass die Symbole einer Form sich durch dieselben Gleichungen linear transformiren, wie die wirklichen Coëfficienten linearer Formen (vgl. p. 187). —

Die Beispiele, welche wir soeben für symbolische Bildungen angeführt haben, bestätigen obigen Satz; ihre Invarianteneigenschaft tritt nunmehr unmittelbar hervor. In derselben Weise müssen sich aber auch die Resultanten und Discriminanten durch symbolische Determinanten-Producte darstellen lassen. Es führt dazu eine Methode, mittelst deren es überhaupt gelingt, eine jede symmetrische Function der Coordinaten der Verschwindungspunkte einer Form (d. i. der Wurzeln einer Gleichung) in eine rationale Function der Coëfficienten der Form überzuführen, und zwar in die symbolische Darstellung dieser rationalen Function.*) Wir werden jedoch von dieser allgemeinen Methode weiterhin keinen Gebrauch mehr machen, und beschränken uns daher darauf, später bei Besprechung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Formen die Discriminantenbildungen in ihrer symbolischen Form zu geben. Liegt es doch überhaupt im Charakter solcher allgemeinen Methoden, dass sie verhältnissmässig umständlich werden, wenn specielle Fälle vorliegen, wo dann andere Behandlungsweisen schneller zum Ziele führen. —

Bei längeren symbolischen Rechnungen, wie sie in den folgenden Entwicklungen nicht immer zu vermeiden sind, kann man durch geschickte Anwendung gewisser *identischer Gleichungen* sehr oft eine wesentliche Vereinfachung erzielen. Wir stellen dieselben daher hier kurz zusammen. Durch Elimination von $1, x_1, x_2$ aus den drei identischen Gleichungen:

*) Vgl. § 20 in dem Werke von Clebsch.

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2$$
$$b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2$$
$$c_x = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

folgt zunächst die ebenfalls identische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_1 & a_2 \\ b_x & b_1 & b_2 \\ c_x & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach den Gliedern der ersten Verticalreihe entwickelt:

$$\text{(I)} \qquad (bc)\, a_x + (ca)\, b_x + (ab)\, c_x = 0.$$

Schafft man ein Glied auf die andere Seite und quadrirt, so folgt weiter die Identität:

$$\text{(II)} \qquad (ab)(ac)\, b_x c_x = \tfrac{1}{2} \left\{ (ab)^2 c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2 \right\}.$$

Ersetzen wir in (I) x_1, x_2 bez. durch d_2 und $-d_1$, so erhalten wir:

$$\text{(III)} \qquad (bc)(ad) + (ca)(bd) + (ab)(cd) = 0.$$

Setzen wir dagegen in (I) $c_2 = y_1$, $c_1 = -y_2$, so folgt die wichtige Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad a_x b_y - b_x a_y = (ab)(xy).$$

Ein anderes häufig anwendbares Mittel zur Umformung symbolischer Ausdrücke und zur Herstellung ihrer einfachsten Form besteht in der Vertauschung zweier Symbole, wodurch bei der gleichen Bedeutung beider der wahre Werth des betreffenden Ausdrucks ungeändert bleiben muss. Ein Beispiel hierfür bietet uns die Function $F(x, y)$, welche wir früher bei Bildung der Resultante zweier Formen f und φ gleicher Ordnung benutzten (vgl. p. 181). Es sei symbolisch:

$$f = a_x^n,$$
$$\varphi = \alpha_x^n;$$

dann ist $F(x, y)$ gegeben durch:

$$F = \frac{f(x)\varphi(y) - \varphi(x) f(y)}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = \frac{a_x^n \alpha_y^n - \alpha_x^n a_y^n}{(xy)}$$

$$= \frac{a_x \alpha_y - \alpha_x a_y}{(xy)} \left\{ a_x^{n-1} \alpha_y^{n-1} + a_x^{n-2} \alpha_y^{n-2} \alpha_x a_y + a_x^{n-3} \alpha_y^{n-3} \alpha_x^2 a_y^2 + \dots \right\},$$

oder wegen der Identität (IV):

$$F(x, y) = (a\alpha) \left\{ a_x^{n-1} \alpha_y^{n-1} + a_x^{n-2} \alpha_y^{n-2} \alpha_x a_y + \dots \right\},$$

Nehmen wir insbesondere an, dass f und φ die ersten Differentialquotienten einer Form a_x^n seien, also:

$$f = a_x^{n-1} a_1, \qquad \varphi = a_x^{n-1} a_2,$$

so wird, da wir in φ neue Symbole b einführen müssen:

$$F(x, y) = \quad (ab)\, a_1 b_2 \left\{ a_x^{n-2} b_y^{n-2} + a_x^{n-3} b_y^{n-3} a_y b_x + \ldots \right\},$$

oder *wenn wir a und b vertauschen:*

$$F(x, y) = -(ab)\, a_2 b_1 \left\{ a_x^{n-2} b_y^{n-2} + a_x^{n-3} b_y^{n-3} a_y b_x + \ldots \right\},$$

und wenn wir beide Ausdrücke addiren, so kommt:

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2} (ab)^2 \left\{ a_x^{n-2} b_y^{n-2} + a_x^{n-3} b_y^{n-3} a_y b_x + \ldots \right\}.$$

Setzt man hierin insbesondere $n = 2$, so erhält man $\frac{1}{2}(ab)^2$, die Discriminante der quadratischen Form a_x^2, wie es sein muss.

Aus dieser Verfahrungsweise folgt noch die oft nützliche Bemerkung: *Wenn ein symbolischer Ausdruck durch Vertauschung zweier gleichwerthiger Symbole sein Zeichen ändert, so verschwindet er identisch.* Es ergibt sich z. B. mit Hülfe dieses Satzes das identische Verschwinden eines jeden Ausdrucks:

$$(ab)^k a_x^{n-k} b_x^{n-k},$$

in welchem k eine ungerade Zahl ist, und a, b Symbole derselben Form n^{ter} Ordnung $f = a_x^n = b_x^n$ bedeuten. Für $n = 2$, $k = 1$ ist diese Behauptung auch leicht direct zu verificiren, denn wir haben:

$$\begin{aligned}(ab)\, a^x b_x &= (a_1 b_2 - b_1 a_2) \,.\, \Sigma (a_i b_k + b_i a_k)\, x_i x_k \\ &= \Sigma\, (a_1 a_i b_2 b_k - a_2 a_i b_1 b_k - a_2 a_k b_1 b_i + a_1 a_k b_2 b_i)\, x_i x_k \\ &= \Sigma\, (a_{1i} a_{2k} + a_{2i} a_{1k} - a_{2i} a_{1k} - a_{1i} a_{2k})\, x_i x_k.\end{aligned}$$

Weitere Anwendungen der hier bezeichneten Hülfsmittel werden sich im Folgenden noch in grosser Zahl darbieten; und die sorgfältige Durchrechnung aller dieser Beispiele dürfte als bestes Mittel zur Einführung in die symbolischen Operationsmethoden zu empfehlen sein. —

Wir erwähnen hier nur noch eines Resultats, welches die symbolische Darstellung sofort ergibt, und das uns gelegentlich nützlich sein wird. Jede invariante Bildung Π einer Form n^{ter} Ordnung f ändert sich bei linearer Transformation um eine Potenz r^λ, wo r die Substitutionsdeterminante bedeutet. Die Transformationsformeln der Symbole (p. 187), lehren aber, dass dabei jeder lineare Factor a_x von Π ungeändert bleibt, während jede symbolische Determinante (ab) den Factor r erhält. Um die Zahl λ zu bestimmen, haben wir also nur nach der Zahl solcher Determinantenfactoren zu fragen. Es sei nun Π vom p^{ten} Grade in den Coëfficienten und von der m^{ten} Ordnung in den Variabeln*), so enthält Π — wie aus der Einführung der Symbole

---

*) Wir werden in der Folge das Wort „*Grad*“ immer für die Dimension anwenden, zu welcher die Coëfficienten der Grundform, das Wort „*Ordnung*“ für die Dimension, zu welcher die Variabeln vorkommen.

sofort folgt — p verschiedene Symbole und jedes zur n^{ten} Dimension, so dass im Ganzen $p \cdot n$ Symbolreihen vorkommen. Diese vertheilen sich zum Theil paarweise auf die λ Determinantenfactoren, zum Theil einzeln auf die m symbolischen linearen Factoren von Π. Man hat also die Gleichung:

$$2\lambda + m = p \cdot n,$$

und den Satz: *Eine invariante Bildung einer binären Form n^{ter} Ordnung, vom Grade p und der Ordnung m erhält $\lambda = \frac{1}{2}(pn - m)$ symbolische Determinantenfactoren, ändert sich also um die λ^{te} Potenz der Substitutionsdeterminante bei einer linearen Transformation.*

III. Projectivische Punktreihen. Polarentheorie. Involutionen.

Eine lineare Transformation haben wir früher als analytischen Ausdruck für die Veränderung der Coordinatengrundpunkte erkannt. Man kann aber noch eine andere geometrische Deutung für dieselbe angeben; und diese ist für die Auffassung der Invariantentheorie von hervorragenderer Wichtigkeit. Wir werden durch dieselbe gleichzeitig wieder auf die Grundlagen der synthetischen Geometrie geführt, die wir schon früher eingehend behandelten.

Diese neue Interpretation der linearen Substitution kann gewissermassen als der früheren entgegengesetzt aufgefasst werden: Während wir dieselbe früher zur Darstellung desselben Punktes (bez. Strahles) mit Hülfe verschiedener Grundelemente benutzten, betrachten wir sie nunmehr als Beziehung zwischen zwei verschiedenen Punkten, die auf dieselben Grundelemente bezogen sind, als analytischen Ausdruck „*einer linearen Verwandtschaft*“. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho\,\xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \rho\,\xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

ordnen wir jedem Punkte der Geraden *einen* anderen Punkt derselben Geraden zu, und umgekehrt, wobei vorausgesetzt ist, dass die Determinante der Substitution (a_{12} nicht nothwendig $= a_{21}$):

$$r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

von Null verschieden ist; und zwar *ist diese Zuordnung dieselbe, welche überhaupt zwei projectivische Punktreihen mit einander verbindet.* Diese Reihen sind hier nur als vereinigt, d. h. auf demselben Träger gelegen anzusehen. Die projectivische Zuordnung ist bekanntlich dadurch charakterisirt, dass das Doppelverhältniss von je vier entsprechenden Punkten der Reihen denselben Werth hat; der letztere ist, wenn $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ die Parameter der vier Punkte sind (vergl. p. 37)

$$= \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_4 - \mu_2)}{(\mu_3 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_4)} = \alpha .$$

Nach einer oben gemachten Bemerkung erhalten wir das Doppelverhältniss für vier Punkte x, y, z, t gebildet in deren Coordinaten, wenn wir setzen:

$$\mu_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \mu_2 = \frac{y_1}{y_2}, \quad \mu_3 = \frac{z_1}{z_2}, \quad \mu_4 = \frac{t_1}{t_2},$$

und es wird also (wie man auch leicht direct aus der Definition der binären Coordinaten ableitet):

$$(2) \qquad \alpha = \frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}.$$

Ebenso ist das Doppelverhältniss der entsprechenden Punkte ξ, η, ζ, τ

$$= \frac{(\xi\zeta)(\eta\tau)}{(\xi\tau)(\eta\zeta)};$$

und dass dieser Ausdruck gleich dem Werthe α ist, ergibt sich sofort, da jeder der Factoren (xz), (yt), (xt), (yz) beim Uebergange zu dem entsprechenden Factor $(\xi\zeta)$, $(\eta\tau)$, $(\xi\tau)$, $(\eta\zeta)$ sich, wie wir wissen, nur um die Substitutionsdeterminante r ändert, diese Determinante aber in dem Quotienten (2) sich forthebt. Es ist damit obige Behauptung bewiesen, und wir können in Folge dessen auch die geometrische Bedeutung der invarianten Gebilde folgendermassen aussprechen:

Invarianten und Covarianten gleich Null gesetzt, liefern solche Gleichungen, welche projectivische Beziehungen zwischen Elementen von Punktreihen, bez. Strahlbüscheln darstellen. Dabei sind unter „projectivischen Beziehungen“ diejenigen verstanden, welche, wenn man ein mit dem ursprünglich benutzten Gebilde projectivisches construirt, für die entsprechenden Elemente dieses neuen Gebildes erhalten bleiben.

Der Begriff des Doppelverhältnisses, dem wir hier wieder begegnen, und den wir früher als fundamental für die neuere synthetische Geometrie erkannten, ist auch für die Invariantentheorie als solche von hervorragender Bedeutung. Er gibt nämlich zunächst ein erstes und einfachstes Beispiel einer „*absoluten Invariante*“, d. h. einer Function der Coëfficienten der Grundform, welche bei einer linearen Transformation *vollkommen* ungeändert bleibt. Solche Functionen kann man immer bilden, sobald die Grundform mehr als eine Invariante besitzt. Seien z. B. I und I_1 zwei Invarianten derselben, die bei einer linearen Substitution in I' und I_1' übergehen mögen, so haben wir:

$$I' = r^\lambda I$$

$$I_1' = r^\mu I_1,$$

und also ist der Quotient

$$\frac{I'^\mu}{I_1'^\lambda} = \frac{I^\mu}{I_1^\lambda}$$

eine absolute Invariante. Eine solche kann man weiter immer geradezu als Function von Doppelverhältnissen darstellen. Jede Invariante nämlich ist auch Invariante der linearen Factoren der Grundform und in Folge dessen ein Aggregat von Producten der Form

$$(xy)^\alpha (yz)^\beta (xz)^\gamma \ldots,$$

wo $x, y, z \ldots$ die Coordinaten der Verschwindungspunkte der Grundform sind, und wo die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so bestimmt sein müssen, dass die Function in den Coordinaten aller dieser Punkte symmetrisch wird. Dividirt man nun das Aggregat durch eines seiner Glieder, so erhält man unmittelbar eine absolute Invariante, deren Zusammensetzung aus Doppelverhältnissen evident ist. Erinnern wir uns ferner daran, dass jede Covariante als simultane Invariante linearer Formen und der Grundform aufgefasst werden kann (p. 186); so haben wir also, wenn die Function auch noch von Veränderlichen abhängig gedacht wird, den Satz:*)

Eine Invariante oder Covariante einer binären Form ist der Zähler einer ganzen rationalen Function von Doppelverhältnissen, welche aus den Verschwindungselementen der Grundform und im Falle der Covariante aus anderen (veränderlichen) Elementen zusammengesetzt sind.

Die Theorie der Doppelverhältnisse selbst haben wir bereits genauer behandelt, ebenso diejenige der projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel; auch erwähnten wir schon gelegentlich (p. 51), dass zwei vereinigt gelegene projectivische Punktreihen im Allgemeinen zwei Elemente entsprechend gemein haben. Dieselben ergeben sich hier analytisch, wenn man in (1) $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$ setzt, indem man dann durch Elimination der x eine für ϱ quadratische Gleichung erhält:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die gefundenen Werthe von ϱ in (1) ein, so ergeben sich daraus die Coordinaten der Doppelelemente. Man kann dieselben auch direct aus der Gleichung:

$$(3) \qquad (a_{11} - a_{22}) x_1 x_2 + a_{12} x_2^2 - a_{21} x_1^2 = 0,$$

welche man durch Elimination von ϱ findet, berechnen. Die constructive Bestimmung dieser Punkte wird, indem man das binäre Gebiet verlässt, mit Hülfe eines Kegelschnittes ermöglicht, wie ebenfalls schon früher ausgeführt wurde. —

Eine andere Darstellung projectivischer Punktreihen, an welche sich weitere interessante Betrachtungen knüpfen, ergibt sich in folgender Weise. Die Gleichung

*) Vgl. Weiteres hierüber im zweiten Abschnitte des Werkes von Clebsch.

(4) $$a_x + \lambda b_x = 0$$

stellt offenbar, wenn man λ als veränderlichen Parameter betrachtet, alle Punkte der Geraden dar, welche zur Repräsentation des binären Gebietes dient. Dabei ist λ gleich dem negativen Verhältnisse des Abstandes eines beweglichen Punktes von zwei festen Centren ($a_x = 0$, $b_x = 0$) multiplicirt mit einer constanten Zahl. Diese Punktreihe ist zu einer anderen

(5) $$\alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = 0$$

projectivisch, wenn zwei Punkte beider Reihen, für die λ denselben Werth hat, einander entsprechend gesetzt werden; denn das Doppelverhältniss der Punkte $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ ist dann für beide Reihen gleich $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, und aus den Gleichungen:

$$a_x + \lambda b_x = \frac{(\lambda - \lambda'') (a_x + \lambda' b_x) - (\lambda - \lambda') (a_x + \lambda'' b_x)}{\lambda' - \lambda''}$$

$$\alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = \frac{(\lambda - \lambda'') (\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi) - (\lambda - \lambda') (\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi)}{\lambda' - \lambda''}$$

folgt, dass die Beziehung beider Reihen zu einander nicht geändert wird, wenn man die Punktepaare, a_x, b_x; α_ξ, β_ξ durch zwei beliebige zusammengehörige Paare $a_x + \lambda' b_x$, $a_x + \lambda'' b_x$; $\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi$, $\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi$ ersetzt. An Stelle des reihenden Elementes λ tritt dann nur das andere:

(6) $$\mu = -\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}.$$

Man kann übrigens auch direct wieder aus (4) und (5) eine lineare Transformation herstellen, indem man das Verhältniss $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ aus der Gleichung

$$a_x \beta_\xi - b_x \alpha_\xi = 0 \text{*)}$$

berechnet.

Für die Doppelpunkte der beiden Reihen (d. i. für $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$) erhält man durch Elimination von λ die für $\frac{x_1}{x_2}$ quadratische Gleichung:

$$a_x \beta_x - b_x \alpha_x = 0,$$

welche an Stelle von (3) tritt, oder durch Elimination von x_1, x_2 die in λ quadratische Gleichung:

(7) $$0 = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & \alpha_1 + \lambda \beta_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & \alpha_2 + \lambda \beta_2 \end{vmatrix} = (a\alpha) + \lambda [(a\beta) + (b\alpha)] + \lambda^2 (b\beta).$$

---

*) Man kann überhaupt die lineare Verwandtschaft durch eine in den x und ξ bilineare Gleichung

$$a_{11} x_1 \xi_1 + a_{12} x_1 \xi_2 + a_{21} x_2 \xi_1 + a_{22} x_2 \xi_2 = 0$$

vermittelt annehmen; vgl. Clebsch, a. a. O. p. 66.

Es gibt also in der That im Allgemeinen zwei Doppelpunkte, wenn nicht etwa die Bedingung:

$$[(a\beta) + (b\alpha)]^2 = 4\,(a\alpha)\,(b\beta) \tag{8}$$

erfüllt ist, wo dann die beiden Doppelpunkte zusammenfallen. Es könnte endlich auch vorkommen, dass geradezu alle Coëfficienten von (7) verschwinden, wodurch die lineare Transformation eine sogenannte *identische* wird: jeder Punkt der Geraden entspricht dann sich selbst. Setzen wir voraus, dass diese Fälle nicht eintreten, so können wir die Doppelpunkte als Coordinatengrundpunkte einführen. Seien λ', λ'' die Wurzeln von (7), so müssen wir zu dem Zwecke setzen:

$$\begin{aligned} a_x + \lambda' b_x &= X_1 = p_x \\ a_x + \lambda'' b_x &= X_2 = q_x\,, \end{aligned} \tag{9}$$

und dadurch muss auch identisch sein:

$$\begin{aligned} \alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi &= c\,\Xi_1 = c\,p_\xi \\ \alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi &= c'\,\Xi_2 = c'\,q_\xi\,, \end{aligned} \tag{10}$$

wo c, c' Constante sind. Die Gleichungen der beiden Punktreihen sind dann nach (6) gegeben durch

$$X_1 - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,X_2 = 0$$

$$\Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,\Xi_2 = 0,$$

oder für

$$\varrho = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}$$

durch:

$$\begin{aligned} X_1 - \varrho\,X_2 &= 0 \\ \Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\varrho\,\Xi_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Die hier auftretende Constante $\frac{c'}{c}$ ist für die Transformation charakteristisch; sie gibt nämlich unmittelbar *das Doppelverhältniss zweier entsprechender Punkte mit den beiden Doppelelementen;* und dies ist somit constant. Es bietet daher Interesse, die Constanten c'. c durch die Coëfficienten der Transformation, d. h. in unserem Falle durch die Coëfficienten a, b, α, β auszudrücken. Für λ', λ'' haben wir aus (7) die Werthe:

$$\begin{aligned} 2\,(b\beta)\,\lambda' &= -\,[(a\beta) + (b\alpha)] + \sqrt{l} \\ 2\,(b\beta)\,\lambda'' &= -\,[(a\beta) + (b\alpha)] - \sqrt{l}\,, \end{aligned}$$

wo

$$l = [(a\beta) + (b\alpha)]^2 - 4\,(a\alpha)\,(b\beta)$$

gesetzt ist. Wegen der Identität (vgl. (I) p. 193):

$$(b\beta)\, a_x = (a\beta)\, b_x - (ab)\, \beta_x$$

gehen dann die Gleichungen (9) über in:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\big((a\beta) - (b\alpha) + \sqrt{l}\,\big)\, b_x - 2\,(ab)\,\beta_x = 2\,(b\beta)\, p_x \\ &\big((a\beta) - (b\alpha) - \sqrt{l}\,\big)\, b_x - 2\,(ab)\,\beta_x = 2\,(b\beta)\, q_x ; \end{aligned}$$

und diese Gleichungen sollen auch für $x_i = \xi_i$ bestehen. Setzt man andererseits die Werthe von λ', λ'' in (10) ein und benutzt die Identität:

$$(b\beta)\, \alpha_\xi = (\alpha\beta)\, b_\xi - (\alpha b)\, \beta_\xi ,$$

so kommt

$$(13)\qquad \begin{aligned} &2\,(b\beta)\,(\alpha_\xi + \lambda'\,\beta_\xi) = \big(k + \sqrt{l}\,\big)\,\beta_\xi + 2\,(\alpha\beta)\, b_\xi \\ &2\,(b\beta)\,(\alpha_\xi + \lambda''\beta_\xi) = \big(k + \sqrt{l}\,\big)\,\beta_\xi + 2\,(\alpha\beta)\, b_\xi , \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$k = (a\beta) - (b\alpha)$$

gesetzt ist. Mit Hülfe der Identität

$$(a\alpha)\,(b\beta) = (ab)\,(\alpha\beta) + (a\beta)\,(b\alpha)$$

kann man nun die Invariante l auch auf die Form

$$l = [(a\beta) - (b\alpha)]^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta) = k^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta)$$

bringen. Unter Berücksichtigung dieser Relation erhält man, wenn man in (12) die x mit den ξ vertauscht, daraus b_ξ, β_ξ berechnet und in (13) einsetzt, das Resultat:

$$\begin{aligned} \alpha_\xi + \lambda'\,\beta_\xi &= \frac{k - \sqrt{l}}{(ab)}\, p_\xi = c\, p_\xi \\ \alpha_\xi + \lambda''\beta_\xi &= \frac{k + \sqrt{l}}{(ab)}\, q_\xi = c'\, q_\xi . \end{aligned}$$

Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Das Doppelverhältniss zwischen den Doppelpunkten und zwei entsprechenden Punkten der beiden projectivischen Reihen ist eine Constante; und zwar drückt sich dieselbe durch die Invarianten k, l aus in der Form:

$$\frac{c}{c'} = \frac{k - \sqrt{l}}{k + \sqrt{l}} .$$

Für besondere Werthe dieser Constanten ergeben sich auch besonders ausgezeichnete Beziehungen der beiden Punktreihen zu einander. Zu einer weiterhin noch öfter anzuwendenden Invariantenrelation gelangt man z. B. in folgender Weise. Jedem Punkte mit dem Parameter ϱ der ersten Reihe (13) entspricht in der zweiten

Reihe ein Punkt, welchem, insofern er der ersten angehört, der Parameterwerth $\varrho \cdot \frac{c}{c'}$ zukommt, d. h. welcher gegeben ist durch:

$$X_1 + \varrho \frac{c}{c'} X_2 = 0 .$$

Diesem entspricht wieder ein dritter Punkt der zweiten Reihe, dessen Parameter, insofern er der ersten angehört, gleich $\varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^2$ ist, u. s. f. bis zu einem $(n + 1)^{\text{ten}}$ Punkte mit dem Parameter $\varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^n$. Wir haben dann eine Reihe von Punkten:

$$\varrho, \quad \varrho \frac{c}{c'}, \quad \varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \cdots \cdot \varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^{n-1}, \quad \varrho \left(\frac{c}{c'}\right)^n,$$

von denen jeder folgende dem vorhergehenden durch unsere projectivische Zuordnung der beiden Punktreihen entspricht. Wir fragen nach der Bedingung dafür, dass wir durch Fortsetzung dieses Processes zu dem Ausgangspunkte ϱ zurückgeführt werden. Soll dies z. B. für den $(n + 1)^{\text{ten}}$ Punkt eintreten, so haben wir offenbar nur

$$\left(\frac{c}{c'}\right)^n = \left(\frac{k - \sqrt{l}}{k + \sqrt{l}}\right)^n = 1$$

anzunehmen. Bezeichnen wir nun ein Systen von solchen Punkten als ein *cyclisch-projectivisches*, so haben wir den Satz:

*Wenn das eine projectivische Verwandtschaft charakterisirende Doppelverhältniss gleich einer n^{ten} Wurzel der Einheit ist, so kann man von jedem Punkte der Reihe ausgehend ein cyclisch-projectivisches System von n Punkten angeben.**) D. h. sind $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ die Parameter dieser Punkte in der Reihe

$$X_1 + \lambda X_2 = 0,$$

so sind die durch folgendes Schema angegebenen Systeme von Punkten alle zu einander projectivisch:

*) Legt man statt der Punktreihe ein Strahlbüschel als geometrisches Bild zu Grunde und wählt die beiden vom Mittelpunkte desselben nach den imaginären Kreispunkten gehenden Linien als Doppelstrahlen für eine lineare Transformation, so ist die letztere identisch mit einer Drehung des Büschels um seinen Mittelpunkt. Die Forderung der cyclischen Projectivität geht dann in die andere über, dass ein Strahl durch n-malige Wiederholung einer Drehung um einen bestimmten Winkel (welcher durch das Doppelverhältniss $\frac{c}{c'}$ gegeben ist) in seine Anfangslage zurückkehre. Man wird also dann zu den *Kreistheilungsgleichungen* geführt.

$$\begin{array}{llllll}
0, \lambda_1 & , \lambda_2, & \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}, & \lambda_n & , \infty \\
0, \lambda_2 & , \lambda_3, & \lambda_1 \ldots \lambda_n & , \lambda_1 & , \infty \\
0, \lambda_3 & , \lambda_1, & \lambda_5 \ldots \lambda_1 & , \lambda_2 & , \infty \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \\
0, \lambda_{n-1}, & \lambda_n, & \lambda_1 \ldots \lambda_{n-3}, & \lambda_{n-2}, & \infty \\
0, \lambda_n & , \lambda_1, & \lambda_2 \ldots \lambda_{n-2}, & \lambda_{n-1}, & \infty .
\end{array}$$

Es darf hier jedoch nicht $\frac{c}{c'} = 1$ werden, denn dies würde nur für $l = 0$ eintreten, also nur, wenn die Doppelelemente zusammenfallen.*) Die n Punkte können bei reellen Doppelelementen nur sämmtlich reell sein für $\frac{c}{c'} = -1$, d. h. für $n = 2$. *In diesem Falle, den man als Involution bezeichnet, entsprechen immer zwei Punkte einander wechselseitig*, so dass es gleichgültig ist, welchen von ihnen man der einen, welchen der andern Reihe zuzählt. Wir sind auf diese Involution schon früher in der Kegelschnitttheorie geführt (p. 135); sie ist, wie wir schon damals sahen, dadurch charakterisirt, dass *je zwei entsprechende Punkte mit den Doppelpunkten ein harmonisches System bilden.* Die Gleichungen der beiden Reihen werden in der That von der Form:

$$X_1 - \lambda X_2 = 0$$
$$X_1 + \lambda X_2 = 0;$$

und wegen

$$\frac{c}{c'} = \frac{k - \sqrt{l}}{k + \sqrt{l}} = -1$$

ist allgemein die *Bedingung der Involution:*

$$k = (a\beta) - (b\alpha) = 0. \tag{14}$$

Wir können eine Involution auch durch eine einzige Gleichung:

$$X_1^2 - \varrho^2 X_2^2 = 0 \tag{15}$$

darstellen, wo wir dann für jeden Werth von ϱ das Product der beiden

---

*) Es sei ferner bemerkt, dass ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ $(\varepsilon = \sqrt[n]{1})$ nichts Verschiedenes geben; denn sie bewirken nur eine Vertauschung von $\sqrt{l}$ und $\sqrt{-l}$, also nur eine Vertauschung der beiden projectivischen Gebilde. Man hat daher bei ungeraden n nur auf $\frac{1}{2}(n-1)$ Werthe von ε Rücksicht zu nehmen. Ebenso ist bei geradem n, sobald $n > 2$ der Fall $\varepsilon = -1$ auszulassen; und es bleiben wieder nur $\frac{1}{2}(n-2)$ Werthe von ε. — Gibt es eine m^{te} Potenz von ε, welche niederer, als die n^{te} ist, und für die schon $\varepsilon^m = 1$, so besteht der Cyclus nur aus m verschiedenen Punkten, die $\frac{n}{m}$ mal durchlaufen werden, indem dann m ein Factor von n ist.

einander entsprechenden Punkte erhalten.*) Unter diesem Gesichtspunkte erscheint die Involution als Specialfall eines allgemeineren Gebildes, das durch eine Gleichung von der Form:

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0$$

dargestellt wird. Ehe wir jedoch auf diese sogenannten *Involutionen höherer Ordnung* näher eingehen, müssen wir kurz einen Blick auf eine Art von Covarianten mit zwei Reihen von Variabeln werfen, die aus der Grundform f durch wiederholte Anwendung des Processes

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2$$

entstehen und eben dadurch schon als invariante Bildungen gekennzeichnet sind.

Wir erhalten dieselben nach dem Taylor'schen Satze einfach als Coëfficienten einer Reihenentwicklung, wenn wir in der Form $f = a_x^n$ setzen:

$$x_1 = y_1 + \lambda z_1$$
$$x_2 = y_2 + \lambda z_2,$$

wo dann der veränderliche Parameter

$$\lambda = \frac{(xy)}{(xz)}$$

proportional zu dem Abstandsverhältnisse eines beweglichen Punktes x von zwei festen Punkten y und z ist. Durch diese Substitution geht die Gleichung $f = 0$, nach Potenzen von λ entwickelt, über in:

$$0 = a_y^n + \frac{n}{1} \lambda a_y^{n-1} a_z + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \lambda^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \ldots + \lambda^n a_z^n.$$

Die n Wurzeln dieser Gleichung geben die n Punkte, durch welche die Form f geometrisch dargestellt wird.

Die Coëfficienten der Gleichung sind bekanntlich proportional zu den Combinationssummen ihrer Wurzeln; und hieraus ist die geometrische Bedeutung einer jeden Gleichung:

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0$$

evident. Dieselbe ist, je nachdem die y oder z als gegeben angenommen werden, eine Gleichung von der r^{ten} Ordnung für die z oder von der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung für die y. Man nennt im ersten Falle die Punkte z *das Polarsystem***) r^{ter} *Ordnung oder das* $(n-r)^{te}$ *Polarsystem*

*) Vgl. Näheres hierüber in dem folgenden Abschnitte über binäre quadratische Formen.

**) System der harmonischen Mittelpunkte nach der Bezeichnung von Poncelet: Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques, Crelle's Journal, Bd. 3, 1828. — Der Polarenbegriff im ternären Gebiete (vgl. die folgende Ab-

des Poles y in Bezug auf das gegebene System der n Punkte x, im letzteren Falle die Punkte y *das Polarsystem* $(n-r)^{ter}$ *Ordnung des Poles z.* Wir können also sofort die folgenden Sätze aussprechen:

Das r^{te} Polarsystem eines gegebenen Poles z in Bezug auf ein gegebenes System von n Punkten besteht aus $n-r$ Punkten y, welche die Eigenschaft haben, dass für sie die Summe der Combinationen der Quotienten (Abstandsverhältnisse) $\frac{(xy)}{(xz)}$ zu $n-r$ verschwindet.

Gehört y zum r^{ten} Polarsysteme des Poles z, so gehört z zum $(n-r)^{ten}$ Polarsysteme des Poles y.

Der letztere Satz ist in dem folgenden allgemeineren enthalten, der sich aus Betrachtung einer Gleichung

$$a_z^\mu a_t^\nu \ldots a_y^\lambda = 0, \quad (\mu + \nu + \ldots + \lambda = n)$$

von selbst ergibt: *Bildet man für die gegebene Punktgruppe das ν^{te} Polarsystem eines Poles t, für dies neue Punktsystem das μ^{te} Polarsystem eines Poles z, etc. und gelangt man so schliesslich zu einer Gleichung λ^{ten} Grades, welcher λ Punkte y entsprechen, so bleibt derselbe Zusammenhang noch bestehen, wenn man in irgend einer Weise gleichzeitig die Punkte $y, z, t \ldots$ und die Ordnungen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ der einzelnen Polarsysteme vertauscht.*

Ferner folgt aus der Gleichung

$$a_y^\lambda a_z^\mu a_z^\nu = a_y^\lambda a_z^{\mu+\nu}.$$

Bildet man für die gegebene Punktgruppe das ν^{te} Polarsystem des Poles z und für dies neue System das μ^{te} Polarsystem desselben Poles, so ist das letztere auch das $(\mu+\nu)^{te}$ für diesen Pol in Bezug auf die gegebene Punktgruppe.

In ähnlicher Weise lassen sich noch eine Menge Sätze über die Polargruppen ableiten.*) Wir erwähnen nur die folgenden:

Das $(n-1)^{te}$ Polarsystem besteht aus einem einzelnen Punkte. Ist nun das gegebene System entstanden aus einem Punkte $b_x = 0$ und einer Gruppe von $(n-1)$ Punkten $c_x^{n-1} = 0$, so ist

---

theilung dieser Vorlesungen) findet sich bereits bei Cramer, der jedoch nur den unendlich fernen Punkt der Y-Axe als Pol nahm (Introduction à l'analyse des lignes courbes, Genf 1750, p. 135); die $(n-1)^{ten}$, d. h. linearen Polaren mit unendlich fernem Pole hat schon Newton. Die Bezeichnung der ganzen Reihe als erste, zweite . . . Polare stammt von Bobillier (Gergonne, Annales t. 18 und 19, 1828); die einfache Behandlung der Theorie mittelst homogener Coordinaten von Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5, 1829). Vgl. ferner Grassmann: Theorie der Centralen, ib. Bd. 24, 1842; Jonquières: Mémoire sur la théorie des poles et polaires, Liouville's Journal, août 1857; Cayley: Fifth memoir upon quantics, Philos Transactions, t. 148, 1858; und Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.

*) Es sei bemerkt, dass diese Sätze später für die Theorie der algebraischen Curven von Wichtigkeit werden.

$$n a_y a_z^{n-1} = b_y c_z^{n-1} + (n-1) b_z c_y c_z^{n-2}.$$

Genügt also y zugleich den Gleichungen

$$b_y = 0 \quad \text{und} \quad c_y c_z^{n-2} = 0,$$

so verschwindet auch $a_y a_z^{n-1}$, d. h.:

Der $(n-2)^{te}$ Polarpunkt eines Systems von $(n-1)$ Punkten ist auch der $(n-1)^{te}$ Polarpunkt des Systems, welches aus jenen $(n-1)$ Punkten und aus ihm selbst gebildet wird.

Fallen p Punkte der gegebenen Gruppe zusammen, so enthält, wenn $p > r$, die Gleichung $a_y^{n-r} a_z^r = 0$ den betreffenden Punkt (y) $(p-r)$-mal als Factor, oder:

Fallen in dem gegebenen Systeme p Punkte zusammen, so fallen in denselben Punkt $(p-r)$ Punkte des r^{ten} Polarsystemes eines jeden beliebigen Poles.

Ist der vielfache Punkt, dessen Gleichung $c_z = 0$ sein mag, zugleich der Pol, so folgt aus der Form

$$a_x^n = c_x^p b_x^{n-p}$$

bei Bildung der r^{ten} Polare für diesen Pol:

$$a_y^{n-r} a_z^r = \mu \,.\, c_y^p b_y^{n-p-r} b_z^r,$$

wo μ einen Zahlenfactor bedeutet, d. h.

Das r^{te} Polarsystem eines p-fachen Punktes besteht aus diesem Punkte selbst, p-mal gerechnet, und aus der r^{ten} Polare dieses Punktes für die übrigen $(n-p)$ Punkte des Systems.

Für $p + r > n$ verschwindet aber der Ausdruck $a_y^{n-r} a_z^r$ identisch d. h. unabhängig von den z; und das Polarsystem wird unbestimmt. Also:

*Alle Polarsysteme des p-fachen Punktes von einer höheren, als der $(n-p)^{ten}$ Ordnung sind unbestimmt.**)

Die hier entwickelte Polarentheorie gibt sofort Gelegenheit zur geometrischen Interpretation einiger sehr wichtiger Covarianten, die noch erwähnt sein mögen. Es gibt nämlich solche Pole (y), für welche zwei Punkte des ersten Polarsystems (z) zusammenfallen. Zur Bestimmung derselben haben wir (vgl. p. 181):

$$\frac{\partial a_y a_z^{n-1}}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial a_y a_z^{n-1}}{\partial z_2} = 0,$$

oder wegen

$$a_y a_z^{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} y_2\right):$$

*) Dem entspricht z. B. in der Ebene der Satz, dass für einen zerfallenden Kegelschnitt jede Gerade als Polare des Doppelpunktes aufgefasst werden kann (vgl. p. 101).

$$(16)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\, y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1\,\partial z_2}\, y_2 &= n\,(n-1)\, a_y a_z^{n-2} a_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2\,\partial z_1}\, y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}\, y_2 &= n\,(n-1)\, a_y a_z^{n-2} a_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen y_1, y_2, so sind die Doppelpunkte der Polarsysteme gegeben durch (rechts müssen in einer Gleichung neue Symbole b eingeführt werden, vgl. p. 191):

$$(17)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1\,\partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2\,\partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \end{vmatrix} = n^2\,(n-1)^2\, a_z^{n-2} b_y^{n-2}\,(ab)\, a_1 b_2 = 0\,.$$

Dies ist aber die uns schon bekannte Hesse'sche Determinante von f, die wir oben auch in ihrer symbolischen Gestalt bildeten. Wir wollen dieselbe abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2}\, n^2\,(n-1)^2$ mit Δ bezeichnen, und also setzen:

$$(18)\quad \begin{aligned} \Delta = a_z^{n-2} b_z^{n-2}\,(ab)\,(a_1 b_2 - b_1 a_2) &= (ab)^2\, a_z^{n-2} b_z^{n-2} \\ &= \frac{2}{n^2\,(n-1)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\,\partial z_2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Eliminirt man dagegen aus den Gleichungen (16) die z, so erhält man eine andere Gleichung $\mathsf{P} = 0$, die ebenso wie $\Delta = 0$ von der Ordnung $2n - 4$ ist. Also:

Für jedes System von n Punkten gibt es eine Gleichung $(2n-4)^{ter}$ Ordnung ($\mathsf{P} = 0$), welche die $2n-4$ Pole angibt, deren erste Polarsysteme Doppelpunkte haben. Diese Doppelpunkte selbst sind durch die Hesse*'sche Covariante ((17) bez. (18)) gegeben.*

Ferner kann man nach solchen Polen fragen, deren erste Polarsysteme in Bezug auf die Grundform und in Bezug auf die Hesse'sche Form einen gemeinsamen Punkt haben. Diese Pole bestimmen sich durch das Zusammenbestehen der Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial z_1}\, y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}\, y_2 = n\, a_y a_z^{n-1} \\ 0 &= \frac{\partial \Delta}{\partial z_1}\, y_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial z_2}\, y_2 = (n-2)(ab)^2 (a_z^{n-2} b_z^{n-3} b_y + b_z^{n-2} a_z^{n-3} a_y). \end{aligned}$$

Die Elimination der y führt hier auf die Functionaldeterminante der Grundform und der Hesse'schen Covariante:

$$(20)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial z_2} \end{vmatrix} = n\,(2n-4)\,(a\Delta)\, a_x^{n-1} \Delta_x^{2n-5} = 0\,,$$

wo Δ_1, Δ_2 Symbole von Δ sind, indem

$$\Delta_x^{2n-4} = (\Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2)^{2n-4} = \Delta$$

gesetzt ist. Um für dieselben die Symbole der Grundform (a, b, c) einzuführen, haben wir nur die Elimination aus den in (19) rechts stehenden Ausdrücken auszuführen. Wir müssen dabei jedoch die a einmal durch neue Symbole c ersetzen, weil sonst beim Rückgange zu den wirklichen Coëfficienten Mehrdeutigkeit entstehen könnte. Ferner bemerken wir, dass die beiden Glieder der zweiten Gleichung mit einander identisch sind, denn das eine geht aus dem andern durch Vertauschung von a und b hervor. Wir haben demnach die y aus den folgenden beiden Gleichungen zu eliminiren:

$$a_y a_z^{n-1} = 0$$

$$(bc)^2 c_z^{n-2} b_z^{n-3} b_y = 0,$$

und erhalten dadurch an Stelle von (20):

$$T = (ab)(bc)^2 a_z^{n-1} c_z^{n-2} b_z^{n-3} = 0 \tag{21}$$

$$= \frac{1}{n(2n-4)}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial \Delta}{\partial z_2} - \frac{\partial \Delta}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_2}\right).$$

Die Elimination der z aus (19) ergibt eine andere Gleichung $\Theta = 0$, die ebenso wie $T = 0$ von der Ordnung $3n - 6$ ist; wir haben also den Satz:

Es gibt $3n - 6$ Pole ($\Theta = 0$), deren erste Polarsysteme, gebildet für das gegebene System und für das System der Doppelpunkte (d. i. der Hesse*'schen Form), einen gemeinsamen Punkt haben. Die gemeinsamen Punkte bestimmen sich durch die Gleichung $T = 0$ von der $(3n - 6)^{ten}$ Ordnung.*

— Von der Polarentheorie werden wir nun in der Theorie der allgemeinen Involutionen*) Gebrauch machen, zu der wir uns jetzt wenden. *Eine Involution n^{ter} Ordnung* ist durch die Gleichung:

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0 \tag{22}$$

gegeben, wo unter a und b Symbole verschiedener Formen verstanden sind, und λ ein veränderlicher Parameter ist. Die Gleichung stellt eine Reihe von Punktgruppen (in Anlehnung an Curvenvorstellungen auch *Büschel* genannt) vor, deren jede aus n Punkten besteht, so dass jeder Punkt der Geraden nur in einer Gruppe vorkommt; und das ganze Büschel ist durch irgend zwei Gruppen bestimmt. Die Betrachtung entspricht sonach durchaus derjenigen eines Kegelschnittbüschels in der Ebene, wo auch durch jeden Punkt der Ebene nur eine Curve des Büschels geht. Wie hierin drei zerfallende Kegelschnitte (drei Curven mit Doppelpunkt) vorkommen, so gibt es in der Involution

*) Vgl. Cremona: Einleitung in die Theorie der ebenen Curven; Jonquières: Généralisation de la théorie de l'involution. Annali di Matematica t. II; und Cayley: Transactions of the Cambridge Philosophical Society, t. XI, 1865.

einige Gruppen, welche zwei zusammenfallende Punkte enthalten; sie sind gegeben durch die Bedingungen:

$$a_x^{n-1} a_1 + \lambda b_x^{n-1} b_1 = 0$$
$$a_x^{n-1} a_2 + \lambda b_x^{n-1} b_2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von λ das Verschwinden der Functionaldeterminante von a_x^n und b_x^n:

(23) $$(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0,$$

und eine andere Gleichung ebenso hoher Ordnung durch Elimination von x_1, x_2, in welcher λ die Unbekannte ist. *In einer Involution n^{ter} Ordnung gibt es daher $2n-2$ Punktgruppen, die einen Doppelpunkt haben; und die Doppelpunkte sind durch die Gleichung* (23) *bestimmt.*

Diese Gleichung ändert sich nicht, wenn man eine oder beide der Formen a_x^n, b_x^n durch irgend eine andere der Involution ersetzt: So ist z. B. die Functionaldeterminante der Formen $a_x^n + \lambda b_x^n$, $a_x^n + \lambda' b_x^n$, wenn a und a', b und b' bez. gleichwerthige (vertauschbare) Symbole bedeuten, gleich:

$$(aa')\, a_x^{n-1} a'^{n-1}_x + \lambda\, (ba)\, b_x^{n-1} a_x^{n-1} + \lambda'\, (ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1} + \lambda\lambda'\, (bb')\, b_x^{n-1} b'^{n-1}_x = (\lambda' - \lambda)\,.\,(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1};$$

denn das erste und letzte Glied ändert bei der Vertauschung von a und a' bez. b und b' sein Vorzeichen; beide verschwinden also identisch (vgl. p. 194). Solche simultane *invariante Bildungen aus Formen gleicher Ordnung, welche sich nur um einen Factor ändern, wenn man eine dieser Formen durch eine lineare Combination aller ersetzt,* sind von ausserordentlicher Wichtigkeit, und wir werden denselben noch wiederholt begegnen. Man pflegt sie als *Combinanten* des betreffenden Systems*) von Formen zu bezeichnen: Insbesondere ist also die Functionaldeterminante zweier binärer Formen gleicher Ordnung eine Combinante für die durch dieselben bestimmte Involution.

Eine Involution kann man z. B. unmittelbar durch die ersten Polarsysteme einer Form a_x^n:

$$a_x^{n-1} a_y = 0$$

erzeugt denken, wenn man $\frac{y_1}{y_2}$ als Parameter ansieht; also: *Jedes erste Polarsystem einer Gruppe von n Punkten bildet eine Involution $(n-1)^{ter}$ Ordnung.* Mit Hülfe des vorigen Satzes folgt hieraus wieder die geometrische Bedeutung der Hesse'schen Covariante einer binären Form.

Zwei Involutionen von der Form:

(24) $$a_x^n + \lambda b_x^n = 0$$
$$\alpha_\xi^m + \lambda \beta_\xi^m = 0,$$

*) Vgl. Näheres hierüber bei Gordan: Ueber Combinanten, Math. Annalen, Bd. 5.

die einander so zugeordnet sind, dass einer Gruppe von n Punkten x der ersteren immer eine Gruppe von m Punkten ξ der anderen entspricht, wenn beiden Gruppen derselbe Werth von λ zugehört, heissen *projectivisch* (allgemeiner könnte man in der zweiten Involution einen Parameter μ annehmen, der mit λ durch eine lineare Gleichung verknüpft ist). In diesem Sinne ist folgender Satz sofort ersichtlich:

Wenn man von einem Involutionssysteme ausgeht und für eine beliebige Anzahl fester Pole in Bezug auf jede Gruppe des Systems nach einander die Polarsysteme derselben Ordnung bildet, so sind alle Reihen dieser neuen Systeme involutorisch, und die Involutionen sind alle unter einander projectivisch. Die $(n-1)^{\text{ten}}$ Polarsysteme eines gegebenen Poles y:

$$a_y^{n-1} a_x + \lambda b_y^{n-1} b_x = 0$$

bilden eine einfache Punktreihe. Das Doppelverhältniss von vier Punkten dieser Reihe soll auch das Doppelverhältniss der entsprechenden (d. i. für denselben Werth von λ gebildeten) Gruppen der gegebenen Involution, oder, was dasselbe ist, der für jenen Punkt als Pol abgeleiteten Polarsysteme heissen. Das Doppelverhältniss ist aber nur von den Werthen des reihenden Elementes λ für die vier Punkte abhängig, also unabhängig von dem Pole; und somit folgt:

Das Doppelverhältniss von vier Punktgruppen einer Involution, welche durch Polarenbildung aus vier Gruppen einer gegebenen Involution entstanden sind, ist gleich dem Doppelverhältniss der letzteren und unabhängig von den benutzten Polen. —

Die projectivische Zuordnung der beiden Involutionen (24) können wir auffassen als eine höhere Verwandtschaft: Jedem Punkte x der Geraden entsprechen m Punkte ξ und jedem Punkte ξ n Punkte x; und zwar ist der Zusammenhang zwischen den Punkten x und ξ gegeben durch die Gleichung:

$$a_x^n \beta_\xi^m - b_x^n \alpha_\xi^m = 0, \tag{25}$$

welche das Resultat der Elimination von λ aus (24) ist und die Stelle der bei der linearen Verwandtschaft auftretenden Gleichung (6) vertritt. Es kann nun insbesondere vorkommen, dass ein Punkt x mit einem der ihm entsprechenden Punkte ξ zusammenfällt, d. h. dass die beiden einander zugeordneten Gruppen der Involutionen einen gemeinsamen Punkt haben. Wir erhalten diese gemeinsamen Punkte aus der Gleichung

$$a_x^n \beta_x^m - b_x^n \alpha_x^m = 0, \tag{26}$$

oder aus einer Gleichung für λ von ebenso hohem Grade. Es ergibt sich also der Satz:

Zwei Involutionen vom m^{ten} und n^{ten} Grade, welche projectivisch sind, haben $m+n$ entsprechende Gruppen, denen ein Punkt gemeinsam ist.

Dieser Satz ist in einem noch allgemeineren enthalten; zu letzterem gelangt man einfach, wenn man die Gleichung (25) durch die andere

$$\varphi(\overset{m}{x}, \overset{n}{\xi}) = 0 \tag{27}$$

ersetzt, wo φ eine homogene Function m^{ter} Ordnung in x_1, x_2 und n^{ter} Ordnung in ξ_1, ξ_2 bedeutet. Die Gleichung (27) begründet dann wieder eine Verwandtschaft *(Correspondenz)* allgemeinster Art, bei der jedem x n Punkte ξ und jedem ξ m Punkte x entsprechen. Die Bedingung, dass ein Punkt x mit einem entsprechenden ξ zusammenfalle, gibt eine Gleichung von der Ordnung $m + n$, d. h. $m + n$ „*Coincidenzpunkte der Correspondenz* φ“. Wir sprechen dies im folgenden Satze aus, der als Chasles'sches Correspondenzprincip*) bekannt ist, und den wir noch sehr oft anwenden werden:

Hat man auf einer Geraden eine Verwandtschaft (Correspondenz), durch welche jedem Punkte x m Punkte ξ, jedem dieser Punkte ξ aber n Punkte x entsprechen, so kommt es $(m + n)$-mal vor, dass ein Punkt x mit einem entsprechenden Punkte ξ zusammenfällt. —

Wenn in (24) die Functionen $a_x{}^n$, $b_x{}^n$ einen gemeinsamen Factor p^{ter} Ordnung enthalten, so kommen die ihm entsprechenden Punkte in jeder Gruppe der Involution vor, und letztere besteht aus diesen p festen Punkten und einer Involution $(n - p)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist dasselbe mit der zweiten Gleichung (24) für einen Factor vom p'^{ten} Grade der Fall, so zerfällt die Gleichung (26) in die beiden Factoren von der Ordnung p und p' und in einen Factor von der $(m + n - p - p')^{\text{ten}}$ Ordnung. Also: *es gibt dann nach Ausscheiduug dieser festen Punkte nur noch $m + n - p - p'$ Gruppen der Involutionen mit je einem gemeinsamen Punkte.*

Enthält dagegen eine bestimmte Gruppe der einen Involution einen linearen Factor r-fach, die entsprechende der andern denselben Factor s-fach und ist $r > s$, so enthält die Gruppe der gemeinsamen Punkte der Involutionen diesen Factor s-fach; und so lassen sich noch eine Reihe ähnlicher Sätze aufstellen. Wir verlassen indessen diese allgemeinen Erörterungen; wir werden im Folgenden noch Gelegenheit haben auf die quadratischen, sowie auf einige besondere cubische und biquadratische Involutionen näher einzugehen.

IV. Die binären quadratischen und cubischen Formen.

Wenn wir uns jetzt dazu wenden, die Formen niedrigster Ordnung systematisch zu behandeln (um hauptsächlich die geometrischen

*) Vgl. Chasles: Comptes rendus de l'académie des sciences, 27. Juin 1864.

Bedeutungen ihrer Invarianten und Covarianten kennen zu lernen), so ist es nach den obigen formentheoretischen Ausführungen zunächst unsere Aufgabe, für die betrachtete Grundform alle möglichen Invarianten und Covarianten aufzustellen und die etwaigen Abhängigkeitsgesetze derselben unter einander anzugeben. Es drängt sich somit die Frage auf: Giebt es für eine gegebene Form eine endliche Anzahl von unter einander unabhängigen invarianten Bildungen, durch welche sich alle andern rational und ganz ausdrücken lassen? In der That hat nun Gordan den Beweis gegeben*), *dass eine jede binäre Form, sowie ein jedes simultane System solcher Formen ein endliches „Formensystem" besitzt*, d. h. eine endliche Anzahl von Invarianten und Covarianten der verlangten Art. Der Beweis dieses Satzes, auf den wir hier nicht näher eingehen können, beruht wesentlich auf der von uns schon sonst als wichtig erkannten symbolischen Darstellung der Formen. Wir sahen früher, wie man mittelst derselben ganz allgemein die äussere Gestalt der invarianten Bildungen angeben kann; es kommt also nur darauf an, einen Process anzugeben, durch welchen man im Stande ist, die zunächst unendliche Zahl derselben in systematischer Weise nach einander und aus einander zu bilden; und dann hat man nachzuweisen, (dass dieser Process *alle* Invarianten und Covarianten gibt, und) dass derselbe nicht in's Unendliche fortgesetzt werden kann, ohne auf Verbindungen von schon vorher erhaltenen Bildungen zurückzuführen. Diese Bildungsmethode besteht in Folgendem.

Es seien zwei Formen gegeben

$$f = a_x{}^n \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha_x{}^m, \quad \text{wo} \quad n > m,$$

so kann man in einfachster Weise aus denselben Covarianten erzeugen, indem man die Ausdrücke

$$(1) \qquad (a\alpha)^k a_x{}^{n-k} \alpha_x{}^{m-k}$$

für $k = 1$ bis $k = m$ bildet. Dass diese sogenannten *„Ueberschiebungen von f über φ"* die Invarianteneigenschaft besitzen, ist aus ihrer Gestalt klar; und gleichzeitig sind es die einzigen Formen, in welchen die Coëfficienten von $a_x{}^n$ und $\alpha_x{}^m$ *linear* vorkommen. Für $k = 0$ würden wir das Product der beiden Grundformen, für $k = 1$ ihre Functionaldeterminante erhalten. Das nicht symbolische Bildungsgesetz für letztere kennen wir bereits; es ist dargestellt durch die Gleichung:

$$(a\alpha)\, a_x{}^{n-1} \alpha_x{}^{m-1} = \frac{1}{n \cdot m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right);$$

*) Für eine einzelne binäre Form im 69. Bd. von Crelle's Journal; vereinfacht und für ein simultanes System im 2. Bd. der Math. Annalen. Vgl. auch den vierten und sechsten Abschnitt in dem erwähnten Werke von Clebsch.

ebenso lässt sich aber auch die k^{te} Ueberschiebung (1) auf eine Combination der Differentialquotienten von f und φ zurückführen. Durch Entwicklung der Potenz $(a\alpha)^k$ und nachherige Multiplication mit $a_x^{n-k}\alpha_x^{m-k}$ erhält man nämlich lauter Glieder von der Form

$$(-1)^i \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1.2.3\ldots i} a_1^{k-i}\alpha_2^{k-i}a_2^i\alpha_1^i a_x^{n-k}\alpha_x^{m-k}$$

$$= (-1)^i \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1.2\ldots i.n\ldots(n-k+1).m\ldots(m-k+1)} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i}\partial x_2^i} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}};$$

und man übersieht nun leicht, wie sich durch Einsetzung dieser Werthe die wirklichen Bildungen gestalten.*) Für $k=2$ bekommt man z. B.:

$$(a\alpha)^2 a_x^{n-2}\alpha_x^{m-2} = \frac{1}{n(n-1)m(m-1)}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\right\}.$$

Statt zweier Formen f, φ kann man bei Bildung einer Ueberschiebung auch zweimal dieselbe Form $f = a_x^n = b_x^n$ anwenden; es entstehen dadurch Invarianten und Covarianten von f, welche die Coëfficienten im zweiten Grade enthalten, und von denen man nach den oben genannten Principien beweist, dass sie die einzigen Bildungen zweiten Grades sind, nämlich:

$$(ab)^k a_x^{n-k} b_x^{n-k}.$$

Für $k=2$ erhält man so z. B. wieder die Hesse'sche Covariante. Es verschwinden hier aber alle diejenigen Ueberschiebungen identisch, für welche k eine ungerade Zahl ist, weil diese Formen durch Vertauschung der beiden gleichbedeutenden Symbole das Vorzeichen ändern (vgl. p. 194). Ist nun eine Form f gegeben, so bildet man, um ein vollständiges Formensystem zu erhalten, zunächst alle Ueberschiebungen von f über sich selbst; darauf die der erhaltenen neuen Formen über f, u. s. f. Es wird dann in dem von Gordan gegebenen Beweise gezeigt, dass man auf diese Art sämmliche Covarianten und Invarianten erhalten kann, und dass die Zahl der von einander unabhängigen eine endliche ist. — Es sei noch bemerkt, dass sich durch diesen Process unmittelbar eine Anordnung der erhaltenen Formen nach dem *Grade in den Coëfficienten* der Grundform ergibt, denn dieser wird bei jeder neuen Ueberschiebung über die Grundform um eine Einheit erhöht. Es ist diese Eintheilung wichtiger, als etwa die nach der Ordnung in den Variabeln, da sie gleichzeitig Covarianten und Invarianten umfasst.

Wir wollen diese Principien nun zum Studium der quadratischen,

---

*) Diese Bildungen wurden von Cayley angegeben: A fourth memoir upon quantics; Philos. Transactions, 1858.

cubischen und biquadratischen Formen benutzen. Es sei zunächst *eine quadratische Form*

$$f = a_x^2 = a_0 x_1^2 + 2\, a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

gegeben. Die erste Ueberschiebung derselben über sich selbst liefert die uns schon bekannte Invariante

$$D = (ab)^2 = 2\,(a_0 a_2 - a_1^2),$$

und weiter können wir den Process des Ueberschiebens nicht fortsetzen. In der That lässt sich hier auch leicht direct zeigen, *dass D die einzig mögliche invariante Bildung von f ist.* Ein jedes Punktepaar nämlich kann, wenn es nicht aus zwei zusammenfallenden Punkten besteht, in jedes andere Punktepaar (∞ oft) linear transformirt werden, denn eine lineare Transformation ist erst festgelegt, wenn man drei Punkte dreien anderen zuordnet. Ein Punktepaar hat daher keine absolute Invariante, d. h. es kann nur die *eine* Invariante auftreten, deren Verschwinden das Zusammenfallen der Punkte des Paares aussagt; und diese Bedingung ist, wie wir schon früher sahen (p. 190) durch $D = 0$ gegeben. Eine Covariante von f müsste nach unseren allgemeinen Sätzen (p. 187) von der Form sein:

$$\Pi = (ab)\, a_x b_y \,.\, M,$$

wo M die Symbole a, b nicht enthält, und wo x, y beliebige Grössen sind (entweder selbst Punktcoordinaten oder, indem z. B. $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$, Symbole von f, die durch weitere in M enthaltene Symbole zu wirklichen Coëfficienten von f ergänzt werden). Vertauschen wir in Π die Symbole (a, b) und nehmen die halbe Summe beider Ausdrücke, so kommt nach Identität IV:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\,(ab)\;(a_x b_y - b_x a_y)\, M$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(ab)^2\,(xy)\, M\,.$$

Hat also eine Covariante von f den Factor (ab), so hat sie auch den Factor $(ab)^2$. Indem man nun auf M denselben Process anwendet, erkennt man, dass alle Covarianten Aggregate von Producten der Form $D^{\mu} \,.\, f^{\nu} \,.\, N$ sein müssen, wo N die Coëfficienten von f nicht mehr enthält.

Die Theorie einer quadratischen Form wäre damit vollständig behandelt; es sei nur noch erwähnt, dass der Pol eines Punktes y zu diesem Punkte und den Punkten der Grundform immer harmonisch liegt. Die Gleichung

$$a_x a_y = 0$$

sagt nämlich unseren allgemeinen Bemerkungen zufolge aus, dass die Summe der Abstandsverhältnisse des Poles und des Punktes y von dem gegebenen Punktepaare Null, d. h. das Doppelverhältniss der vier

Punkte gleich -1 sei. Führt man daher den Punkt y und dessen Pol, *„zwei in Bezug auf f conjugirte Punkte“*, als Coordinatengrundpunkte ein, so wird f bei passender Bestimmung der in die neuen Coordinaten ξ_i eingehenden Constanten von der Form (vgl. p. 86):

$$f = a_x^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

— Sind *zwei quadratische Formen* gegeben:

$$f = a_x^2 = b_x^2 \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha_x^2 = \beta_x^2, \tag{2}$$

so veranlassen dieselben zum Studium der Involution zweiter Ordnung:

$$a_x^2 + \lambda \alpha_x^2 = 0. \tag{3}$$

Letztere lässt sich immer auf die schon erwähnten projectivischen Punktreihen zurückführen, deren entsprechende Punkte zu demselben festen Paare harmonisch sind. Dieses Paar wird nämlich durch die beiden in (3) enthaltenen Gruppen gegeben, welche aus zwei zusammenfallenden Punkten bestehen (vgl. p. 135). Wir erhalten dieselben hier aus der für λ quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0 + \lambda \alpha_0 & a_1 + \lambda \alpha_1 \\ a_1 + \lambda \alpha_1 & a_2 + \lambda \alpha_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder symbolisch, wenn man berücksichtigt, dass $(b\alpha)^2 = (a\beta)^2 = (a\alpha)^2$ ist:

$$(ab)^2 + 2\lambda (a\alpha)^2 + \lambda^2 (\alpha\beta)^2 = 0. \tag{4}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien λ', λ'' und wir wollen zunächst ausdrücklich annehmen, dieselben seien von einander verschieden; dann ist identisch in Bezug auf die x:

$$\begin{aligned} a_x^2 + \lambda' \alpha_x^2 &= a_x'^2 = \xi^2 \\ a_x^2 + \lambda'' \alpha_x^2 &= a_x''^2 = \eta^2, \end{aligned} \tag{5}$$

wo nun die a', a'' wirkliche Coëfficienten linearer Formen a_x', a_x'' sind. Eliminiren wir hieraus und aus (3) a_x^2, b_x^2, und führen statt λ das neue reihende Element

$$\mu = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}$$

ein, so wird die Involution dargestellt durch

$$\xi^2 - \mu \eta^2 = 0,$$

und zerfällt also in der That in die beiden projectivischen Punktreihen

$$\xi - \sqrt{\mu}\,\eta = 0, \quad \xi + \sqrt{\mu}\,\eta = 0,$$

welche die verlangte Eigenschaft haben. Die Coëfficienten der Gleichung (4) sind gegeben durch die zweite Ueberschiebung von f über sich selbst:

$$D = (ab)^2 = 2\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,,$$

die zweite Ueberschiebung von φ über sich selbst:

$$D'' = (\alpha\beta)^2 = 2\,(\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2)\,,$$

und durch die zweite Ueberschiebung von f über φ:

$$D' = (a\alpha)^2 = a_0 \alpha_2 + a_2 \alpha_0 - 2\,a_1 \alpha_1\,.$$

Die erste Ueberschiebung von f über φ führt dagegen zu der simultanen Covariante (Functionaldeterminante von f und φ und Combinante der Involution $f + \lambda\varphi$):

$$\vartheta = (a\alpha)\, a_x \alpha_x = \vartheta_x^2\,.$$

Durch diese vier Formen ist das vollständige simultane Formensystem von f und φ gegeben; denn alle weiteren Ueberschiebungen führen auf sie zurück oder verschwinden identisch, wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.

Die geometrische Bedeutung von D und D'' sind uns bekannt; es sind dies bez. die Discriminanten f und φ. Die Bedeutung der simultanen Invariante D'' folgt aus Gleichung (4); ihr Verschwinden sagt nämlich aus, das die Summe der Wurzeln $\lambda' + \lambda''$ verschwinde. In diesem Falle erhalten wir aus (5) durch Addition

$$a_x^2 = \tfrac{1}{2}\,(\xi^2 + \eta^2),$$

und durch Substitution:

$$\alpha_x^2 = \frac{1}{\lambda' - \lambda''}\,(\xi^2 - \eta^2)\,;$$

das Punktepaar von f ist daher gegeben durch

$$\xi + i\eta = 0\,,\quad \xi - i\eta = 0 \quad (i = \sqrt{-1})$$

und das von φ durch

$$\xi + \eta = 0\,,\quad \xi - \eta = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte wird somit

$$= \frac{i-1}{i+1} \cdot \frac{-i+1}{-i-1} = -1\,.$$

*Die Gleichung $D' = (a\alpha)^2 = 0$ sagt also aus, dass die Punkte von $f = 0$ zu denen von $\varphi = 0$ harmonisch liegen.**) Mit Hülfe dieses Satzes ergibt sich auch leicht die geometrische Bedeutung von $\vartheta = 0$. Bilden wir nämlich die D' entsprechende simultane Invariante der

*) Bedient man sich der geometrischen Repräsentation auf der Kugelfläche (vgl. die Anmerkung auf p. 173), so werden alle Punktepaare, welche zu einem gegebenen harmonisch liegen, durch diejenigen geraden Linien ausgeschnitten, welche die Verbindungslinie der gegebenen Punkte und deren harmonische Polare in Bezug auf die Kugelfläche gleichzeitig treffen.

beiden quadratischen Formen $f = a_x^2$ und $\vartheta = \vartheta_x^2$, so ist dieselbe $= (a\vartheta)^2$; sie entsteht also aus ϑ_x^2, wenn man darin die Grössen x_1, x_2 bez. durch $a_2 = b_2$, $-a_1 = -b_1$ ersetzt, und sie wird sonach

$$= (a\alpha)(ab)(\alpha b).$$

Diese Form ändert aber durch Vertauschung von a und b ihr Zeichen, verschwindet also identisch. Dasselbe ist mit der simultanen Invariante von ϑ und φ der Fall, und somit folgt aus der eben abgeleiteten Bedeutung dieser Invarianten, *dass die beiden durch $\vartheta = 0$ dargestellten Punkte zu den Verschwindungselementen sowohl von f, als von φ harmonisch liegen, d. h. mit den Grundpunkten der Involution* (3) *identisch sind.**) Denn da die beiden simultanen Invarianten $(a\vartheta)^2$, $(\alpha\vartheta)^2$ in den Coëfficienten von ϑ linear sind, kann es nur *ein* Punktepaar dieser Lagenbeziehung geben.

Durch die Gleichungen (5) ist das Problem gelöst, zwei binäre quadratische Form durch ein Aggregat der Quadrate der Veränderlichen darzustellen, was der gleichzeitigen Transformation zweier Kegelschnitte in die kanonische Form (p. 124, ff.) im ternären Gebiete entspricht. Wir erhalten nämlich:

$$\varphi = \frac{\xi^2 - \eta^2}{\lambda' - \lambda''}$$

$$f = -\frac{\lambda''\xi^2 - \lambda'\eta^2}{\lambda' - \lambda''}.$$

Die Verschwindungselemente beider Formen sind nun gegeben durch die Gleichungen:

$$\xi - \eta = 0, \qquad \xi + \eta = 0,$$

$$\xi - \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda''}}\,\eta = 0, \quad \xi + \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda''}}\,\eta = 0.$$

Bei der hier vorliegenden Trennung der vier Punkte in zwei Paare können wir das Doppelverhältniss derselben nur auf zwei Weisen bilden. Bezeichnen wir mit α einen Werth desselben:

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{\lambda'} - \sqrt{\lambda''}}{\sqrt{\lambda'} + \sqrt{\lambda''}}\right)^2,$$

so ist der andere gleich $\frac{1}{\alpha}$. Da aber λ', λ'' die Wurzeln der Gleichung (4) sind, so haben wir:

---

*) Diese Punkte sind andererseits durch das Product der Gleichungen (5) gegeben. In der That erweist man leicht durch Anwendung der Identitäten auf p. 193 die Relation:

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}(Df^2 - 2D'f\varphi + D''\varphi^2).$$

Es ist dieselbe auch eine Folge einer später zu gebenden allgemeinen Gleichung für das Quadrat einer Functionaldeterminante.

$$1 : \lambda' + \lambda'' : \lambda'\lambda'' = D : -2D' : D'',$$

und folglich wird

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\frac{(\lambda' + \lambda'')^2 + 4\lambda'\lambda''}{(\lambda' + \lambda'')^2 - 4\lambda'\lambda''} = 2\frac{D'^2 + DD''}{D'^2 - DD''}.$$

Die beiden Werthe des Doppelverhältnisses α *und* $\frac{1}{\alpha}$ *sind daher gegeben durch die quadratische Gleichung* (vgl. das entsprechende Problem der Kegelschnitttheorie auf p. 74):

$$\alpha^2 - 2\alpha\frac{D'^2 + DD''}{D'^2 - DD''} + 1 = 0$$

oder:

$$D'^2(\alpha - 1)^2 - DD''(\alpha + 1)^2 = 0;$$

eine Gleichung, welche für $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ das vorhin über die Bedeutung von D, D'' und D' Gesagte bestätigt.

Obige Herstellung der „*kanonischen Form*" ist jedoch nur möglich, so lange die Wurzeln der Gleichung (4) verschieden sind. Ist dies nicht der Fall, d. h. ist

$$R = DD'' - D'^2 = 0,$$

so fallen die Punkte ξ und η zusammen, und ϑ wird das Quadrat eines linearen Ausdruckes. In der That ist die Bedingung $R = 0$ auch mit dem Verschwinden der Invariante von ϑ (der zweiten Ueberschiebung von ϑ über sich selbst) identisch, denn wir haben

$$R = (ab)^2(\alpha\beta)^2 - (a\alpha)^2(b\beta)^2 = [(ab)(\alpha\beta) + (a\alpha)(b\beta)][(ab)(\alpha\beta) - (a\alpha)(b\beta)],$$

oder wegen der Identität III, (p. 193):

$$R = [(a\alpha)(b\beta) + (ab)(\alpha\beta)](a\beta)(b\alpha).$$

Dies entsteht aber aus

$$\vartheta_x\vartheta_y = \tfrac{1}{2}(a\beta)(a_x\beta_y + a_y\beta_x),$$

wenn man für x_1, x_2, y_1, y_2, bez. $\alpha_2, -\alpha_1, b_2, -b_1$ setzt und mit $-2(b\alpha)$ multiplicirt. Es ist daher auch:

$$R = -2(\vartheta\alpha)(\vartheta b)(b\alpha);$$

und dieser Ausdruck wieder entsteht aus

$$\vartheta = \vartheta_x'^2 = (b\alpha)b_x\alpha_x,$$

wenn man x_1, x_2 durch $\vartheta_2, -\vartheta_1$ ersetzt und mit -2 multiplicirt. Es folgt also in der That

$$R = -2(\vartheta\vartheta')^2,$$

wo $(\vartheta\vartheta')^2$ die Invariante von ϑ ist.

Soll nun auch in diesem Falle das Punktepaar ϑ zu f und φ harmonisch liegen — wie dies doch aus den früheren Formeln, die

hier durchaus ihre Geltung behalten, hervorgeht, so ist dies nur möglich (vgl. p. 40), wenn f und φ gleichzeitig den durch $\vartheta = 0$ doppelt dargestellten Punkt enthalten; also:

Die Resultante zweier quadratischen Formen kann durch die Discriminante ihrer Functionaldeterminante ersetzt werden; sie ist

$$(6) \qquad R = -2(\vartheta\vartheta')^2 = DD'' - D'^2.$$

Nicht symbolisch kann man dieselbe durch Elimination von x_1^2, $2x_1x_2$, x_2^2 aus den drei Gleichungen

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$$
$$\varphi = \alpha_0 x_1^2 + 2 \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$$
$$\vartheta = \vartheta_0 x_1^2 + 2 \vartheta_1 x_1 x_2 + \vartheta_2 x_2^2 = 0$$

in Gestalt einer Determinante erhalten; man findet:

$$R = - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden derselben ist gleichzeitig die Bedingung dafür, dass die Gleichung (3) einen von λ unabhängigen Factor hat. Denn wenn identisch (indem der Ausdruck (4) ein Quadrat wird)

$$(a_0 + \lambda\alpha_0)(a_2 + \lambda\alpha_2) - (a_1 + \lambda\alpha_1)^2 = -(p + \lambda q)^2$$

ist, so kann man setzen:

$$a_0 + \lambda\alpha_0 = m\left\{(a_1 + \lambda\alpha_1) + (p + \lambda q)\right\}$$
$$a_2 + \lambda\alpha_2 = \frac{1}{m}\left\{(a_2 + \lambda\alpha_2) - (p + \lambda q)\right\},$$

und dadurch geht die Gleichung (3) über in:

$$(mx_1 + x_2)\left\{(a_1 + \lambda\alpha_1)(mx_1 + x_2) + (p + \lambda q)(mx_1 - x_2)\right\} = 0.$$

Die Involution löst sich also für $R = 0$ in einen festen Punkt und in eine einfache Punktreihe auf. —

— Gehen wir nunmehr zur Betrachtung *einer binären cubischen Form* über. Für eine solche:

$$f = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3$$
$$= a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

ist das vollständige Formensystem gegeben durch:

Die zweite Ueberschiebung von f mit sich selbst, die Hesse'sche Covariante (zweiten Grades und zweiter Ordnung):

(7) $\Delta = (ab)^2 a_x b_x$;

$$= 2 \begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2 & a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 & a_2 x_1 + a_3 x_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & x_2^2 \\ a_1 & a_2 & -x_1 x_2 \\ a_2 & a_3 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + 2(a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2.$$

Die zweite Ueberschiebung von $\Delta = \Delta_x^2 = \Delta_x'^2$ über sich selbst, die Discriminante von Δ (Invariante vierten Grades):

(8) $$R = (\Delta \Delta')^2$$
$$= 2 \left\{ 4 (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 \right\}.$$

Die erste Ueberschiebung von f mit Δ, die Functionaldeterminante beider Formen (dritten Grades, dritter Ordnung):

(9) $$Q = (c\Delta)\, c_x^2 \Delta_x$$
$$= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2$$
$$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3) x_2^3.$$

Die zweite Ueberschiebung von f mit Δ:

$$(c\Delta)^2 c_x$$

verschwindet jedoch identisch; sie entsteht, wenn man in (9) x_1, x_2 bez. durch c_2, $-c_1$ ersetzt und mit c_x multiplicirt; also ist

$$(c\Delta)^2 c_x = (ab)^2 (ac)(bc) c_x,$$

oder wenn man einmal c mit a, einmal c mit b vertauscht und die Summe der drei Ausdrücke bildet:

(10) $$(c\Delta)^2 c_x = \tfrac{1}{3} (ab)(ac)(bc) \left\{ (ab) c_x - (cb) a_x - (ac) b_x \right\} = 0.$$

Dieser Ausdruck verschwindet nämlich, weil der eingeklammerte Theil desselben nach der Identität I. p. 193 Null ist. Es lassen sich ferner, wie hier nicht ausgeführt werden soll, auch alle weiteren Ueberschiebungen auf die Formen f, Δ, R, Q zurückführen. Dass es in der That nur eine Invariante von f gibt, ist auch daraus klar, dass jedes Punktetripel in jedes andere linear transformirt werden kann; denn durch die Zuordnung dreier Punkte ist gerade eine lineare Verwandtschaft festgelegt. Es ist dabei nur vorausgesetzt, dass nicht ein einzelnes der Tripel einen doppelt zählenden Punkt enthalte, d. h. dass nicht eine der Discriminanten der beiden betreffenden cubischen Formen verschwinde. *Eine cubische Form hat also nur eine Invariante, und dies ist ihre Discriminante**), *nämlich*

---

*) Der in (8) gegebene ausgerechnete Werth von R stimmt in der That mit dem auf p. 183 beispielsweise berechneten Werthe der Discriminante bis auf den Factor -2 überein. Diese Discriminante ist bis auf einen Zahlenfactor gleich

$$R = (\Delta\Delta')^2,$$

die Discriminante der Hesse'schen Covariante. In R können wir statt Δ, Δ' in folgender Weise die Symbole a, b, c, d der Grundform einführen: es entsteht R aus $\Delta_x'^2 = (ab)^2 a_x b_x$, indem wir darin x_1, x_2 bez. durch Δ_2, $-\Delta_1$ ersetzen, also ist:

$$R = (ab)^2 (a\Delta)(b\Delta).$$

Dieser Ausdruck entsteht nun aus

$$\Delta_x \Delta_y = \tfrac{1}{2}(cd)^2 (c_x d_y + d_x c_y)$$
$$= (cd)^2 c_x d_y,$$

wenn man darin für x_1, x_2 die Symbole a_2, $-a_1$, für y_1, y_2 die Symbole b_2, $-b_1$ einsetzt und mit $(ab)^2$ multiplicirt; es ist also endlich:

$$R = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd). \tag{11}$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen $\Delta = 0$ und $Q = 0$ ergibt sich aus früheren allgemeinen Sätzen. Wir erwähnten damals im Zusammenhange mit Δ noch einer anderen Covariante $\mathsf{P} = 0$, welche sich aus den Gleichungen (16) p. 206 durch Elimination der z ergab, während die Elimination der y die Hesse'sche Determinante lieferte. Diese Gleichungen werden für $n = 3$

$$a_y a_z a_1 = 0$$
$$a_y a_z a_2 = 0;$$

in ihnen kommen also die y, z symmetrisch vor. Die Elimination der letzteren führt somit ebenfalls auf $\Delta = 0$, d. h.

Für ein Punktetripel gibt es zwei Pole, deren erste Polargruppe

---

dem Quadrate des aus den Differenzen der Wurzeln von $f = 0$ gebildeten Productes, d. h. gleich

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die aus $f = 0$ sich ergebenden Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$ sind. Um den Zahlenfactor zu bestimmen, brauchen wir nur in den Ausdruck (8) für R die Wurzeln α durch die folgenden Gleichungen einzuführen:

$$-3\frac{a_1}{a_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$3\frac{a_2}{a_0} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$$

$$-\frac{a_3}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Alsdann tritt z. B. das Glied $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$ mit dem Zahlenfactor $-\frac{4}{9}$ auf, während dasselbe in dem Producte $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2$ den Factor -6 hat; und es ist sonach:

$$R = \tfrac{2}{27} a_0^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2.$$

aus zwei zusammenfallenden Punkten besteht; und zwar gehört immer zu jedem dieser Punkte als Pol der andere als Doppelpunkt der Polargruppe.

Die Form Q entsteht für $n = 3$ aus der im allgemeinen Falle durch T bezeichneten Covariante (p. 207); sie ist daher, wenn man die Symbole von f statt derer von Δ einführt, gegeben durch:

$$Q = (ab)^2 (cb) c_x^2 a_x . \tag{12}$$

In Verbindung mit Q erwähnten wir noch eine andere Form Θ, deren Verschwinden sich für $n = 3$ durch Elimination der z aus den Gleichungen

$$a_x a_z^2 = 0$$
$$\Delta_x \Delta_z = 0$$

ergibt. Die Ausführung dieser Elimination geschieht, indem wir in $a_x a_z^2 = 0$ die Grössen z_1, z_2 durch $\Delta_2 \Delta_x$, $- \Delta_1 \Delta_x$ ersetzen. Da aber der Ausdruck $a_x a_z^2$ in den z quadratisch ist, so dürfen wir diese symbolische Substitution nur in dem einen Factor a_z desselben ausführen, während wir in dem andern Factor a_z $z_1 = \Delta_2' \Delta_x'$, $z_2 = - \Delta_1' \Delta_x'$ zu setzen haben ($\Delta_x^2 = \Delta_x'^2 = \Delta$); wir erhalten somit:

$$\Theta = a_x \Delta_x \Delta_x' (a\Delta)(a\Delta').$$

Diese Form lässt sich auf f zurückführen. Wir haben nämlich wegen der Identität II (p. 193):

$$(a\Delta)(a\Delta')\Delta_x\Delta_x' = \tfrac{1}{2}\left\{(a\Delta)^2 \Delta_x'^2 + (a\Delta')^2 \Delta_x^2 - (\Delta\Delta')^2 a_x^2\right\}.$$

Setzen wir dies in Θ ein, so verschwinden die beiden ersten Terme, von denen jeder die zweite Ueberschiebung von f mit Δ als Factor enthält, identisch wegen (10); und wir erhalten:

$$\Theta = - \tfrac{1}{2} (\Delta\Delta')^2 a_x^3 = - \frac{R}{2} f. \tag{13}$$

Geometrisch gibt dies wegen der bekannten Bedeutungen von $Q = 0$ und $\Theta = 0$ den Satz:

Nur die drei gegebenen Punkte selbst haben die Eigenschaft, dass ihr erstes Polarsystem denjenigen Punkt enthält, welcher ihr Polarsystem in Bezug auf das Punktepaar $\Delta = 0$ bildet; die drei so entstehenden Polarpunkte für dieses Paar sind durch $Q = 0$ gegeben.

Hieraus folgt ferner, da der Polarpunkt eines Poles in Bezug auf ein Punktepaar nichts anderes, als der vierte harmonische Punkt ist: *Man erhält die Punkte der Covariante $Q = 0$, indem man zu den Grundpunkten von $f = 0$ die vierten harmonischen Punkte in Bezug auf das Punktepaar $\Delta = 0$ construirt;* oder mit andern Worten:

Die beiden durch $Q = 0$ und $f = 0$ gegebenen Punktetripel bestimmen zwei involutorische projectivische Reihen, deren Doppelpunkte durch $\Delta = 0$ gegeben sind.

Wegen der ausgezeichneten Rolle, welche sonach den Punkten von Δ zukommt, empfiehlt es sich, dieselben als Coordinatengrundpunkte einzuführen, wodurch dann die weitere Theorie der cubischen Formen sowie der Involution dritter Ordnung:

$$\varkappa f + \lambda Q = 0$$

wesentlich vereinfacht wird. Um den Einfluss der dazu führenden Substitution auf f und Q leicht zu übersehen, stellen wir zunächst eine identische Gleichung auf, welche zwischen den drei Covarianten f, Q, Δ besteht. Eine solche muss nämlich immer bestehen, sobald eine binäre Form zwei linear von einander unabhängige Covarianten zulässt; denn man kann z. B. in unserem Falle aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a_x^3 \\ \Delta &= (ab)^2\, a_x b_x \\ Q &= (ab)^2\, (cb) c_x^2 a_x \end{aligned}$$

die Variabeln x_1, x_2 eliminiren, und erhält dann eine Gleichung, in welcher als Coëfficienten der Ausdrücke f, Δ, Q Invarianten von f auftreten. Statt die Elimination direct auszuführen, beweisen wir sogleich den folgenden allgemeineren Satz:

Das Quadrat der Functionaldeterminante zweier Formen (ersten Ueberschiebung) ist eine quadratische Function dieser Formen, deren Coëfficienten die zweiten Ueberschiebungen sind.

Für die Functionaldeterminante zweier quadratischer Formen a_x^2 und α_x^2 haben wir nämlich:

$$\vartheta_x^2 = (a\alpha)\, a_x \alpha_x = \begin{vmatrix} a_1^2 & \alpha_1^2 & x_2^2 \\ a_1 a_2 & \alpha_1 \alpha_2 & -x_1 x_2 \\ a_2^2 & \alpha_2^2 & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir diese Identität auf beiden Seiten mit a_x^{m-2}, α_x^{n-2} und seien f, φ die beiden gegebenen Formen:

$$f = a_x^m, \quad \varphi = \alpha_x^n;$$

so folgt für die erste Ueberschiebung $(f, \varphi)_1$ derselben, wenn $f_{ik} = \frac{1}{m(m-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, $\varphi_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$ gesetzt wird:

$$(f, \varphi)_1 = (a\alpha)\, a_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} = \begin{vmatrix} f_{11} & \varphi_{11} & x_2^2 \\ f_{12} & \varphi_{12} & -x_1 x_2 \\ f_{22} & \varphi_{22} & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun die oben für eine Ueberschiebung gegebene nicht symbolische Definition benutzen (p. 212), so wird offenbar:

$$2\,(f,\varphi)_1{}^2 = \begin{vmatrix} f_{11} & \varphi_{11} & x_2{}^2 \\ f_{12} & \varphi_{12} & -x_1x_2 \\ f_{22} & \varphi_{22} & x_1{}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{22} & \varphi_{22} & x_1{}^2 \\ -2f_{12} & -2\varphi_{12} & 2\,x_1x_2 \\ f_{11} & \varphi_{11} & x_2{}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (f,f)_2 & (f,\varphi)_2 & f \\ (f,\varphi)_2 & (\varphi,\varphi)_2 & \varphi \\ f & \varphi & 0 \end{vmatrix},$$

wo $(f,\varphi)_2$ die zweite Ueberschiebung von f über φ bedeutet, also:

$$(f,f)_2 = (ab)^2\,a_x{}^{m-2}\,b_x{}^{m-2};\;(f,\varphi)_2 = (a\alpha)^2\,a_x{}^{m-2}\,\alpha_x{}^{n-2},\;(\varphi,\varphi)_2 = (\alpha\beta)^2\,\alpha_x{}^{n-2}\,\beta_x{}^{n-2}.$$

Durch Ausrechnung der in der letzten Gleichung rechts stehenden Determinante erhalten wir schliesslich die gesuchte Relation:

$$(f,\varphi)_1{}^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{(\varphi,\varphi)_2\cdot f^2 - 2\,(f,\varphi)_2\cdot f\varphi + (f,f)_2\cdot\varphi^2\right\}.$$

— In unserem Falle haben wir $f = a_x{}^3$, $\varphi = \Delta = (f,f)_2$, $(\varphi,\varphi)_2 = R$, $(f,\varphi)_2 = 0$ (wegen (10)), $(f,\varphi)_1 = Q$, und somit geht jene Identität über in:

$$Q^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{Rf^2 + \Delta^3\right\},$$

oder:

$$\Delta^3 = -\,(2\,Q^2 + R\,f^2)$$

$$= -\,2\left\{Q + f\sqrt{-\tfrac{R}{2}}\right\}\left\{Q - f\sqrt{-\tfrac{R}{2}}\right\}. \tag{14}$$

Denken wir uns nun Δ in seine linearen Factoren aufgelöst und führen diese als neue Variable ein, d. h. setzen wir*)

$$\Delta = -\,2\,\xi\,\eta, \tag{15}$$

so haben wir in (14) auf der linken Seite das Product zweier vollständiger Cuben. Auf der rechten Seite steht das Product zweier cubischen Formen; und da diese im Allgemeinen keinen gemeinsamen Factor haben (wovon man sich durch ein Zahlenbeispiel überzeugt), so muss jede dieser Formen ebenfalls den Cubus eines der linearen Factoren von Δ darstellen. Wir dürfen somit setzen:

$$\begin{aligned} Q + f\sqrt{-\tfrac{R}{2}} &= 2\,\xi^3 \\ Q - f\sqrt{-\tfrac{R}{2}} &= 2\,\eta^3; \end{aligned} \tag{16}$$

und dadurch sind die linearen Factoren ξ, η bis auf dritte Wurzeln der Einheit bestimmt. Wir kennen nämlich die Coëfficienten der cubischen Form $Q + f\sqrt{-\frac{R}{2}}$; dieselben seien α_0, $3\,\alpha_1$, $3\,\alpha_2$, α_3; alsdann haben wir zur Bestimmung von $\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ die Gleichungen

$$\xi_1{}^3 = \alpha_0,\quad \xi_1{}^2\xi_2 = \alpha_1,\quad \xi_1\,\xi_2{}^2 = \alpha_2,\quad \xi_2{}^3 = \alpha_3.$$

Wir brauchen also nur eine Cubikwurzel auszuziehen, denn es ist:

*) Vorzeichen und Zahlenfactor sind mit Rücksicht auf das Folgende gewählt.

$$\xi_1 = \sqrt[3]{\alpha_0}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_1}{\sqrt[3]{\alpha_0^2}}.$$

Durch Einführung dieser neuen Coordinatengrundpunkte sind f, Q, Δ *gleichzeitig auf eine kanonische Form gebracht;* und zwar erhält man aus (16):

$$(17) \qquad \begin{aligned} f\sqrt{-\frac{R}{2}} &= \quad \xi^3 - \eta^3 \\ Q &= \quad \xi^3 + \eta^3 \\ \Delta &= -2\,\xi\eta. \end{aligned}$$

Die Grundform f ist dadurch zugleich in ihre drei linearen Factoren zerlegt. Bedeutet nämlich ε eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit, so wird

$$(18) \qquad f = \frac{1}{\sqrt{-\frac{R}{2}}}(\xi - \eta)(\xi - \varepsilon\eta)(\xi - \varepsilon^2\eta).$$

Durch diese Transformation ist ferner auch die Tripelschaar

$$\varkappa f + \lambda Q = 0,$$

welche wir näher untersuchen wollten, auf eine einfache Gestalt gebracht: auch sie enthält nur noch die Cuben der neuen Veränderlichen. Ihre Gleichung wird nach (17):

$$(19) \qquad \left(\varkappa + \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}\right)\xi^3 + \left(\varkappa - \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}\right)\eta^3 = 0.$$

Die Verschwindungspunkte irgend eines Tripels dieser Involution sind jetzt gegeben durch:

$$(20) \qquad \xi - a\eta = 0, \quad \xi - \varepsilon a\eta = 0, \quad \xi - \varepsilon^2 a\eta = 0,$$

wo:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\varkappa - \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}{\varkappa + \lambda\sqrt{-\frac{R}{2}}}}.$$

Insbesondere erhalten wir hieraus für $\lambda = 0$ die Verschwindungspunkte von f:

$$(21) \qquad \xi - \eta = 0, \quad \xi - \varepsilon\eta = 0, \quad \xi - \varepsilon^2\eta = 0,$$

und für $\varkappa = 0$ die Verschwindungspunkte von Q:

$$(22) \qquad \xi + \eta = 0, \quad \xi + \varepsilon\eta = 0, \quad \xi + \varepsilon^2\eta = 0.$$

Man sieht hieraus zunächst, *dass von den Wurzeln von $f = 0$ und $Q = 0$ nur je eine reell ist, wenn die Wurzeln von $\Delta = 0$ reell sind.* Nehmen wir jedoch an, dass $(i = \sqrt{-1})$:

$$\xi = p + qi, \quad \eta = p - qi,$$

so wird:

$$f \cdot \sqrt{-\frac{R}{2}} = (p+qi)^3 - (p-qi)^3 = 2\,i\,(3\,p^2 q - q^3)\,;$$

und die linearen Factoren von f sind also proportional zu q, $p\sqrt{3}+q$, $p\sqrt{3}-q$, mithin reell. Also: *Bei reellen Coëfficienten hat die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln bei positivem, nur eine bei negativem R.*

Man erkennt ferner aus (21) und (22), wie in der That jedem Punkte von f ein Punkt von Q zugeordnet ist, welcher mit ihm und den Punkten von Δ harmonisch liegt, wie oben erwähnt wurde. Aber zwischen den Punkten von f und Q besteht noch eine andere Lagenbeziehung. Suchen wir nämlich zu je zwei Punkten von f den vierten harmonischen Punkt in Bezug auf den dritten Punkt von f, so führt dies auf drei andere Punkte, deren Coordinaten ξ, η bez. bestimmt sind durch $\left(\varrho = \frac{\xi}{\eta}\right)$:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\varrho}\cdot\frac{\varepsilon^2-\varrho}{\varepsilon^2-1} = -1\,,\quad \frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{\varepsilon^2-\varrho}\cdot\frac{1-\varrho}{1-\varepsilon} = -1\,,\quad \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varrho}\cdot\frac{\varepsilon-\varrho}{\varepsilon-\varepsilon^2} = -1\,,$$

und hieraus ergibt sich für $\frac{\xi}{\eta}$ bez.:

$$\frac{\xi}{\eta} = -1\,,\quad \frac{\xi}{\eta} = -\varepsilon\,,\quad \frac{\xi}{\eta} = -\varepsilon^2\,.$$

Dies sind aber nach (23) gerade wieder die Punkte $Q=0$; also:

Die drei Punkte $Q=0$ liegen so, dass jeder zu einem Punkte der gegebenen Form in Bezug auf die beiden anderen derselben harmonisch conjugirt ist; und ebenso überzeugt man sich, dass die Punkte von $f=0$ zu denen von $Q=0$ in derselben Beziehung stehen, *dass also zwischen f und Q in dieser Beziehung völlige Reciprocität stattfindet.**)

Die Elemente von $f=0$ und die von $Q=0$ liegen ferner so zu denen von $\Delta=0$, dass sie mit diesem Punktepaare ein *cyklisch-projectivisches System bilden* (vgl. p. 201); denn das Doppelverhältniss je zweier Elemente von f mit den Punkten $\xi=0$, $\eta=0$ ändert sich bei cyklischer Vertauschung nicht, es bleibt immer gleich $\frac{1}{\varepsilon}$, *und dasselbe gilt für die Punkte von Q, sowie für ein jedes Tripel der Schaar* (19). Wir haben für jeden Werth von $\frac{\varkappa}{\lambda}$ die folgenden drei projectivischen Punktreihen:

1)	$\xi=0$	$\xi-\ \ a\eta=0$	$\xi-\varepsilon\,a\eta=0$	$\xi-\varepsilon^2 a\eta=0$	$\eta=0$
2)	$\xi=0$	$\xi-\varepsilon\,a\eta=0$	$\xi-\varepsilon^2 a\eta=0$	$\xi-\ \ a\eta=0$	$\eta=0$
3)	$\xi=0$	$\xi-\varepsilon^2 a\eta=0$	$\xi-\ \ a\eta=0$	$\xi-\varepsilon\,a\eta=0$	$\eta=0$.

Sind andererseits beliebig drei Punkte gegeben und vertauscht

*) Vgl. v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 121, und: Beiträge zur Geometrie der Lage, ib. 1857, p. 178.

man dieselben cyklisch unter einander, d. h. macht man eine lineare Transformation, welche jeden der gegebenen Punkte in einen anderen von ihnen überführt, so sind dadurch zwei Punkte auf den Geraden bestimmt, welche bei diesen Transformationen stets sich selbst entsprechen; und diese stellen die quadratische Covariante des betreffenden Tripels dar.*) Da nun die Verschwindungspunkte von $\Delta = 0$ nach dem Vorigen zu allen Tripeln der Schaar $\varkappa f + \lambda Q = 0$ in dieser Beziehung stehen, so folgt, dass die quadratische Covariante irgend einer cubischen Form $\varkappa f + \lambda Q$ sich von Δ nur um einen Factor unterscheiden kann. Wir haben also, wenn wir überhaupt durch die Indices $\varkappa$, λ andeuten, dass die betreffende Form für $\varkappa f + \lambda Q$ statt für f gebildet werde:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = M \,.\, \Delta.$$

Es kann sich ebenso die Invariante $R_{\varkappa\lambda}$ von R nur um einen Factor unterscheiden, denn $R_{\varkappa\lambda}$ ist die Discriminante von $\Delta_{\varkappa\lambda}$, wie R die von Δ; und da sie vom zweiten Grade in den Coëfficienten von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ sein muss, so wird

$$R_{\varkappa\lambda} = M^2 R.$$

Diese Resultate können wir nach unseren früheren Erörterungen dahin zusammenfassen, *dass* Δ *und* R *Combinanten des Systems* $\varkappa f + \lambda Q$ *sind* (vgl. p. 208). — Endlich muss $Q_{\varkappa\lambda}$ ein zu $\Delta_{\varkappa\lambda}$, mithin auch zu Δ cyklisch projectivisches Tripel liefern, d. h. es muss die Form haben:

$$Q_{\varkappa\lambda} = kf + lQ.$$

Diese Relationen für die Formen $\Delta_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$, $Q_{\varkappa\lambda}$ kann man in der That direct aufstellen und so den Factor M und die k, l bestimmen. Sind nämlich a_0, a_1, a_2, a_3 die Coëfficienten von f; α_0, α_1, α_2, α_3 die von Q, so hat man in den Formen nur $\varkappa a_i + \lambda \alpha_i$ statt a_i einzusetzen und nach Potenzen von $\varkappa$, λ zu entwickeln. So wird z. B.

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2 \Delta + \varkappa\lambda\Delta_1 + \lambda^2\Delta_2,$$

wo:
$$\Delta_1 = \Sigma \frac{\partial \Delta}{\partial a_i} \alpha_i, \qquad \Delta_2 = \Sigma \frac{\partial \Delta_1}{\partial a_i} \alpha_i.$$

Indem man nun diesen Differentiationsprocess an den symbolischen Ausdrücken ausführt, wobei man nur jedes in der betreffenden Form

*) Für die Interpretation des complexen Werthgebietes der Variabeln $\frac{x_1}{x_2}$ auf der Kugelfläche (vgl. die Anmerkung auf p. 173) gelangt man für die cubischen Formen zu folgenden Resultaten: Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man $f = 0$ durch drei äquidistante Punkte eines grössten Kreises, des Aequators, darstellen. Dieselben mögen die geographische Länge 0°, 120°, 240° haben. Dann ist $Q = 0$ repräsentirt durch drei Punkte des Aequators mit der Länge 60°, 180°, 300°, und die Punkte von $\Delta = 0$ fallen in die beiden Pole.

vorkommende Symbol von f nach einander durch ein solches von Δ zu ersetzen und die erhaltenen Ausdrücke zu addiren braucht, wird man schliesslich nach passenden Umformungen zu den folgenden Resultaten geführt; es wird:*)

$$(23) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)\Delta$$

$$(24) \qquad R_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)R$$

$$(25) \qquad Q_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2\right)\left(\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f\right).$$

Die Gleichung (24) gibt zu folgendem Satze Veranlassung:

In der Tripelschaar (19) *kommen nur zwei Tripel vor, bei welchen Elemente zusammenfallen; es vereinigen sich dann jedesmal alle drei in einen der Verschwindungspunkte von* Δ. Denn setzt man die aus $R_{\varkappa\lambda} = 0$ sich ergebenden Werthe von $\frac{\varkappa}{\lambda}$ in (19) ein, so geht dies in $\xi^3 = 0$ oder in $\eta^3 = 0$ über.

Durch die Gleichung (25) endlich entspricht jedem Tripel der Schaar:

$$\varkappa f + \lambda Q = 0$$

ein anderes Tripel

$$\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f = 0,$$

und umgekehrt, so dass je ein Punkt der einen Schaar zu einem der andern in Bezug auf die beiden übrigen der letzteren conjugirt ist. Diese Zuordnung ist ferner eine reciproke, denn von dem Tripel $\varkappa Q - \frac{R}{2}\lambda f$ wird man durch Wiederholung desselben Processes zu $-\frac{R}{2}(\varkappa f + \lambda Q)$, also zu dem ursprünglichen Tripel zurückgeführt. Insbesondere gibt es jedoch solche Tripel, welche sich selbst conjugirt sind. Diese bestimmen sich durch die Gleichung

$$\varkappa^2 + \frac{R}{2}\lambda^2 = 0,$$

und fallen daher mit je einem (dreifach zählenden) Verschwindungspunkte von Δ zusammen. —

Die vorstehenden Betrachtungen erleiden eine wesentliche Modification, *wenn die Discriminante R verschwindet,* wenn also jede der Gleichungen $f = 0$, $\Delta = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat. Man hat dann $\xi = \eta$, und Δ wird ein volles Quadrat, während nach (14) oder (17) Q dem Cubus desselben linearen Ausdrucks proportional wird, so dass

*) Vgl. Näheres hierüber in dem Werke von Clebsch.

$\frac{Q}{\Delta}$ diesen Ausdruck selbst darstellt. *Die Doppelwurzel von Δ ist aber auch gleichzeitig Doppelwurzel von f.* Die Coëfficienten der zweiten Ueberschiebung von f mit Δ nämlich verschwinden nach (10) identisch; setzen wir nun $\Delta = -2(\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1)^2$, so gehen dieselben über in die ersten Differentialquotienten von f für $x_i = \xi_i$; wir haben:

$$0 = (a_0 \xi_1^2 + 2 a_1 \xi_1 \xi_2 + a_1 \xi_2^2) \xi_1 = \tfrac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x = \xi},$$

$$0 = (a_1 \xi_1^2 + 2 a_2 \xi_1 \xi_2 + a_3 \xi_2^2) \xi_2 = \tfrac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x = \xi}; \text{ q. e. d.}$$

Während diese Doppelwurzel aus $\frac{Q}{\Delta} = 0$ direct bestimmt wird, kann man also die einfache Wurzel aus der linearen Gleichung $\frac{f}{\Delta} = 0$ finden.

Hat endlich f eine *dreifache* Wurzel, d. h. ist $f = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^3$, so wird $\Delta = (\xi\xi)^2 \xi_x^2 \equiv 0$: *$\Delta$ verschwindet identisch, d. h. es bestehen die Relationen:*

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0, \quad a_1 a_3 - a_2^2 = 0,$$

welche sich auf die beiden reduciren:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}.$$

V. Die binären biquadratischen Formen. — Schlussbemerkungen.

Verwickelter, als die Theorie der cubischen Formen wird bereits die der biquadratischen, d. h. der Formen vierter Ordnung.*) Ist eine Form vierter Ordnung symbolisch gegeben durch

$$f = a_x^4 = b_x^4 \dots, \quad \text{oder in gewöhnlicher Weise:}$$

$$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$

so kann man zeigen, dass sie durch die folgenden vier Bildungen zu ihrem vollständigen Formensysteme ergänzt wird:

*Die zweite Ueberschiebung von f über sich selbst***), die Hesse'sche Covariante (zweiten Grades, vierter Ordnung):

---

*) Für die Theorie dieser Formen vgl. neben den mehrfach erwähnten Aufsätzen von Cayley, besonders: Hesse, Crelle's Journal, Bd. 41; Hermite, ib. Bd. 52 und Brioschi, ib. Bd. 53.

**) Dieselbe ist, wie üblich, mit H bezeichnet, während wir sie allgemein Δ nannten (p. 206), zum Unterschiede von der entsprechenden Bildung bei cubischen Formen.

$$(1)\quad H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = H_x^4 = H_x'^4$$
$$= 2 \begin{vmatrix} a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 & a_1 x_1^2 + 2 a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 \\ a_1 x_1^2 + 2 a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 & a_2 x_1^2 + 2 a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2 \end{vmatrix};$$

die vierte Ueberschiebung von f über sich selbst (Invariante zweiten Grades):

$$(2)\quad i = (ab)^4$$
$$= 2\,(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2);$$

die erste Ueberschiebung von f mit H, die Covariante T nach unserer früheren (p. 207) Bezeichnung (dritten Grades, sechster Ordnung):

$$(3)\quad T = (cH)\, c_x^3 H_x^3 = (ab)^2 (cb)\, c_x^3 a_x^2 b_x = T_x^6$$
$$= \tfrac{1}{16} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}$$
$$= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^6 + (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x_1^5 x_2$$
$$+ 5\,(a_0 a_1 a_4 - 3 a_0 a_2 a_3 + 2 a_1^2 a_3)\, x_1^4 x_2^2 + 10\,(a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2)\, x_1^3 x_2^3$$
$$+ 5\,(-a_0 a_3 a_4 + 3 a_1 a_2 a_4 - 2 a_1 a_3^2)\, x_1^2 x_2^4 + (9 a_4 a_2^2 - a_4^2 a_0 - 2 a_1 a_3 a_4 - 6 a_3^2 a_2)\, x_1 x_2^5$$
$$+ (3 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2 a_3^3)\, x_2^6;$$

endlich *die vierte Ueberschiebung von f mit H* (Invariante dritten Grades):

$$(4)\quad j = (cH)^4 = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2$$
$$= 6 \left\{ a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \right\} = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Alle weiteren Ueberschiebungen und somit nach dem Gordan-schen Satze alle weiteren Invarianten und Covarianten von f lassen sich auf diese zurückführen, wie wir bei einzelnen auch noch gelegentlich nachweisen werden. Insbesondere gilt dies also für die Formen P und Θ, deren Verschwinden uns Gruppen von vier und sechs Punkten liefern, welche mit denen von $H = 0$ bez. $T = 0$ in bekannter Relation stehen (vgl. p. 206). Mit der letzteren ist in unserem Falle, wie wir später sehen werden, die Punktgruppe $\Theta = 0$ identisch; die Covariante P dagegen erscheint als lineare Combination der Formen f und H, wie die folgende Rechnung zeigt. Das Verschwinden von P gibt diejenigen Punkte, deren erste Polargruppen einen Punkt doppelt zählend enthalten; P selbst ist daher die Discriminante der cubischen Form

$$a_x a_z^3 = \alpha_z^3 = \beta_z^3 = \ldots$$

d. h. wir haben (vgl. Gleichung (11) p. 220)

$$(5)\quad \begin{aligned} \mathsf{P} &= (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\alpha\gamma)(\beta\delta) \\ &= (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd)\, a_x b_x c_x d_x. \end{aligned}$$

Zur Umformung dieses Ausdrucks benutzen wir zunächst die beiden Identitäten (vgl. (II) p. 193):

$$-(ab)(ca)\,b_x c_x = \tfrac{1}{2}\left\{(ab)^2 c_x^2 + (bc)^2 b_x^2 - (ac)^2 a_x^2\right\}$$
$$-(ab)(bd)\,a_x d_x = \tfrac{1}{2}\left\{(ab)^2 d_x^2 + (bd)^2 a_x^2 - (ad)^2 b_x^2\right\}.$$

Setzen wir dies in (5) ein, so werden bei Ausführung der Multiplication zweimal zwei Glieder einander entgegengesetzt gleich, da sie bis auf das Vorzeichen durch Vertauschung von a und b aus einander entstehen; und es bleibt, wenn wir zweimal zwei andere sich nur durch die Stellung der Symbole a, b unterscheidende Glieder durch das Doppelte eines derselben ersetzen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} 4\,\mathsf{P} &= (ab)^4 (cd)^2 c_x^2 d_x^2 - 2(bc)^2 (bd)^2 (cd)^2 a_x^4 \\ &\quad + 2(cd)^2 (ac)^2 (bd)^2 a_x^2 b_x^2 \\ &= iH - 2jf + 2(cd)^2 (ac)^2 (bd)^2 a_x^2 b_x^2. \end{aligned}$$

Den letzten Term dieses Ausdruckes können wir ebenfalls leicht durch f und H ausdrücken, indem wir seine Bildung in der folgenden Weise geschehen lassen. Quadriren wir die Identität (II) p. 193, so kommt:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(ab)^2 (ac)^2 b_x^2 c_x^2 + (ba)^2 (bc)^2 a_x^2 c_x^2 + (ca)^2 (cb)^2 a_x^2 b_x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{a_x^4 (bc)^4 + b_x^4 (ac)^4 + c_x^4 (ab)^4\right\}, \end{aligned}$$

und sehen wir hierin a, b, c als gleichbedeutende Symbole einer biquadratischen Form an, so wird dies, wenn wir b durch d ersetzen:

$$(8)\qquad (ca)^2 (cd)^2 a_x^2 d_x^2 = \tfrac{1}{2}(ad)^4 c_x^4 = \tfrac{1}{2}\, if.$$

Durch Polarenbildung folgt hieraus weiter:

$$2(ca)^2 (cd)^2 (a_x^2 d_x d_y + d_x^2 a_x a_y) = 4(ca)^2 (cd)^2 a_x^2 d_x d_y = 2\, i c_x^3 c_y,$$

und:

$$(9)\qquad (ca)^2 (cd)^2 (2\, a_x a_y d_x d_y + a_x^2 d_y^2) = \tfrac{3}{2}\, i c_x^2 c_y^2.$$

Nun ist aber identisch, wie sich durch Quadriren der Gleichung (IV) p. 193 ergibt:

$$a_x a_y d_x d_y = \tfrac{1}{2}\left\{a_x^2 d_y^2 + a_y^2 d_x^2 - (ad)^2 (xy)^2\right\},$$

oder, da in unserem Falle a und d vertauschbar sind:

$$(10)\qquad a_x a_y d_x d_y = a_x^2 d_y^2 - \tfrac{1}{2}(ad)^2 (xy)^2.$$

Dadurch erhalten wir aus (9):

$$\begin{aligned} 3(cd)^2 (ca)^2 a_x^2 d_y^2 &= \tfrac{3}{2}\, i c_x^2 c_y^2 + (ca)^2 (cd)^2 (ad)^2 (xy)^2 \\ &= \tfrac{3}{2}\, i c_x^2 c_y^2 + j\,(xy)^2. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin endlich $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$ und multipliciren auf beiden Seiten mit b_x^2, so erscheint links der in Gleichung (6) noch umzuformende Term; es wird nämlich:

(11) $$(cd)^2 (ac)^2 (bd)^2 a_x^2 b_x^2 = \frac{1}{2} i (bc)^2 c_x^2 b_x^2 + \frac{1}{3} j b_x^4$$
$$= \frac{1}{2} iH + \frac{1}{3} jf,$$

und für die gesuchte Covariante finden wir demnach:

(12) $$\mathrm{P} = \frac{1}{6} (3 iH - 2 jf).$$

Die Punkte, deren erstes Polarsystem in Bezug auf $f = 0$ einen Doppelpunkt enthalten, bilden also ein Quadrupel der Schaar $\varkappa f + \lambda H = 0$, gegeben durch die Gleichung:

$$3 iH - 2 jf = 0.$$

Ehe wir auf das Studium letzterer Involution vierter Ordnung näher eingehen, wollen wir die Lage der Punkte $T = 0$ untersuchen. Es knüpfen sich diese Betrachtungen wesentlich an eine identische Gleichung, welche einer früheren Bemerkung zufolge zwischen den Formen f, H, T bestehen muss. Dieselbe ergibt sich wieder aus dem Satze, nach welchem das Quadrat der Functionaldeterminante zweier Formen als quadratische Function dieser Formen selbst darstellbar ist. Wir haben somit in unserem Falle, wenn wieder $(\varphi, \chi)_r$ die r^{te} Ueberschiebung von φ mit χ bedeutet (vgl. p. 223):

(13) $$T^2 = (f, H)_1^2 = -\frac{1}{2} \left\{ (f, f)_2 H^2 - 2 (f, H)_2 f H + (H, H)_2 f^2 \right\},$$

worin noch die Ueberschiebungen $(f, H)_2$ und $(H, H)_2$ zu berechnen sind. Zu dem Zwecke gehen wir von den Polaren der Form H aus. Es ist

$$4 H_x^3 H_y = (ab)^2 (2 b_x b_y a_x^2 + 2 a_x a_y b_x^2),$$

oder da beide Glieder durch Vertauschung von a und b in einander übergehen

$$H_x^3 H_y = (ab)^2 a_x a_y b_x^2.$$

Hieraus folgt ferner für die zweite Polare von y:

$$3 H_x^2 H_y^2 = (ab)^2 (a_y^2 b_x^2 + 2 a_x a_y b_x b_y),$$

oder nach Gleichung (10):

(14) $$H_x^2 H_y^2 = (ab)^2 a_y^2 b_x^2 - \frac{1}{3} i (xy)^2.$$

Setzen wir nun $y_1 = c_2$, $y_2 = -c_1$ und multipliciren mit c_x^2, so erhalten wir:

$$(f, H)_2 = (cH)^2 H_x^2 c_x^2 = (ab)^2 (ac)^2 b_x^2 c_x^2 - \frac{1}{3} i c_x^4,$$

oder unter Berücksichtigung von (8):

(15) $$(f, H)_2 = \frac{1}{6} if.$$

Die zweite Ueberschiebung von H mit sich selbst entsteht dagegen aus (14), indem man y_1, y_2 bez. durch H_2', $-H_1'$ ersetzt und mit $H_x'^2$ multiplicirt; man erhält dann:

$$(H, H)_2 = (HH')^2 H_x^2 H_x'^2 = (ab)^2 (aH')^2 b_x^2 H_x'^2 - \tfrac{1}{3} i H_x'^4.$$

Nun folgt aber aus der identischen Gleichung (7), indem man H' statt c schreibt und die Vertauschbarkeit von a und b berücksichtigt:

$$2(ab)^2 (aH')^2 b_x H_x'^2 + (aH')^2 (bH')^2 a_x^2 b_x^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \left\{(ab)^4 H_x'^4 + 2(aH')^4 b_x^4\right\}$$

und dadurch erhalten wir:

$$(H, H)_2 = iH + \tfrac{1}{2} jf - \tfrac{1}{2} (aH')^2 (bH')^2 a_x^2 b_x^2.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes entsteht wieder aus $H_z'^2 H_y'^2$, wenn man in bekannter Weise die z durch Symbole a, die y durch Symbole b ersetzt und mit $a_x^2 b_x^2$ multiplicirt; wegen (14):

$$H_z'^2 H_y'^2 = (cd)^2 c_z^2 d_y^2 - \tfrac{1}{3} i (zy)^2$$

ergibt sich daher:

$$(H'a)^2 (H'b)^2 a_x^2 b_x^2 = (cd)^2 (ca)^2 (db)^2 a_x^2 b_x^2 - \tfrac{1}{3} iH,$$

oder wegen (11):

$$= \tfrac{1}{6} iH + \tfrac{1}{3} jf.$$

Setzen wir dies schliesslich in den Ausdruck für $(H, H)_2$ ein, *so erhalten wir für die zweite Ueberschiebung von H mit sich selbst:*

$$(16) \qquad (H, H)_2 = \tfrac{1}{3} jf - \tfrac{1}{6} iH;$$

was nebenbei den Satz ergibt, dass *die* Hesse'*sche Form der* Hesse*schen Form von f ein Quadrupel der Involution $\varkappa f + \lambda H$ bildet*, wie es sein muss, wenn obiges Formensystem ein vollständiges ist.

Wir haben somit alle in (13) vorkommenden Ueberschiebungen gebildet; und diese Gleichung geht wegen der erhaltenen Resultate über in:

$$(17) \qquad T^2 = -\tfrac{1}{2} \left\{H^3 - \tfrac{1}{2} iHf^2 + \tfrac{1}{3} jf^3\right\}.$$

Die Gleichung $T^2 = 0$ kann daher als eine cubische für die Grösse $\frac{H}{f}$ aufgefasst werden; und folglich muss sich, wenn $-m_1, -m_2, -m_3$ die Wurzeln dieser cubischen Gleichung sind, der Ausdruck (17) in der Form

$$T^2 = -\tfrac{1}{2} (H + m_1 f)(H + m_2 f)(H + m_3 f)$$

darstellen lassen. Hier steht links ein vollständiges Quadrat; dasselbe muss also auch auf der rechten Seite der Fall sein. Aber keiner der drei biquadratischen Factoren hat im Allgemeinen mit den andern einen linearen Factor gemein; denn ein solcher würde dann auch gemeinsamer Factor von f und H werden, und Letzteres tritt im Allgemeinen nicht ein, wovon man sich durch folgendes Beispiel überzeugen mag: Es sei

$$f = x_1^4 + x_2^4;$$

dann wird:

$$H = 2\,x_1^2 x_2^2 .$$

Daher muss jeder der Factoren $(H + m_i f)$ das vollständige Quadrat eines Ausdrucks zweiter Ordnung sein, dessen Coëfficienten sich mit Hülfe von Coëfficientenvergleichung durch Ausziehen *einer* Quadratwurzel bestimmen lassen müssen. Wir können demnach diese quadratischen Factoren von T, welche durch φ, ψ, χ bezeichnet sein mögen, als bekannt ansehen und dieselben durch die folgenden Gleichungen bestimmt annehmen:

$$(18)\qquad \begin{aligned} H + m_1 f &= -\,2\,\varphi^2 \\ H + m_2 f &= -\,2\,\psi^2 \\ H + m_3 f &= -\,2\,\chi^2 \end{aligned}$$

$$(19)\qquad T = 2\,\varphi\,\psi\,\chi,$$

wobei das Vorzeichen zweier Formen beliebig gewählt, das der dritten dann aber aus der letzten Gleichung bestimmt ist, und wo m_1, m_2, m_3 die negativ genommenen Wurzeln der Gleichung:

$$m^3 - \frac{i}{2}\,m - \frac{j}{3} = 0$$

sind. Durch die Möglichkeit dieses Verfahrens ist T als eine Form sechster Ordnung von sehr speciellem Charakter gekennzeichnet, denn bei den allgemeinen Formen dieser Art ist eine Zerlegung in quadratische Factoren durch eine cubische Gleichung nicht möglich.*) Zwischen den Punkten von $T = 0$ bestehen in der That entsprechend der Eintheilung in drei Punktepaare noch besondere Relationen. Die Functionen φ, ψ, χ genügen nämlich der folgenden Bedingung, die sich aus (18) durch Elimination von H und f ergibt:

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & \varphi^2 \\ 1 & m_2 & \psi^2 \\ 1 & m_3 & \chi^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn wir die Determinante entwickeln:

$$(20)\qquad (m_2 - m_3)\,\varphi^2 + (m_3 - m_1)\,\psi^2 + (m_1 - m_2)\,\chi^2 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass jedes der drei Punktepaare $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ zu den beiden anderen harmonisch liegt. Bilden wir nämlich nach einander die ersten Ueberschiebungen der Formen φ, ψ, χ mit dem Ausdrucke (20), so erhalten wir, da die erste Ueberschiebung einer jeden Form mit sich selbst verschwindet:

---

*) Ueber die Bedingungen, denen eine binäre Form 6. Ordnung zu genügen hat, damit sie als Covariante T einer biquadratischen Form aufgefasst werden kann, vgl. Clebsch: a. a. O. p. 447, und Crelle's Journal, Bd. 67.

$$(m_3 - m_1)\,\psi\,.\,(\psi,\varphi)_1 + (m_1 - m_2)\,\chi\,.\,(\chi,\varphi)_1 = 0$$
$$(m_2 - m_3)\,\varphi\,.\,(\varphi,\psi)_1 + (m_1 - m_2)\,\chi\,.\,(\chi,\psi)_1 = 0$$
$$(m_2 - m_3)\,\varphi\,.\,(\varphi,\chi)_1 + (m_3 - m_1)\,\psi\,.\,(\psi,\chi)_1 = 0;$$

und hieraus folgt zunächst, *dass jede der Formen* φ, ψ, χ *proportional ist zu der Functionaldeterminante der beiden anderen.* Jede dieser Functionaldeterminanten stellt aber die beiden Doppelpunkte der durch die betreffenden zwei Punktepaare bestimmten Involution dar (vgl. p. 216); und somit haben wir den Satz:

Die sechs Punkte $T = 0$ lassen sich der Art in drei Paare eintheilen, dass jedes Paar gleichzeitig zu den beiden andern harmonisch liegt, oder, was dasselbe ist, dass immer das eine Paar die Doppelpunkte der durch die beiden anderen bestimmten quadratischen Involution darstellt.

Die betrachteten sechs Punkte stehen ferner auch zu dem gegebenen Punktquadrupel in einer wichtigen Beziehung. Aus den Gleichungen (18) ergibt sich nämlich:

$$f = 2\,\frac{\chi^2 - \psi^2}{m_2 - m_3} = 2\,\frac{\psi^2 - \varphi^2}{m_1 - m_2} = 2\,\frac{\varphi^2 - \chi^2}{m_3 - m_1}; \tag{21}$$

d. h. die Form f ist, wenn φ, ψ, χ bekannt sind, in zwei quadratische Factoren zerlegt und zwar auf drei verschiedene Weisen: die vier Punkte von f sind dann dargestellt durch jedes Paar der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \psi + \chi = 0, &\quad \psi - \chi = 0 \\ \chi + \varphi = 0, &\quad \chi - \varphi = 0 \\ \varphi + \psi = 0, &\quad \varphi - \psi = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Aus diesen kann man nun die Coordinaten der vier Grundpunkte rational berechnen; und damit wäre die vollständige Lösung der Gleichung vierten Grades $f = 0$ gegeben, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.

Der geometrische Inhalt dieser Beziehung der Punktepaare von $T = 0$ zu denen von $f = 0$ folgt ebenfalls aus unseren früheren Betrachtungen über quadratische Involutionen. Nach denselben liegen alle Punktepaare $\psi + \lambda\varphi = 0$ harmonisch zu dem Paare, welches durch das Verschwinden der Functionaldeterminante von φ, ψ gegeben ist, also zu

$$(\varphi, \psi)_1 = (\varphi\psi)\,\varphi_x\psi_x = 0.$$

Diese Functionaldeterminante aber ist nach einem soeben bewiesenen Satze proportional zu der dritten Form χ; und also liegt das durch letztere dargestellte Punktepaare harmonisch zu allen Paaren der Involution $\psi + \lambda\varphi = 0$, und insbesondere daher auch zu den beiden Paaren

$$\psi + \varphi = 0, \quad \psi - \varphi = 0.$$

Analoges gilt für die andern Formen (22), und somit haben wir den Satz:

Theilt man vier gegebene Punkte auf die drei möglichen Arten in zwei Paare und sucht jedesmal das zu beiden Paaren harmonische Punktepaar, so sind die entstehenden drei Paare auch unter einander harmonisch. Die letzteren werden, wenn die vier Punkte durch das Verschwinden einer biquadratischen Form f gegeben sind, durch das Verschwinden der Covariante sechster Ordnung T bestimmt. — Dieser Satz lehrt uns die Punkte von T construiren, wenn die von f gegeben sind, wie man unmittelbar einsieht.

Damit sind die Covarianten von f geometrisch vollständig interpretirt, und es bleibt uns noch übrig die geometrische Bedeutung der Invarianten i, j aufzusuchen. Ihr Verschwinden muss unseren allgemeinen Betrachtungen zufolge (p. 197) eine Relation für das Doppelverhältniss der vier Punkte $f = 0$ ergeben, und ebenso muss die absolute Invariante $\frac{i^3}{j^2}$ mit diesem Doppelverhältnisse in enger Beziehung stehen. Das letztere (α) ist aber, je nachdem wir die vier gegebenen Punkte in zwei Paare eintheilen, durch eine der folgenden Gleichungen bestimmt (vgl. p. 217):

$$(23)\qquad \begin{aligned} D_1'^2(\alpha-1)^2 - D_1 D_1''(\alpha+1)^2 &= 0 \\ D_2'^2(\alpha-1)^2 - D_2 D_2''(\alpha+1)^2 &= 0 \\ D_3'^2(\alpha-1)^2 - D_3 D_3''(\alpha+1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Es bedeuten hier D_1, D_2, D_3 bez. die Invarianten der quadratischen Formen $\psi + \chi$, $\chi + \varphi$, $\varphi + \psi$; D_1'', D_2'', D_3'' bez. die Invarianten der Formen $\psi - \chi$, $\chi - \varphi$, $\varphi - \psi$; und D_1', D_2', D_3' bez. die simultanen Invarianten aus je einem Paare der quadratischen Formen (22). Von den Wurzeln einer jeden dieser Gleichungen ist die eine der reciproke Werth der andern; und alle sechs Wurzeln zusammen geben uns daher die sechs Werthe des aus den vier Punkten von f zu bildenden Doppelverhältnisses, nämlich, wenn α einer dieser Werthe ist:

$$\alpha, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad 1-\alpha, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen (23) erhalten wir also eine Gleichung sechster Ordnung für dies Doppelverhältniss, von deren Wurzeln sich je fünf durch eine derselben in angegebener Weise ausdrücken, und bei deren Bildung die Formen φ, ψ, χ in symmetrischer Weise benutzt sind. Dieselbe wird, wenn wir $\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2} = \frac{p}{q}$ setzen:

$$(24)\qquad \Delta_0 p^3 - \Delta_1 p^2 q + \Delta_2 p q^2 - \Delta_3 q^3 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Delta_0 = D_1'^2 D_2'^2 D_3'^2, \quad \Delta_3 = D_1 D_2 D_3 D_1'' D_2'' D_3'',$$
$$\Delta_1 = D_1'^2 D_2'^2 D_3 D_3'' + D_2'^2 D_3'^2 D_1 D_1'' + D_3'^2 D_1'^2 D_2 D_2'',$$
$$\Delta_2 = D_1'^2 D_2 D_3 D_2'' D_3'' + D_2'^2 D_3 D_1 D_3'' D_1'' + D_3'^2 D_1 D_2 D_1'' D_2''.$$

Die Coëfficienten dieser Gleichung lassen sich nun rational durch die Invarianten i, j ausdrücken. Wir können sie nämlich als symmetrische Functionen der Grössen m_1, m_2, m_3 darstellen und somit auch als Functionen der Coëfficienten der Gleichung:

$$\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2} \varkappa \lambda^2 - \frac{j}{3} \lambda^3 = 0, \tag{25}$$

als deren Wurzeln $\frac{\varkappa}{\lambda}$ eben $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$ gegeben waren.

Zunächst führen wir erstere Darstellung aus. Wir sahen schon früher, dass sich die erste Ueberschiebung zweier der Formen φ, ψ, χ von der dritten nur um einen Zahlenfactor unterscheidet. Letzteren können wir durch die folgenden Bildungen, welche sich aus (18) und (19) ergeben, bestimmen. Es ist:

$$4\varphi\psi(\varphi\psi)\varphi_x\psi_x = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} + m_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} + m_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} + m_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{16}\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix} = (m_1 - m_2) T = 2\varphi\psi\chi(m_1 - m_2).$$

Hier kann man auf beiden Seiten den Factor $2\varphi\psi$ fortlassen und erhält so, wenn man die analogen Bildungen für die beiden anderen Ueberschiebungen macht, die drei Gleichungen:

$$2(\psi, \chi)_1 = (m_2 - m_3)\varphi$$
$$2(\chi, \varphi)_1 = (m_3 - m_1)\psi$$
$$2(\varphi, \psi)_1 = (m_1 - m_2)\chi.$$

Andererseits lässt sich (vgl. p. 223) das Quadrat jeder der links stehenden Ueberschiebungen durch die beiden betreffenden Formen ausdrücken: Man erhält z. B.:

$$(\varphi, \psi)_1^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{\varphi^2(\psi, \psi)_2 - 2\varphi\psi(\varphi, \psi)_2 + \psi^2(\varphi, \varphi)_2\right\},$$

oder wegen der soeben abgeleiteten Relationen und mit Hülfe der Identität (20):

$$\tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)\left\{(m_2 - m_3)\varphi^2 + (m_3 - m_1)\psi^2\right\} = \varphi^2(\psi, \psi)_2 - 2\varphi\psi(\varphi, \psi)_2 + \psi^2(\varphi, \varphi)_2,$$

woraus sich durch Vergleichung der Coëfficienten von φ^2, ψ^2 die Werthe der Invarianten $(\varphi, \varphi)_2$, $(\varphi, \psi)_2$, $(\psi, \psi)_2$ ergeben. Bildet man

die beiden entsprechenden Gleichungen für die Quadrate der Ueberschiebungen $(\psi, \chi)_1$, $(\chi, \varphi)_1$, so kommt man also zu den folgenden Resultaten:

$$(26)\qquad \begin{aligned} (\varphi, \varphi)_2 &= \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)(m_3 - m_1), \\ (\psi, \psi)_2 &= \tfrac{1}{2}(m_2 - m_3)(m_1 - m_2), \\ (\chi, \chi)_2 &= \tfrac{1}{2}(m_3 - m_1)(m_2 - m_3), \end{aligned}$$

$$(27)\qquad (\psi, \chi)_2 = 0, \quad (\chi, \varphi)_2 = 0, \quad (\varphi, \psi)_2 = 0.$$

Die letzten drei Gleichungen ergeben sich auch aus dem Satze, dass jedes der drei Punktepaare φ, ψ, χ zu den beiden anderen harmonisch liegt. Mittelst dieser Relationen können wir nun die Invarianten D durch die Wurzeln m_1, m_2, m_3 darstellen. Es wird nämlich*) wegen des Verschwindens der simultanen Invarianten:

$$\begin{aligned} D_1 = D_1'' &= (\psi, \psi)_2 + (\chi, \chi)_2 = -\tfrac{1}{2}(m_2 - m_3)^2 \\ D_2 = D_2'' &= (\chi, \chi)_2 + (\varphi, \varphi)_2 = -\tfrac{1}{2}(m_3 - m_1)^2 \\ D_3 = D_3'' &= (\varphi, \varphi)_2 + (\psi, \psi)_2 = -\tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)^2; \end{aligned}$$

und wenn wir berücksichtigen, dass wegen des Fehlens des zweiten Gliedes in der Gleichung $\Omega(\varkappa, \lambda) = 0$ die Summe der Wurzeln m_1, m_2, m_3 verschwindet:

$$\begin{aligned} D_1' &= (\psi, \psi)_2 - (\chi, \chi)_2 = \tfrac{3}{2}(m_2 - m_3)\, m_1 \\ D_2' &= (\chi, \chi)_2 - (\varphi, \varphi)_2 = \tfrac{3}{2}(m_3 - m_1)\, m_2 \\ D_3' &= (\varphi, \varphi)_2 - (\psi, \psi)_2 = \tfrac{3}{2}(m_1 - m_2)\, m_3. \end{aligned}$$

Die Coëfficienten der Gleichung (24) sind mittelst dieser Relationen als symmetrische Functionen von m_1, m_2, m_3 dargestellt; um diese nun weiter durch i und j auszudrücken, müssen wir uns der folgenden Gleichungen bedienen:

$$\begin{aligned} \Sigma m_1 &= m_1 + m_2 + m_3 = 0 \\ \Sigma m_1 m_2 &= m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = -\frac{i}{2} \\ m_1 m_2 m_3 &= \frac{j}{3}. \end{aligned}$$

Aus ihnen leitet man ferner die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} (\Sigma m_1)^2 - \Sigma 2 m_1 m_2 &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \Sigma m_1^2 = i, \\ \Sigma m_1^3 &= -\Sigma m_1^2 m_2 = 3 m_1 m_2 m_3 = j, \\ \Sigma m_1^2 m_2^3 &= (\Sigma m_1 m_2)^3 - 3 m_1 m_2 m_3 (2 m_1 m_2 m_3 + \Sigma m_1^2 m_2) \\ &= -\tfrac{1}{8} i^3 + \tfrac{1}{3} j^2, \\ \Sigma m_1^4 m_2^2 &= \tfrac{1}{4} i^3 - \tfrac{1}{3} j^2, \quad \Sigma m_1^6 = \tfrac{1}{2} i^3 + \tfrac{1}{3} j^2, \\ \Sigma m_1^5 m_2 &= -\tfrac{1}{4} i^3 - \tfrac{1}{3} j^2. \end{aligned}$$

*) Vgl. Gleichung (4), p. 214, worin $\lambda = 1$ zu nehmen ist.

Endlich müssen wir noch das Quadrat des Productes der Differenzen $m_1 - m_2$, $m_2 - m_3$, $m_3 - m_1$ bilden. Dasselbe ist bekanntlich von der Discriminante R der cubischen Form $\Omega(\varkappa, \lambda)$ nur um einen Zahlenfactor verschieden, und zwar hat man (vgl. p. 220, Anmerk.):

$$R = \tfrac{2}{27} (m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2 .$$

Andererseits findet man in unserem Falle nach Gleichung (8) p. 219:

$$R = \tfrac{1}{27} (i^3 - 6 j^2),$$

und somit folgt:

$$(m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2 = \tfrac{1}{2} (i^3 - 6 j^2) .$$

Die Anwendung der aufgestellten Relationen und der Gleichungen (26), (27) ergibt nun für die Coëfficienten der Gleichung (24) die folgenden Resultate. Es wird:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \tfrac{27^2}{64} (m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2 \, m_1^2 m_2^2 m_3^2 \\
&= \tfrac{81}{128} (i^3 - 6 j^2) j^2 . \\
\Delta_1 &= \tfrac{81}{64} (m_1 - m_2)^2 (m_2 - m_3)^2 (m_3 - m_1)^2 \left\{ m_1^2 m_2^2 (m_1 - m_2)^2 \right. \\
&\qquad \left. + m_2^2 m_3^2 (m_2 - m_3)^2 + m_3^2 m_1^2 (m_3 - m_1)^2 \right\} \\
&= \tfrac{81}{128} (i^3 - 6 j^2) \left\{ \Sigma m_1^4 m_2^2 - 2 \, \Sigma m_1^3 m_2^3 \right\} \\
&= \tfrac{81}{128} (i^3 - 6 j^2) \left(\tfrac{i^3}{2} - j^2 \right) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \tfrac{9}{128} (i^3 - 6 j^2) \left\{ m_1^2 (m_1 - m_2)^2 (m_3 - m_1)^2 + m_2^2 (m_2 - m_3)^2 (m_1 - m_3)^2 \right. \\
&\qquad \left. + m_3^2 (m_3 - m_1)^2 (m_2 - m_2)^2 \right\} \\
&= \tfrac{9}{128} (i^3 - 6 j^2) \left\{ \Sigma m_1^6 - 2 \, \Sigma m_1^5 m_2 + \Sigma m_1^4 m_2^2 \right. \\
&\qquad \left. + m_1 m_2 m_3 (4 \, \Sigma m_1^3 - 2 \, \Sigma m_1^2 m_2 + 3 \, m_1 m_2 m_3) \right\} \\
&= \tfrac{9}{128} (i^3 - 6 j^2)(i^3 + 3 j^2) . \\
\Delta_3 &= \tfrac{1}{64} (m_1 - m_2)^4 (m_2 - m_3)^4 (m_3 - m_1)^4 \\
&= \frac{1}{2 \,.\, 128} (i^3 - 6 j^2) .
\end{aligned}$$

Setzen wir die so gefundenen Werthe in die Gleichung (24) ein, so geht dieselbe, abgesehen von dem Factor $\tfrac{1}{128} (i^3 - 6 j^2)$ über in:

$$81 \, p^3 j^2 - 81 \, p^2 q \left(\tfrac{i^3}{2} - j^2 \right) + 9 \, p q^2 (i^3 + 3 j^2) - \tfrac{1}{2} q^3 (i^3 - 6 j^2) = 0,$$

oder anders geordnet:

$$\tfrac{9}{2} i^3 q \left(2 \, pq - \tfrac{1}{9} q^2 - 9 \, p^2 \right) + 3 j^2 (27 \, p^3 + 27 \, p^2 q + 9 \, p q^2 + q^3) = 0,$$

woraus sich der Werth für die absolute Invariante ergibt, nämlich:

$$\frac{i^3}{j^2} = \tfrac{2}{3} \, \frac{(3 \, p + q)^3}{q \left(\tfrac{1}{3} q - 3 \, p \right)^2},$$

oder, wenn wir statt $\frac{p}{q}$ wieder das Doppelverhältniss α einführen, d. h. $\frac{p}{q} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)^2}$ setzen:

$$(28) \qquad \frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha)^2}.$$

Diese Gleichung stellt die gesuchte Beziehung zwischen dem Doppelverhältnisse der Grundpunkte von f und der absoluten Invariante dar. Sie lässt uns auch die Bedeutung des Verschwindens der Invarianten i, j unmittelbar erkennen. Soll nämlich das Doppelverhältniss α äquianharmonisch werden, so muss $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ sein, d. h. der Zähler in (28) verschwinden. *Die Bedingung der äquianharmonischen Lage ist also*

$$i = 0.$$

Dieselbe ist ferner nach Gleichung (16) dadurch charakterisirt, *dass die* Hesse'*sche Form der* Hesse'*schen Form von f mit der Grundform f identisch ist.* Sollen dagegen die vier Punkte $f = 0$ harmonisch liegen, so wird $\alpha = -1$, $+2$ oder $+\frac{1}{2}$, und in allen drei Fällen verschwindet der Nenner in (28). *Die Bedingung der harmonischen Lage ist also*

$$j = 0.$$

Der Werth des Doppelverhältnisses wird endlich gleich der Einheit, wenn zwei der vier Grundpunkte zusammenfallen. Setzen wir also in (28) $\alpha = 1$, so folgt *als Bedingung dafür, dass die biquadratische Gleichung $f = 0$ eine Doppelwurzel habe:*

$$i^3 - 6j^2 = 0.$$

Die Discriminante R der cubischen Form $\Omega(\varkappa, \lambda)$ ist daher gleichzeitig *die Discriminante von f.* —

Durch das Verschwinden von R werden die vorstehenden Betrachtungen mehrfach modificirt. Es möge in diesem Falle $m_2 = m_3$ werden, dagegen m_1 und m_2 noch verschieden sein; dann wird zunächst:

$$\Omega = \left(\varkappa + \frac{j}{i}\lambda\right)^2 \left(\varkappa - \frac{2j}{i}\lambda\right),$$

und also:

$$m_2 = -\frac{j}{i}, \quad m_1 = 2\frac{j}{i}.$$

Aus (18) folgt ferner $\psi = \chi$, und aus (26) $(\psi, \psi)_2 = 0$; es ist also $\psi = \chi$ das Quadrat eines linearen Ausdrucks ξ, und es wird:

$$H + m_2 f = H - \frac{j}{i} f = -2\xi^4$$

Die Identität (27) $(\varphi, \psi)_2 = 0$ geht hier über in $(\varphi\xi)^2 = 0$; es verschwindet also φ, wenn man $x_1 = \xi_2$, $x_2 = -\xi_1$ setzt, d. h. man hat

$$\varphi = \xi \eta ,$$

wo η ein von ξ *verschiedener* linearer Ausdruck ist; denn es wird nach (26)

$$(\varphi, \varphi)_2 = \tfrac{1}{2} \left\{(\xi\xi)(\eta\eta) - (\xi\eta)^2\right\} = - \tfrac{1}{2} (\xi\eta)^2$$
$$= (m_1 - m_2)^2, \text{ also nicht } = 0 .$$

Setzt man nun die angegebenen Werthe von m_1, m_2 in die Gleichungen (18) ein, so findet man:

$$\begin{aligned} f &= \quad \tfrac{2}{3} \frac{i}{j} \xi^2 (\xi^2 - \eta^2) \\ H &= - \tfrac{2}{3} \xi^2 (2 \xi^2 + \eta^2) \\ T &= \quad 2 \xi^5 \eta ; \end{aligned}$$

und dies gibt den Satz: *Wenn R verschwindet, so wird der Doppelfactor ξ von f bestimmt durch die Gleichung $iH - jf = i\xi^4$; und derselbe ist auch zweifacher Factor von H und fünffacher von T.*

Diese Bestimmung der Doppelwurzel wird aber illusorisch, wenn neben R auch i verschwindet; dann muss, da $R = \frac{1}{27} (i^3 - 6j^2)$, auch j Null sein. Dadurch wird aber $\Omega = \varkappa^3$. Die drei quadratischen Factoren von T sind also unter einander identisch: $\varphi = \psi = \chi$, und zwar alle gleich dem Quadrate eines linearen Ausdrucks ξ; denn aus (26) folgt $(\varphi, \varphi)_2 = 0$. Ferner wird nach (18), da $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, H das Biquadrat dieses linearen Ausdrucks, und T proportional zu der sechsten Potenz desselben:

$$H = - 2 \xi^4, \quad T = 2 \xi^6 .$$

Nun ist aber nach (15), wenn $i = 0$, auch $(f, H)_2 = 0$, d. h.

$$(a\xi)^2 a_x^2 = 0 ,$$

unabhängig von den x, also $(c\xi)^4 = 0$: f enthält den Factor ξ. Setzen wir demnach:

$$f = a_x^4 = \xi \,.\, u, \quad (u = \alpha_x^3)$$

und bilden wieder die Form $(f, H)_2$, so wird:

$$3 (a\xi)^2 a_x^2 = \xi \,.\, (\alpha\xi)^2 \alpha_x = 0 ,$$

also auch $(\alpha\xi)^3 = 0$; und eine Fortsetzung desselben Verfahrens zeigt, dass wir setzen müssen:

$$f = \xi^3 \,.\, \eta ,$$

wo η ein von ξ verschiedener linearer Ausdruck ist. Umgekehrt folgt, wenn $f = \xi^3 \,.\, \eta$ und somit $H = - \frac{1}{8} (\xi\eta) \,.\, \xi^4$, dass dann immer i und j verschwinden; denn wegen $iH - jf = i\xi^4$ muss $j = 0$ sein, und dann ergibt sich wegen $R = 0$ auch $i = 0$.

Wenn also H ein Biquadrat ist, so hat man $i = 0$, $j = 0$, und f

hat einen dreifachen Factor; so wie umgekehrt im letzteren Falle immer H ein Biquadrat und $i = 0$, $j = 0$ ist.

Die Bestimmung der Doppelwurzel von f durch die Gleichung $\psi = \chi = iH - jf = 0$ wird aber auch illusorisch, wenn die einzelnen Coëfficienten dieser Gleichung Null sind. In dem Falle verschwindet also $\chi = \psi$ identisch, und wir haben:

$$iH - jf = 0, \quad T = 0.$$

Ferner gibt die erste der Gleichungen (18):

$$f = -\frac{2i}{3j}\varphi^2.$$

Ist umgekehrt f das Quadrat einer Form zweiter Ordnung: $f = (\alpha_x^2)^2$, deren Invariante $D = (\alpha\beta)^2$ ist, so wird $i = D^2$, $j = D^3$ und $H = D.f$; also haben wir den Satz:

Wenn H von f nur um einen constanten Factor verschieden ist ($iH = jf$), dann und nur dann hat f zwei verschiedene Doppelfactoren, ***d. h. ist f das Quadrat einer quadratischen Form.***

Dieser Fall ist also nicht mehr, wie die beiden vorigen durch das Verschwinden von Invarianten zu charakterisiren; vielmehr geschieht dies durch das *identische* Verschwinden der Covariante $iH - jf$ (vgl. p. 174). Dies führt auf 5 Gleichungen, zwischen den 5 Coëfficienten von f, während doch das Auftreten zweier Doppelwurzeln nur die Bestimmung von 2 Constanten involvirt. Wir haben also zwar eine zu grosse Zahl von Gleichungen; aber keine von ihnen ist überflüssig, und ihr *Zusammenbestehen* wird eben nur durch die erwähnte Ausartung unseres Punktquadrupels $f = 0$ ermöglicht. Aehnliche Vorkommnisse werden uns später bei den Kegelschnitten und den Curven dritter Ordnung wiederholt begegnen; wir heben den soeben behandelten Fall nur als erstes Beispiel hervor.*) (Vgl. hierzu auch unten p. 272, f.)

Endlich kann es noch eintreten, dass H identisch verschwindet, dass also die Gleichungen bestehen:

$$a_0a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0a_3 - a_1a_2 = 0,$$
$$a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2 = 0,$$
$$a_1a_4 - a_2a_3 = 0, \quad a_2a_4 - a_3^2 = 0.$$

Dann wird $a_2 = \frac{a_1^2}{a_0}$, $a_3 = \frac{a_1^3}{a_0^2}$, $a_4 = \frac{a_1^4}{a_0^3}$, und:

$$f = a_0\left(x_1 + \frac{a_1}{a_0}x_2\right)^4.$$

Alsdann verschwinden *alle* Invarianten und Covarianten von f, indem

*) Der Fall einer dreifachen Wurzel bei einer cubischen Gleichung (p. 228) gab allerdings schon ein Beispiel für das identische Verschwinden einer Covariante (Δ); aber dies lieferte gerade so viele Bedingungsgleichungen (nämlich zwei), als durch das Auftreten einer dreifachen Wurzel gefordert sind.

die symbolische Darstellung in die wirkliche übergeht; wir haben also: *Wenn H identisch verschwindet, so ist f immer das Biquadrat eines linearen Ausdrucks, und umgekehrt.* —

Zu den vier Punkten f und den covarianten Punktgruppen derselben steht die Schaar von Punktquadrupeln

$$\varkappa f + \lambda H = 0$$

in besonders merkwürdigen Beziehungen. Es ergeben sich dieselben, wenn wir die Formen H, T, i, j für die zusammengesetzte Function vierter Ordnung $\varkappa f + \lambda H$ ebenso bilden, wie dies früher für die Form f geschah. Wir wollen diese invarianten Bildungen bez. durch $H_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$, $i_{\varkappa\lambda}$, $j_{\varkappa\lambda}$ bezeichnen. Es ist dann, nach dem Taylor'schen Satze:

$$H_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2 (f, f)_2 + 2\varkappa\lambda (f, H)_2 + \lambda^2 (H, H)_2,$$

wo der Definition zufolge $(f, f)_2 = H$ ist, während sich die Ueberschiebungen $(f, H)_2$, $(H, H)_2$ aus den Gleichungen (15) und (16) ergeben. Durch Einsetzen der dort gefundenen Werthe erhalten wir:

$$\begin{aligned} H_{\varkappa\lambda} &= \varkappa^2 H + 2\varkappa\lambda \frac{i}{6} f + \lambda^2 \left(\frac{j}{3} f - \frac{i}{6} H\right) \\ &= H\left(\varkappa^2 - \frac{i}{6}\lambda^2\right) + f\left(\frac{i}{3}\varkappa\lambda + \frac{j}{3}\lambda^2\right). \end{aligned}$$

Diese Formel können wir in eine elegantere Gestalt mit Hülfe der Function

$$\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{j}{3}\lambda^3$$

bringen; es wird nämlich:

$$H_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{3}\left(H \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - f \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right). \tag{29}$$

Die Einführung der Function Ω erleichtert auch die Berechnung von $T_{\varkappa\lambda}$; denn diese Form ist nach (3) als die Functionaldeterminante von $\varkappa f + \lambda H$ und $H_{\varkappa\lambda}$, dividirt durch 16, definirt; d. h. wir haben:

$$\begin{aligned} T_{\varkappa\lambda} &= \frac{1}{3\cdot 16} \begin{vmatrix} \varkappa \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} \\ \varkappa \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3\cdot 16} \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} & \frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die erste der rechts stehenden Determinanten hat aber den Werth $3\,\Omega(\varkappa, \lambda)$, die andere den Werth $16\,(f, H)_1 = 16\,T$, und also ist

$$T_{\varkappa\lambda} = \Omega(\varkappa, \lambda)\,.\,T. \tag{30}$$

Diese Gleichung giebt geometrisch den folgenden Satz:

*Die drei quadratischen Factoren von T stehen zu allen Quadrupeln der Schaar $\varkappa f + \lambda H = 0$ in derselben Beziehung, wie zu dem Quadrupel $f = 0$. D. h. die Involution vierter Ordnung $\varkappa f + \lambda H = 0$ lässt sich auf drei verschiedene Arten in zwei projectivische Involutionen zweiter Ordnung auflösen, deren Gruppen einander wechselseitig entsprechen. Je zwei solche projectivische Involutionen haben immer ein Paar der Punkte $T = 0$ gemeinsam; das zweite dieser Punktepaare aber bildet für die eine, das dritte für die andere dieser Involutionen die beiden Doppelelemente.**)

---

*) Bei Betrachtung der drei möglichen Collineationen, welche die vier Punkte a, b, c, d einer binären biquadratischen Form in einander überführen, insofern:

$$\begin{array}{lll} (abcd) & \text{projectivisch zu} & (badc) \\ & \quad\text{"} \qquad\quad \text{"} & (cdab) \\ & \quad\text{"} \qquad\quad \text{"} & (dcba), \end{array}$$

erscheinen die Punktepaare von T bez. als die Doppelelemente dieser Collineationen. Man gelangt dadurch für die Darstellung auf der Kugel (vgl. die Anmerkungen auf p. 173 und p. 215) zu folgenden Resultaten. Die drei Punktepaare von T kann man sich durch drei zu einander rechtwinklige Durchmesser der Kugel ausgeschnitten denken. Sind in Bezug auf letztere x, y, z die Coordinaten *eines* Punktes des Quadrupels $\varkappa f + \lambda H = 0$, so sind die *vier* Punkte des Quadrupels durch das Schema

$$\begin{array}{rrr} x & y & z \\ x & -y & -z \\ -x & y & -z \\ -x & -y & z \end{array}$$

dargestellt. Es sind die Ecken eines symmetrischen Tetraeders, dessen gegenüberstehende Seiten von den Axen des Coordinatensystems halbirt werden. Einem jeden Quadrupel der Schaar ist ein anderes zugeordnet, dessen Punkte conjugirt imaginär zu denen des ersteren sind. Dieselben haben dann die Coordinaten

$$\begin{array}{rrr} x & y & -z \\ x & -y & z \\ -x & y & z \\ -x & -y & -z\,. \end{array} —$$

Die auf drei Weisen mögliche Zerlegung von $\varkappa f + \lambda H$ in zwei quadratische Involutionen wird geometrisch übersichtlich, wenn man als Träger des binären Werthgebietes statt der Geraden einen Kegelschnitt zu Grunde legt (vgl. Hesse: Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie; Leipzig, 1866). Führt man zu dem Zwecke die drei quadratischen Factoren φ, ψ, χ von T als ternäre Variable ein, so ist die Gleichung des Kegelschnittes durch (20) gegeben. Die 6 Punkte von T werden also durch die Seiten eines Polardreiecks ausgeschnitten. Benutzt man zwei dieser Seiten als Doppelelemente einer Strahleninvolution, so schneiden je zwei zusammengehörige Strahlen dieser Involution nach (21) auf dem Kegelschnitte eine Form des Büschels $\varkappa f + \lambda H$ aus. Der verschiedenen Benutzung der drei Ecken des Polardreiecks entspricht die dreifache Zerlegung des Büschels in quadratische Involutionen. — Aehnliches gilt auf der Kugel.

An diese Beziehung der Punkte von T zu jeder Gruppe $\varkappa f + \lambda H$ knüpfen wir sogleich die folgenden Bemerkungen. Es gibt (vgl. p. 207) sechs Pole $\Theta = 0$, deren Polarsysteme in Bezug auf f und H und also in Bezug auf jedes Quadrupel $\varkappa f + \lambda H$ bez. in den sechs Punkten von T einen gemeinsamen Punkt haben. Nun zerfällt das Polarsystem in Bezug auf ein Paar von Doppelpunkten stets in diese Doppelpunkte und den zu ihnen und dem Pole vierten harmonischen Punkt (vgl. p. 205 und p. 213). Das zu zwei Punktepaaren von T gleichzeitig harmonisch liegende Punktepaar hat also die Eigenschaft, dass, wenn man einen Punkt des Paares als Pol betrachtet, der andere ein Punkt seines Polarsystems wird in Bezug auf die beiden anderen Paare von T, und also auch in Bezug auf alle Gruppen $\varkappa f + \lambda H$, da sich diese linear aus zwei Punktepaaren von T zusammensetzen lassen. Jenes dritte Paar gehört also sowohl zu T als zu Θ; und demnach haben wir folgenden Satz:

Die Punkte $\Theta = 0$ sind identisch mit den Punkten $T = 0$, in der Weise, dass zu jedem Punkte von Θ derjenige von T gehört, der mit demselben ein Paar von T bildet. Das Resultat der Elimination der x aus den Gleichungen:

$$a_x^3\, a_y = 0$$
$$H_x^3 H_y = (ab)^2\, a_x^2 b_x b_y = 0$$

ist also durch $T = 0$ gegeben.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (30) für $T_{\varkappa\lambda}$ können wir auch $i_{\varkappa\lambda}$ und $j_{\varkappa\lambda}$ leicht bilden. Für ein Quadrupel $\varkappa f + \lambda H = 0$ zerfällt nämlich die Form $T_{\varkappa\lambda}$ in drei quadratische Factoren, deren Quadrate nach (18) durch drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
k_1\,(\varkappa f + \lambda H) + l_1 H_{\varkappa\lambda} &= 0\\
k_2\,(\varkappa f + \lambda H) + l_2 H_{\varkappa\lambda} &= 0\\
k_3\,(\varkappa f + \lambda H) + l_3 H_{\varkappa\lambda} &= 0
\end{aligned}
\tag{31}
$$

bestimmt sind, wenn $\frac{k_1}{l_1}, \frac{k_2}{l_2}, \frac{k_3}{l_3}$ die negativen Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\Omega\,(k, l)_{\varkappa\lambda} = k^3 - \frac{i_{\varkappa\lambda}}{2}\, k l^2 - \frac{j_{\varkappa\lambda}}{3}\, l^3 = 0 \tag{32}$$

bedeuten. Nach (30) sind diese quadratischen Factoren jedoch identisch mit den Formen φ, ψ, χ, in welche T zerfällt, und deren Quadrate durch die Gleichungen (18) gegeben sind; sie können sich daher von diesen nur um einen Factor unterscheiden. Die Ausdrücke (31) sind aber wegen (29), wenn wir nach f und H ordnen:

$$\left(k_i \varkappa + \tfrac{1}{3}\,\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\, l_i\right) f + \left(k_i \lambda - \tfrac{1}{3}\,\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa}\, l_i\right) H;$$

und diese Formen entstehen, wenn man $\varkappa$, λ als binäre Variable auffasst aus einer Form $\varkappa' f + \lambda' H$ mittelst der linearen Substitution

$$\varkappa' = k\varkappa + \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l$$

$$\lambda' = k\lambda - \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l.$$

Die für $\frac{k}{l}$ aus (32) zu findenden Werthe müssen daher identisch sein mit denjenigen, welche sich aus der Gleichung

$$\Omega(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{i}{2} \varkappa^2 \lambda - \frac{j}{2} \lambda^3 = 0$$

ergeben, wenn man darin $\varkappa$, λ bez. durch die Ausdrücke

$$k\varkappa + \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l, \quad k\lambda - \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l$$

ersetzt. Beide Gleichungen können sich also dann nur um einen Factor M unterscheiden, d. h. wir haben

$$M\Omega(k, l)_{\varkappa\lambda} = \Omega\left(k\varkappa + \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} l,\ k\lambda - \tfrac{1}{3} \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} l\right),$$

oder wenn wir auf der rechten Seite nach Potenzen von k, l entwickeln, indem der Factor von $k^2 l$ identisch verschwindet:

$$(33) \quad M \cdot \left(k^3 - \frac{i_{\varkappa\lambda}}{2} k l^2 - \frac{j_{\varkappa\lambda}}{3} l^3\right) = k^3 \Omega(\varkappa, \lambda) + \tfrac{1}{2} \Phi k l^2 - \tfrac{1}{6} \Psi l^3,$$

wo

$$\Phi = \tfrac{1}{9} \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varkappa^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa}\right)^2 \right\}$$

$$\Psi = \tfrac{1}{3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} \right\}.$$

Drücken wir in Φ die ersten Differentialquotienten von Ω einmal nach dem Satze von den homogenen Functionen durch die zweiten aus, so dass dieselben nur noch linear vorkommen, so wird:

$$\Phi = \tfrac{1}{18} \left(\varkappa \frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varkappa^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varkappa \partial \lambda}\right)^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{6} \Omega(\varkappa, \lambda) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varkappa^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varkappa \partial \lambda}\right)^2\right).$$

Betrachten wir nun Ω als binäre Form dritter Ordnung in $\varkappa$, λ und bezeichnen durch Δ_Ω, Q_Ω die ihr zugehörigen Formen Δ, Q, von denen die erste als die Hesse'sche Determinante, dividirt durch 18, die zweite als die Functionaldeterminante von Ω und Δ, dividirt durch 6, definirt ist, so erhalten wir:

$$\Phi = 3\,\Omega\,(\varkappa,\,\lambda)\,\Delta_\Omega$$

$$\Psi = \Omega\,(\varkappa,\,\lambda)\left\{\frac{\partial\Delta}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} - \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa}\right\}$$

$$= -\,6\,\Omega_{\varkappa\lambda}\,Q_\Omega\,.$$

Durch Vergleichung der Coëfficienten von k^3, $k\,l^2$, l^3 in (33) finden wir schliesslich:

$$M = \Omega_{\varkappa\lambda}\,,$$

und also:

(34) $$i_{\varkappa\lambda} = -\,3\,\Delta_\Omega = i\varkappa^2 + 2j\varkappa\lambda + \frac{i^2}{6}\,\lambda^2$$

(35) $$j_{\varkappa\lambda} = -\,3\,Q_\Omega = j\varkappa^3 + \frac{i^2}{2}\,\varkappa^2\lambda + \frac{ij}{2}\,\varkappa\lambda^2 + \left(\frac{j^2}{3} - \frac{i^3}{36}\right)\lambda^3.$$

Diese Invarianten haben für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda H$ dieselbe Bedeutung, wie i, j für die Form f. Ihr Verschwinden gibt Gleichungen bez. vom zweiten und dritten Grade in $\frac{\varkappa}{\lambda}$, und folglich haben wir den Satz:

Es gibt in der Involution $\varkappa f + \lambda H = 0$ zwei Punktquadrupel mit äquianharmonischem und drei Quadrupel mit harmonischem Doppelverhältnisse.

Im Allgemeinen dagegen ist das Doppelverhältniss α eines solchen Quadrupels gegeben durch die Gleichung sechsten Grades in $\frac{\varkappa}{\lambda}$:

$$\frac{i_{\varkappa\lambda}{}^3}{j_{\varkappa\lambda}{}^2} = 24\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2\,(2-\alpha)^2\,(1-2\,\alpha)^2}\,.$$

Es gibt daher in der Involution $\varkappa f + \lambda H = 0$ sechs Punktquadrupel mit gegebenem Doppelverhältnisse.

Soll letzteres gleich der Einheit sein, d. h. das Quadrupel einen Doppelpunkt enthalten, so muss

$$i_{\varkappa\lambda}{}^3 - 6\,j_{\varkappa\lambda}{}^2 = 0$$

werden. Diesen Ausdruck können wir mit Hülfe der Form $R_\Omega = \frac{1}{27}\,(i^3 - 6\,j^2)$, der Discriminante von f, leicht durch i und j darstellen. Zwischen den Formen Ω, Δ, Q, R besteht nämlich die Identität (vgl. p. 223):

$$Q_\Omega{}^2 = -\,\tfrac{1}{2}\left\{\Delta_\Omega{}^3 + \Omega^2\,R_\Omega\right\},$$

und hieraus folgt wegen (34) und (35):

(36) $$i_{\varkappa\lambda}{}^3 - 6\,j_{\varkappa\lambda}{}^2 = [\Omega\,(\varkappa,\,\lambda)]^2\,(i^3 - 6\,j^2)\,.$$

Hier steht links die Discriminante von $\varkappa f + \lambda H$; dieselbe kann wegen des Ausdruckes auf der rechten Seite im Allgemeinen, d. h. so lange $R \lessgtr 0$, nur verschwinden, wenn $\Omega\,(\varkappa,\,\lambda) = 0$ ist. Die letztere Gleichung bestimmt aber die Punktepaare von $T = 0$, und somit folgt:

Unter den Quadrupeln der Involution $\varkappa f + \lambda H = 0$ kommt, ausser den doppelt zählenden Punktepaaren von $T = 0$, keines vor, für welches zwei Punkte zusammenfallen.

Es sei schliesslich noch erwähnt, dass man die biquadratische Form f auf eine *kanonische Form*, in der nur noch die Quadrate der Veränderlichen vorkommen, bringen kann, wenn man die linearen Factoren einer der quadratischen Formen φ, ψ, χ als neue Variable einführt. Da jedes der letztere darstellenden Punktepaare zu den beiden anderen harmonisch liegt, so können wir z. B. setzen

$$\varphi = 2\,\xi\eta$$
$$\psi = \xi^2 + \eta^2$$
$$\chi = \xi^2 - \eta^2.$$

In der That erhalten wir alsdann wegen der Gleichungen (21) für f die folgende kanonische Darstellung:

$$f = p\,(\xi^4 + \eta^4) + 6\,q\,\xi^2\eta^2.$$

Hierin kommt *eine* absolute Constante $\frac{p}{q}$ vor, und dieselbe ist dadurch, dass man die gegebene Form für f verlangt, völlig bestimmt, soweit es die Gleichberechtigung der Functionen φ, ψ, χ erlaubt; und zwar wird sich zeigen, dass sie bei derselben Form f 6 verschiedene Werthe annehmen kann. Der Werth dieser Constanten ist daher charakteristisch für die biquadratische Form, und man kann nur solche Formen der Art linear in einander überführen, für welche diese Constante einen von 6 zusammengehörigen Werthen hat. Es erhellt hieraus, dass letztere mit der absoluten Invariante von f in enger Beziehung steht, wie wir auch sofort erkennen werden. Die Invarianten und Covarianten von f erhalten für die kanonische Darstellung die folgende Gestalt. Es wird, wenn wir die neuen Bildungen durch beigesetzte obere Striche bezeichnen, und wenn r die Substitutionsdeterminante $(\xi\eta)$ bedeutet:

$$H = r^2 H' = (\xi\eta)^2 \,.\, \{2\,pq\,(\xi^4 + \eta^4) + 2\,(p^2 - 3\,q^2)^2\,\xi^2\eta^2\}$$
$$T = r^3 T' = (\xi\eta)^3 \,.\, 4\,\xi\eta\,(\xi^2 + \eta^2)\,(\xi^2 - \eta^2)$$
$$i\; = r^4 i' \;= (\xi\eta)^4 \,.\, 2\,(p^2 + 3\,q^2)$$
$$j\; = r^6 j' \;= (\xi\eta)^6 \,.\, 6\,q\,(p^2 - 3\,q^2).$$

Aus diesen Gleichungen folgt für die absolute Invariante:

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{2\,(p^2 + 3\,q^2)^3}{9\,q^2\,(p^2 - q^2)^2},$$

wodurch der Zusammenhang derselben, sowie, nach (28), der des Doppelverhältnisses mit der Constanten $\frac{p}{q}$ gegeben ist. Wir haben

eine Gleichung sechsten Grades für $\frac{p}{q}$, die sich jedoch auf eine cubische für $\frac{p^2}{q^2}$ reducirt. Den drei Wurzeln für den letzteren Ausdruck entspricht der Umstand, dass man die Formen φ, ψ, χ gleichmässig zur Herstellung der kanonischen Form benutzen kann. Zu jeder Wurzel $\frac{p}{q}$ gehört ferner eine andere $-\frac{p}{q}$; und zwar führt auf die letztere die Einführung von $\sqrt{-1}\,\xi\eta$ statt einer der quadratischen Formen, wenn die erstere der Einführung von $\xi\eta$ entspricht.

Das angewandte Verfahren zur Bestimmung von p, q, der Coëfficienten der transformirten Form ist überhaupt von Nutzen, wenn man eine als möglich erkannte kanonische Darstellung nur in der Endform angeben will, ohne dabei auf die linearen Substitutionsgleichungen zu achten, welche die Transformation selbst leisten. In einem solchen Falle braucht man nur die absoluten Invarianten der Form aus den Coëfficienten ihrer kanonischen Darstellung zu bilden, und erhält so unmittelbar Gleichungen zur Bestimmung dieser Coëfficienten, ebenso wie wir oben die Gleichung sechsten Grades für $\frac{p}{q}$ aufstellten. —

An die Theorie der biquadratischen Formen würde sich naturgemäss die der Formen fünfter und höherer Ordnung anschliessen. Wir werden auf dieselbe jedoch nicht eingehen, zumal da wir sie für die späteren geometrisch-algebraischen Untersuchungen nicht nöthig haben. Zur Orientirung in den betreffenden Theorien erwähnen wir nur das Folgende. Soweit man auf die Theorie der höheren Formen bisher näher eingegangen ist, verfolgt man dabei wesentlich andere Gesichtspunkte und bedient sich demgemäss anderer Methoden, als wir es bisher gethan haben. Während wir nämlich nach solchen invarianten Bildungen fragten, aus denen sich alle anderen nach dem Gordan'schen Satze *rational und ganz* zusammensetzen lassen, kann man sich auch die Aufgabe stellen, ein System von Formen anzugeben, durch welche alle anderen *nur rational* darstellbar sind.*) Zu einem solchen Systeme von „*associirten Formen*“ gelangt man am einfachsten, indem man zwei lineare Covarianten einer Form als neue Variable einführt; die Coëfficienten der neuen Form sind dann Invarianten der

*) Die in dieser Richtung liegenden Fragen wurden zuerst von Hermite (*Cambridge* and *Dublin*, math. Journal 1854 und Crelle's Journal, Bd. 52) und Brioschi (Annali di matem. t. I) aufgeworfen und behandelt. Vgl. die weitere Entwicklung der Theorie in dem erwähnten Werke von Clebsch, sowie einen Aufsatz von Clebsch und Gordan: Annali di matemat., Bd. I, 2. Serie, 1867, und Gundelfinger: Crelle's Journal, Bd. 74.

gegebenen und es tritt eine Potenz der Substitutionsdeterminante, also auch eine Invariante, in den Nenner. Bei Formen gerader Ordnung existiren jedoch keine lineare Covarianten; man bedient sich in diesem Falle der Polaren von anderen Covarianten in Bezug auf einen variabeln Punkt y. Sind nämlich zwei der letzteren durch φ, ψ bezeichnet, so setzt man

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} y_2$$

$$\eta = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} y_2 ,$$

und hierdurch werden die alten Veränderlichen y_1, y_2 durch die neuen ξ, η ausgedrückt, welche für $y = x$ in Covarianten der gegebenen Form f übergehen. Man wird so auf die folgende *„typische Darstellung von f“* geführt; es ist:

$$f(y_1, y_2) = \frac{A_0 \xi^n + A_1 \xi^{n-1}\eta + \ldots + A_n \eta^n}{D^\lambda},$$

wo nun D, A_0, A_1, ... A_n Covarianten von f sind; und zwar ist D die Substitutionsdeterminante, d. h. in unserem Falle die Functionaldeterminante der Formen φ und ψ. Ist nun $\Pi(y_1, y_2, a_0, a_1 \ldots a_n)$ eine Covariante von f, wo a_0, $a_1 \ldots a_n$ die Coëfficienten von f bedeuten, so wird durch unsere Substitution:

$$\Pi(y_1, y_2, a_0, a_2 \ldots a_n) = \Pi\left(\xi, \eta, \frac{A_0}{D^\lambda}, \frac{A_1}{D^\lambda} \ldots \frac{A_n}{D^\lambda}\right),$$

und wenn wir hierin $y = x$ setzen, nach dem Satze von den homogenen Functionen:

$$c \cdot \Pi(y_1, y_2, a_0, a_1 \ldots a_n) \cdot D^\lambda = \Pi(\varphi, \psi, A_0, A_1 \ldots A_n),$$

wo c ein Zahlenfactor ist. Eine jede Covariante von f ist daher durch die $n + 4$ Covarianten D, A_0, A_1, .., A_n, φ, ψ rational darstellbar. Die letzteren sind jedoch nicht von einander unabhängig, sondern sie lassen sich noch auf eine niedrigere Anzahl reduciren. Wir haben nämlich früher hervorgehoben (p. 222), dass eine binäre Form nur zwei von einander unabhängige Covarianten haben kann; durch dieselben müssen sich alle anderen, wenn auch irrational, ausdrücken lassen. Ferner hat eine Form n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $n - 3$ absolute Invarianten, denn mittelst einer linearen Transformation können wir bei passender Wahl der vier Substitutionscoëfficienten immer vier von den $n + 1$ Coëfficienten einer Form n^{ter} Ordnung bestimmte Werthe annehmen lassen; und es bleiben also nur $n - 3$ *für die Form charakteristische Zahlen oder absolute Invarianten.* Jede derselben muss der Quotient zweier Invarianten sein, und um $n - 3$ solche Quotienten bilden zu können haben wir $n - 2$ Invarianten

nöthig. Nehmen wir hierzu die zwei von einander unabhängigen Covarianten, so haben wir also *n Formen, durch welche sich alle anderen invarianten Bildungen der Grundform ausdrücken lassen; und zwar lehrt die Theorie der associirten Formen ein solches System von Bildungen angeben, dass dies auf rationale Weise ausführbar ist.*

Diese Bemerkungen mögen dazu dienen, im Allgemeinen die weitere Entwicklung der binären Formentheorie zu kennzeichnen. Eine eingehendere Ausführung würde unserem gegenwärtigen Zwecke nicht entsprechen, zumal da die geometrischen Resultate, welche die typische Darstellung der Formen liefert, bisher verhältnissmässig nur gering zu nennen sind.

VI. Die Collineationen im ternären Gebiete.

Die Theorie der binären Formen, wie wir sie im Vorstehenden entwickelt haben, gewinnt wesentlich an geometrischem Interesse durch die Anwendungen, welche man von ihr auch in der Geometrie der Ebene machen kann; in der That werden wir weiterhin ein Princip entwickeln, welches erlaubt, aus einem jeden Satze über binäre Formen einen solchen für das ternäre Gebiet, d. h. die Geometrie der Ebene, abzuleiten, ein Princip, dessen Ausdehnung auf mehrere Variable dann keiner Schwierigkeit unterliegt. Andererseits haben wir bei der Behandlung der binären Formen gewisse Gesichtspunkte gewonnen, deren Befolgung und Erweiterung naturgemäss auch für ternäre Formen zu wichtigen Resultaten führt. Zu wesentlich neuen Gedanken werden wir jedoch beim Aufsteigen zu den homogenen Functionen von drei Variabeln durch das bekannte Princip der Dualität geführt. In der Geometrie auf der Punktreihe war der Punkt (bez. im Strahlbüschel der Strahl) das einzige erzeugende Element; in der Geometrie der Ebene tritt dagegen dem Punkte die gerade Linie als gleichberechtigt gegenüber: wir haben demnach ebensowohl ternäre Formen zu betrachten, deren Variable Punktcoordinaten, als solche, deren Variable Liniencoordinaten sind; und nur die gleichzeitige Berücksichtigung der beiderlei Bildungen wird eine erschöpfende Behandlung *der Theorie der ternären Formen* erwarten lassen. Die letztere nun beschäftigt sich mit Aufsuchung und Behandlung der durch lineare Transformation (mit nicht verschwindender Determinante) unzerstörbaren Eigenschaften einer ternären Form, oder, geometrisch ausgesprochen, mit der Untersuchung der Eigenschaften einer algebraischen Curve, welche unabhängig von der Lage des Coordinatendreiecks sind, sei es, dass man die Curve als Punkt-, oder als Liniengebilde auffasst.

Gemäss dieser Fragestellung der Invariantentheorie werden wir uns im Folgenden zunächst mit den linearen Transformationen an sich

eingehender beschäftigen müssen, insbesondere um uns über die geometrische Bedeutung derselben völlig klar zu werden.

Bei den binären Formen erkannten wir, dass die lineare Transformation, welche zunächst eine Veränderung der Coordinatengrundpunkte repräsentirte, auch als der allgemeinste analytische Ausdruck für die projectivische Beziehung zweier Punktreihen oder Strahlbüschel aufgefasst werden kann. Dem entsprechend lässt auch die lineare Transformation im ternären Gebiete eine doppelte Interpretation zu: sie kann einmal — und so haben wir sie bisher allein betrachtet — als Coordinatentransformation angesehen werden, dann aber auch — und diese Auffassung entspricht der geometrischen Begriffsbildung der Invariantentheorie in höherem Masse — als Beziehung der Punkte zweier verschiedener Ebenen auf einander, sei es dass dieselben getrennt oder mit einander vereinigt liegen.

Denken wir uns die beiden Ebenen zunächst vereinigt liegend (unendlich benachbart) und die Punkte derselben auf dasselbe Coordinatendreieck bezogen. Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte der einen Ebene mit x, die der anderen mit y, so wird durch die linearen Gleichungen (a_{ik} nicht nothwendig gleich a_{ki}):

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varrho y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \varrho y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \varrho y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

derartig eine „*lineare Verwandtschaft*“ oder „*Collineation*“ zwischen beiden Ebenen begründet*), dass jedem Punkte x der einen Ebene ein Punkt y (Bildpunkt von x) der anderen Ebene entspricht. Es ist dieses Verhältniss im Allgemeinen nicht unmittelbar umkehrbar; einem Punkte y entspricht nicht wieder derselbe Punkt x, sondern der ihm zugehörige Punkt der ersten Ebene bestimmt sich durch Auflösung der Gleichungen (1), vorausgesetzt, dass ihre Determinante nicht verschwindet, mittelst der Formeln:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + A_{13}y_3 \\ \sigma x_2 &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + A_{23}y_3 \\ \sigma x_3 &= A_{31}y_1 + A_{32}y_2 + A_{33}y_3\,, \end{aligned}$$

wo die A_{ik} in bekannter Weise die aus den a_{ik} gebildeten zweigliedrigen Determinanten bedeuten. Die Formeln sind also dieselben wie die der Coordinatentransformation (vgl. p. 69); aber während dort derselbe Punkt auf zwei Coordinatensysteme bezogen wurde, sind hier zwei verschiedene Punkte auf dasselbe System bezogen.

---

*) Die Collineationen sind zuerst eingehend behandelt von Möbius: Barycentrischer Calcul, Leipzig 1827, p. 266 ff., dann von Magnus: Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833. Vgl. auch Chasles: Aperçu historique etc., Note 4.

Durchläuft einer dieser Punkte eine Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, so durchläuft sein Bildpunkt eine andere $F(y_1, y_2, y_3) = 0$, wo F aus f durch die Gleichungen (2) entsteht. Da letztere linear sind, so folgt der Satz:

Einer algebraischen Curve entspricht bei einer linearen Verwandtschaft immer eine andere von derselben Ordnung.

Beide Curven werden nun gewisse Eigenschaften mit einander gemein haben, die eben durch Collineationen überhaupt unzerstörbar sind; und zwar müssen dies dieselben Eigenschaften sein, welche wir früher durch ihre Unabhängigkeit vom Coordinatensysteme charakterisirten, denn Coordinatentransformation und lineare Verwandtschaft sind ja nur verschiedene Auffassungen für dieselbe algebraische Operation. Diese Eigenschaften werden daher durch das Verhalten der zu der ternären Form $f(x_1, x_2, x_3)$ gehörigen Invarianten*) angegeben, und somit haben wir für letztere selbst einen neuen und wichtigen Gesichtspunkt gewonnen, dessen volle geometrische Bedeutung im Folgenden entwickelt werden wird.

Betrachten wir zunächst eine gerade Linie mit den Coordinaten u:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

so entspricht derselben in der Bildebene eine von Punkten y durchlaufene Gerade, deren Coordinaten v ebenso wie bei der Coordinatentransformation durch die transponirte Substitution von (1) gegeben sind, d. i. durch die Gleichungen:

$$\mu u_i = a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + a_{3i} v_3 . \tag{4}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die für Punktcoordinaten bestehenden; es gilt daher der Satz, welcher übrigens auch eine directe Folge des allgemeinen Dualitätsprincips ist:

Zwei durch Collineation einander entsprechende Curven sind von gleicher Klasse.

Drücken wir einen Punkt der Geraden u mittelst eines Parameters λ durch zwei feste Punkte a, b derselben aus, so haben wir bekanntlich

$$\sigma x_i = a_i + \lambda b_i ;$$

seien ferner α, β die den Punkten a, b entsprechenden Bilder, so wird die von y auf v durchlaufene Punktreihe gegeben durch

$$\sigma y_i = \alpha_i + \lambda \beta_i ,$$

wo

*) Solche Eigenschaften können statt durch das Verschwinden von Invarianten auch durch *identisches* Verschwinden von Covarianten angezeigt werden, wofür wir bei den binären Formen Beispiele hatten (vgl. p. 241). Wir gehen hierauf weiter unten näher ein (p. 272, f.).

$$\varrho \alpha_i = a_{i1} a_1 + a_{i2} a_2 + a_{i3} a_3$$
$$\varrho \beta_i = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 .$$

In beiden Gleichungen kommt aber derselbe Parameter λ vor, und somit folgt:

Wenn ein Punkt eine Punktreihe durchläuft, so beschreibt der entsprechende Punkt eine ihr projectivische Punktreihe; und Analoges gilt für Strahlbüschel.

An diesen Satz knüpft sich unmittelbar die Beantwortung der sich zunächst aufdrängenden Frage: wie construirt man zu einem gegebenen Punkte den Bildpunkt? Dieselbe wird durch eine rein geometrische Bestimmung einer Collineation ermöglicht, welche in folgendem Satze ausgesprochen ist:

Ordnet man vier Punkten, von denen keine drei in gerader Linie liegen, bez. vier andere zu, von denen ebenfalls keine drei in gerader Linie liegen, so ist dadurch die lineare Verwandtschaft völlig bestimmt. In der That kann man, wenn die Gleichungen

$$\varrho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3$$

für vier Punkte, x^0, x', x'', x''' und für die vier entsprechenden y^0, y', y'', y''' bestehen sollen, die Coëfficienten a_{ik} eindeutig bestimmen; denn man hat für sie 12 lineare Gleichungen mit 13 homogen vorkommenden Unbekannten (den 9 Grössen a_{ik} und 4 Proportionalitätsfactoren ϱ^0, ϱ', ϱ'', ϱ'''). Aus irgend dreien der vier Gleichungen:

$$(5) \qquad \varrho^{(h)} y_i^{(h)} = a_{i1} x_1^{(h)} + a_{i2} x_2^{(h)} + a_{i3} x_3^{(h)}$$

berechnen wir nämlich die Coëfficienten a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}. Anderseits kann man letztere aus je dreien dieser Gleichungen eliminiren, und erhält dadurch bez.:

$$0 = \varrho^0 y_i^0 X^0 + \varrho' y_i' X' + \varrho'' y_i'' X'' + \varrho''' y_i''' X''' .$$

Hier bedeuten die $X^{(h)}$ die vier aus den x zusammengesetzten Determinanten, z. B. ist

$$X^0 = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} ;$$

dieselben verschwinden nicht, weil keine drei der vier Punkte x auf gerader Linie gelegen vorausgesetzt sind. Aus den drei Gleichungen, welche sich so für die ϱ ergeben ($i = 1, 2, 3$), finden wir für die Verhältnisse derselben folgende Ausdrücke:

$$(6) \quad \varrho^0 X^0 = m Y^0, \quad \varrho' X' = m Y', \quad \varrho'' X'' = m Y'', \quad \varrho''' X''' = m Y''',$$

wo die Y die aus den y zu bildenden Determinanten sind, also z. B.:

$$Y^0 = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_2'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix},$$

und wo m einen unbestimmt bleibenden Factor bedeutet. Aus (6) werden somit die Verhältnisse der ϱ, aus (5) dann die der a_{ik} berechnet; und damit ist unser Satz bewiesen.*)

Vorausgesetzt nun, dass vier Punkte der einen Ebene als vier Punkten der andern bez. entsprechend gegeben sind, so construirt man zu jedem fünften Punkte $x^{(IV)}$ den ihm entsprechenden Punkt $y^{(IV)}$ in folgender Weise. Nach einem soeben bewiesenen Satze ist das Büschel der vier von x^0 nach x', x'', x''', $x^{(IV)}$ gehenden Strahlen zu dem von y^0 nach y', y'', y''', $y^{(IV)}$, und das der Strahlen von x' nach x^0, x'', x''', $x^{(IV)}$ zu dem von y' nach y^0, y'', y''', $y^{(IV)}$ projectivisch. Man kann daher nach bekannten Sätzen die Strahlen $\overline{y^0 y^{(IV)}}$ und $\overline{y' y^{(IV)}}$ construiren, so dass $y^{(IV)}$ selbst als Schnitt beider bestimmt ist. Diese Construction wird in der That, ebenso wie die Rechnung, nur dann nicht ausführbar, wenn drei der Punkte x oder drei der Punkte y auf gerader Linie liegen.

Tritt jedoch dieser zunächst ausgeschlossene Fall ein, so werden wir dadurch zu dem Begriffe der sogenannten *Centralperspective* geführt. Die dabei vorkommenden Besonderheiten entsprechen gewissermassen denjenigen, welche wir im binären Gebiete bei der perspectivischen Lage zweier projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel hervorgehoben haben. Wir wollen dieselben in den folgenden Ueberlegungen um so mehr näher erörtern, als wir sehen werden, dass man sich jede Collineation aus diesem besondern Falle hervorgegangen denken darf

Die linearen Gleichungen (1) oder (2) beziehen sich auf ein

*) Die Bestimmung einer Collineation durch vier Punkte und die ihnen zugeordneten kann man auch in folgender Weise einsehen. Der Verbindungslinie zweier Punkte in E_1 entspricht jedenfalls die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte in E_2, und dem Schnittpunkte zweier Geraden in E_1 der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden in E_2. Verbinden wir nun die vier in E_1 gegebenen Punkte unter einander, so bestimmen die 6 Verbindungslinien 3 neue Punkte, deren zugehörige in E_2 durch die entsprechende Construction sofort gegeben sind. Verbinden wir die 3 neuen Punkte in E_1 wieder unter einander und mit den 4 ursprünglich gegebenen, und setzen diese Construction beliebig fort, so erhalten wir immer neue Punkte in E_1, deren entsprechende in E_2 sofort gegeben sind. Schliesslich wird die ganze Ebene E_1 mit einem Netze von beliebig vielen Geraden bedeckt, und zwar lässt sich zeigen, dass man durch fortgesetzte Verdichtung des Netzes jedem Punkte von E_1 beliebig nahe kommen kann. Denkt man sich nun gleichzeitig das entsprechende Netz in E_2 construirt, so ist durch diese Netze die gegenseitige Zuordnung der einzelnen Punkte beider Ebenen festgelegt; und *also die Collineation völlig bestimmt.* Vgl. hierüber **Möbius, a. a. O. p. 273.**

beliebiges Coordinatendreieck; bei Aenderung desselben werden ihre Coëfficienten immer andere Werthe annehmen. Legen wir z. B. ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, so werden sie (wenn wir dieselben Coëfficienten der Einfachheit wegen beibehalten) von der Form:

$$\varrho \cdot X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$
$$\varrho \cdot Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$
$$\varrho \cdot 1 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}$$

oder:

$$X = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad Y = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

und umgekehrt:

$$x = \frac{A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}}{A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}}, \quad y = \frac{A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}}{A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}}.$$

Die Gleichung

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

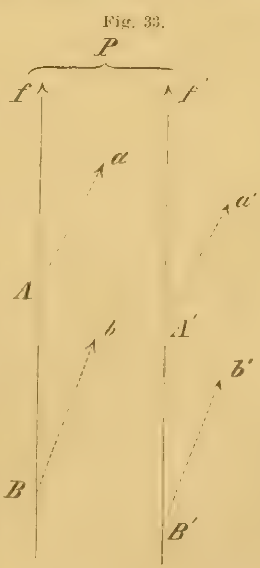
ist dann die einer geraden Linie, deren Punkte den unendlich fernen Punkten des Bildes ($X = \infty$, $Y = \infty$) entsprechen und ebenso sind die Punkte der Geraden

$$A_{31}X + A_{32}Y + A_{33} = 0$$

die Bilder der unendlich fernen Punkte der ersten Ebene ($x = \infty$, $y = \infty$). In der That müssen wir ja überhaupt die unendlich fernen Punkte der Ebene als auf einer Geraden gelegen annehmen (vergl. p. 67); aus einer solchen kann aber durch Collineation nur wieder eine Gerade werden.

Die erwähnten beiden geraden Linien werden als *Fluchtlinien* bezeichnet; durch eine besondere Lage derselben gegen einander können wir nun die Centralperspective charakterisiren: Wir wollen uns die eine der beiden unendlich nahen Ebenen (E und E') — ohne beide von einander zu entfernen — so gegen die andere gedreht denken, dass die beiden Fluchtlinien einander parallel werden. *Alsdann entspricht der unendlich ferne Schnittpunkt P der beiden Fluchtlinien f und f' sich selbst;* denn, insofern er auf f liegt, muss ihm ein unendlich ferner Punkt der Ebene E', insofern er auf f' liegt, ein solcher der Ebene E entsprechen, und dies kann nur gleichzeitig eintreten, wenn er mit dem ihm zugeordneten zusammenfällt. Einem beliebigen anderen Punkte A auf f entspricht dagegen ein

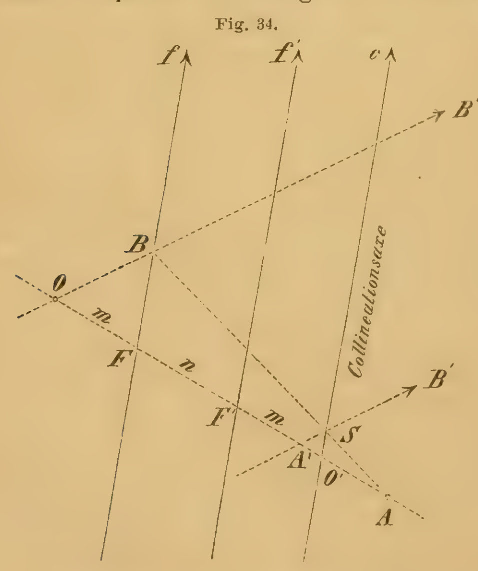
Fig. 33.



unendlich ferner Punkt in E', der durch die von A nach ihm führende Richtung a gegeben ist (vgl. Fig. 33); diesem unendlich fernen Punkte, betrachtet als Punkt von E, entspricht wieder ein auf f'' gelegener Punkt A', so dass seine Verbindungslinie a' mit diesem zu a parallel wird. Gehen wir ebenso von einem Punkte B auf f aus, so werden wir in derselben Weise zu einem Punkte B' auf f'' geführt, so dass zwei parallele bez. von B und B' ausgehende Linien b und b' den unendlich fernen Punkt bestimmen, welcher zu B und B' in besagter Beziehung steht. Durch Parallelverschiebung der beiden Ebenen gegeneinander, können wir es nun insbesondere so einrichten, dass bez. die Linien a und a', b und b' zusammenfallen*) und so durch ihren Schnittpunkt O einen dann besonders ausgezeichneten Punkt bestimmen; und zwar ist dies auf zwei Weisen möglich, da wir die eine Ebene immer noch um 180° drehen können, ohne das Resultat zu ändern. Die Fluchtlinien bleiben dabei einander parallel und ändern nur ihren gegenseitigen Abstand.

Die Beziehung, in welche die Ebenen nunmehr gebracht sind, ist es, welche als *die perspectivische Lage der ebenen Systeme* bezeichnet wird; der Punkt O heisst das *Centrum der Perspectivität oder der Collineation.* Dieser Punkt ist in der Weise ausgezeichnet, dass nicht nur die Strahlen a und b mit ihren entsprechenden Strahlen a', b' zusammenfallen, sondern *dass jeder durch ihn gehende Strahl sich selbst entspricht.* Es folgt dies unmittelbar daraus, dass ausser den Strahlen a, b auch die Verbindungslinie von O mit dem unendlich fernen Punkte P der Fluchtlinien mit ihrem entsprechenden Strahle zusammenfällt, und sonach die beiden durch O gehenden, einander projectivischen Strahlbüschel der Ebenen E und E' ganz zusammenfallen müssen (vgl. p. 44). Bei dieser perspectivischen Lage können wir den zu einem beliebigen Punkte A in E gehörigen Punkt A' in E' sehr einfach construiren. Letzterer nämlich muss zunächst auf der Linie AO liegen,

Fig. 34.



*) Dass dies in der That immer möglich ist, ergibt sich auch aus den folgenden analytischen Entwicklungen.

da dieselbe mit $A'O$ zusammenfällt. Auf diesem Strahle sind dann zwei projectivische Punktreihen in perspectivischer Lage bestimmt. Der eine Doppelpunkt derselben fällt in das Collineationscentrum O (vgl. Fig. 34); ferner entspricht dem unendlich fernen Punkte der einen Reihe der Schnittpunkt F' von AO mit f', und dem Schnittpunkte F von AO mit f der unendlich ferne Punkt, insofern er der andern Reihe angehört; durch diese Zuordnung ist die Projectivität festgelegt. Der zweite Doppelpunkt O' ist ebenso weit von dem Schnittpunkte mit der Fluchtlinie F' entfernt, wie O von dem mit F; in der That ist nämlich das Doppelverhältniss dieses Punktes mit den drei erwähnten Punkten der einen Reihe gleich dem Doppelverhältnisse mit den drei entsprechenden der andern, nämlich

$$= \frac{\frac{n}{\infty}}{-\frac{n+m}{\infty}} = -\frac{n}{n+m},$$

wo n die Entfernung $\overline{FF'}$, m die Entfernung $\overline{FO} = \overline{F'O'}$ bezeichnet. Der Punkt O', und ebenso jeder Punkt der durch O' zu den Fluchtlinien gezogenen Parallele entspricht daher sich selbst. Diese Parallele wird als *Collineationsaxe* (c in Fig. 34) bezeichnet. Wir haben dann die Sätze:

Bei der perspectivischen Lage collinear verwandter Systeme

entspricht jeder Strahl durch das Collineationscentrum sich selbst.

entspricht jeder Punkt auf der Collineationsaxe sich selbst.

Die Punkte der Ebene werden also in diesem Falle durch die Transformation auf den durch O gehenden Strahlen verschoben, und die Linien der Ebene um ihre Schnittpunkte mit der Collineationsaxe gedreht. Mit Hülfe dieser Sätze können wir nun die verlangte Construction des dem Punkte A entsprechenden Punktes A' auch ohne Benutzung der Fluchtlinien ausführen, vorausgesetzt, dass Centrum (O) und Axe (c) der Collineation, sowie zwei entsprechende Punkte (B, B') (deren Verbindungslinie durch O geht) oder zwei entsprechende Gerade (deren Schnittlinie auf der Axe liegt) gegeben sind. Es müssen nämlich auch die Verbindungslinien von B und A, B' und A', als einander entsprechend, sich auf der Axe schneiden.*) Verbinden wir daher den Schnittpunkt (S) der Linie und der Axe mit B', so wird diese Verbindungslinie von dem Strahle OA in dem gesuchten Punkte A' geschnitten.

Die hier betrachtete perspectivische Beziehung gibt eine klare Anschauung über die durch eine lineare Transformation hervorge-

*) In Fig. 34 ist für B ein Punkt auf f und also für B' der unendlich ferne Punkt von OB gewählt.

brachten Veränderungen ebener Figuren überhaupt. Es gilt nämlich wie bei projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln der folgende Satz:

Zwei collineare Systeme können durch congruente Ortsveränderung des einen von ihnen immer in perspectivische Lage gebracht werden.

Zunächst nämlich ist ersichtlich, dass wir eine projectivische Beziehung zweier Ebenen auf einander durch folgende räumliche Construction herstellen können, von der wir dann unmittelbar zur perspectivischen Lage zurückgeführt werden. Wir beziehen zwei gegen einander im Raume geneigte Ebenen dadurch auf einander, dass wir sie von einem Punkte ausserhalb derselben betrachten, d. h. dass wir je zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch einen bestimmten, willkürlich gewählten Punkt (O) des Raumes geht, einander entsprechend setzen. In der That sind dann entsprechende Punktreihen und entsprechende Strahlbüschel in beiden Ebenen projectivisch. Man überzeugt sich davon sofort, wenn man durch den Punkt O eine beliebige Ebene legt; diese schneidet die gegebenen Ebenen in zwei Linien, welche unmittelbar perspectivisch auf einander bezogen sind. Lassen wir nun die beiden gegebenen Ebenen allmählich zusammenfallen, indem wir die eine um ihre Schnittlinie mit der andern drehen, so geht letztere Gerade in die Collineationsaxe über und der Punkt O fällt in die eine Ebene hinein: er gibt das Collineationscentrum. Die beiden ebenen Systeme befinden sich somit in perspectivischer Lage. Unser oben aufgestellter Satz ist also bewiesen, sobald wir noch zeigen, dass durch die angegebene räumliche Construction die *allgemeinste* collineare Verwandtschaft erhalten werden kann.

Letzteres ergibt sich nun folgendermassen. Wir können immer in jeder der Ebenen E, E' zwei entsprechende Punktreihen angeben, welche einander congruent sind. Setzen wir nämlich die Transformationsgleichungen in der Form voraus:

$$(7)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} = \frac{A}{C} \\ Y &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} = \frac{B}{C}, \end{aligned}$$

so muss für ein Punktepaar einer solchen Geraden und für das entsprechende Paar der andern Ebene die Gleichung:

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 = \left(\frac{A'}{C'} - \frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B'}{C'} - \frac{B}{C}\right)^2$$

bestehen. Nehmen wir nun die Punkte x, y und x', y' auf einer zu der Geraden $C = 0$ (der einen Fluchtlinie) parallelen Geraden an, d. h. setzen wir:

$$C = C' = k,$$

so erhalten wir die Relation:

$$k(x'-x)^2+(y'-y)^2=(a_{11}(x'-x)+b_{12}(y'-y))^2+(a_{21}(x'-x)+a_{22}(y'-y))^2;$$

und diese ist für:

$$x'-x=r\cos\alpha,\quad y'-y=r\sin\alpha$$

offenbar erfüllt, wenn wir

$$k^2=(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)^2+(a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)^2$$

nehmen, und zwar unabhängig von dem Werthe von r. Es gibt daher in jeder Ebene zwei Gerade, parallel und symmetrisch zur Fluchtlinie gelegen, deren Punktreihen mit denen der entsprechenden Geraden congruent sind. Bei obiger Construction sind nun die Ebenen nur so gegen einander gelegt, dass diese beiden Geraden in die Schnittlinie der Ebenen zusammenfallen, und dass je zwei einander entsprechende Punkte derselben über einander liegen. Um die Verwandtschaft der beiden ebenen Punktsysteme durch Zuordnung von vier Punkten festzulegen, können wir daher, ohne eine Specialisirung zu verursachen, zwei Punktepaare auf der Schnittlinie der Ebene E und E' annehmen, während die beiden anderen beliebig, aber in einer dritten Ebene*), liegen mögen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der letzteren Paare bestimmen dann den festen Punkt O, und dass jeder andere von ihm ausgehende Strahl die Ebenen EE' in entsprechenden Punkten trifft, ersieht man leicht aus der Gleichheit der in der so construirten Figur auftretenden Doppelverhältnisse. Legt man insbesondere durch O eine Parallelebene zu der einen Ebene, so schneidet dieselbe in der andern die Fluchtlinie derselben aus. Man erkennt hieraus, dass bei allmähligem Nähern der beiden Ebenen das Collineationscentrum O in einen Punkt fällt der von der einen Fluchtlinie ebensoweit entfernt ist, wie die Collineationsaxe, die Schnittlinie der beiden Ebenen, von der andern. Diese Strecke (m) und die gegenseitige Entfernung der beiden Fluchtlinien (n) sind somit für die perspectivische Lage besonders charakteristisch, *sie bestimmen dieselbe geradezu vollständig.*

In der That lassen sich auch die Coëfficienten unserer Transformationsgleichungen (7) durch diese Grössen m, n ausdrücken; wir brauchen, um dies zu erkennen, nur das Coordinatensystem passend zu legen. Der Anfangspunkt falle mit dem Collineationscentrum zusammen, und die Y-Axe laufe zu den Fluchtlinien parallel. Die Gleichung der einen Fluchtlinie $C=0$ wird dann

*) Dies ist nöthig, da die Verbindungslinie des Paares in E die Schnittlinie von E und E' in einem Punkte schneidet, der mit seinem entsprechenden vereinigt liegt und der daher ebenso durch die Verbindungslinie des Paares in E' erhalten werden muss.

$$x - m - n = 0 .$$

Ferner muss der Punkt x, y mit dem Punkte X, Y auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden liegen; wir haben also

$$X : Y = x : y ,$$

und die Transformationsgleichungen nehmen daher die Form an:

$$X = \frac{\varrho x}{x - m - n}$$

$$Y = \frac{\varrho y}{x - m - n} .$$

Für $x = \infty$, $y = \infty$ muss die Gleichung der anderen Fluchtlinie resultiren, d. h. $X = - m$ werden. Es ist daher

$$\varrho = m (m + n)$$

zu setzen. Führen wir noch eine neue Constante $\sigma = m + n$ ein, *so erhalten wir die Collineation bei perspectivischer Lage in allgemeinster Weise dargestellt durch die Gleichungen:*

$$X = \frac{\varrho x}{x - \sigma} , \quad Y = \frac{\varrho y}{x - \sigma} .$$

Auf diese Form müssen sich nach dem Vorhergehenden die Gleichungen für jede lineare Verwandtschaft durch Einführung neuer, rechtwinkliger Coordinaten, d. i. durch Drehung und Verschiebung bringen lassen. Um die betreffenden Umformungen durchzuführen, gehen wir von den Gleichungen (7) aus. Wir verschieben die Ebene der X, Y, indem wir dem früher mit dem der andern Ebene vereinigten Coordinatensysteme die Verschiebungen p, q und die Drehung φ ertheilen. Der zu x, y gehörige Punkt (früher X, Y) erhält dann die Coordinaten X', Y', und zwar ist:

$$X' = p + X \cos \varphi - Y \sin \varphi$$
$$Y' = q + X \sin \varphi + Y \cos \varphi .$$

Es gilt jetzt, p, q, φ so zu bestimmen, dass die Bedingung dafür, dass ein Punkt X', Y' mit einem Punkte x, y zusammenfällt, auf eine lineare Gleichung in x, y führt, die dann die Collineationsaxe darstellt. Setzen wir also die Werthe der X, Y aus (7) in die letzten Gleichungen ein, so müssen für $X' = x$, $Y' = y$ die entstehenden Gleichungen (τ sei Proportionalitätsfactor):

$$\tau (x - p) = (a_{11} x + a_{12} y + a_{13}) \cos \varphi - (a_{21} x + a_{22} y + a_{23}) \sin \varphi$$
$$\tau (y - q) = (a_{11} x + a_{12} y + a_{13}) \sin \varphi + (a_{21} x + a_{22} y + a_{23}) \cos \varphi$$
$$\tau = a_{31} x + a_{32} y + a_{33}$$

sich sämmtlich auf die *eine* Gleichung

$$\varkappa x + \lambda y + 1 = 0$$

reduciren. Zunächst haben wir daher:

$$\varkappa = \frac{a_{31}}{a_{33} - \tau}, \quad \lambda = \frac{a_{32}}{a_{33} - \tau};$$

wo sich nun τ aus den ersten beiden Gleichungen durch Coëfficientenvergleichung bestimmt. Man findet:

$$\frac{a_{11} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi - \tau}{a_{12} \cos \varphi - a_{22} \sin \varphi} = \frac{a_{31}}{a_{32}}, \quad \frac{a_{11} \sin \varphi + a_{21} \cos \varphi}{a_{12} \sin \varphi + a_{22} \cos \varphi - \tau} = \frac{a_{31}}{a_{32}},$$

oder, wenn man die Unterdeterminanten

$$A_{13} = a_{32} a_{21} - a_{22} a_{31}, \quad A_{23} = a_{31} a_{12} - a_{11} a_{32}$$

einführt:

$$A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi = -\tau a_{32}$$
$$A_{13} \cos \varphi + A_{23} \sin \varphi = \tau a_{31}.$$

Für den Werth von τ hat man also:

$$\tau^2 = \frac{A_{13}^2 + A_{23}^2}{a_{32}^2 + a_{31}^2};$$

die Grössen p, q, φ ergeben sich dann linear; es gibt also zwei Arten, die perspectivische Lage hervorzurufen, wie wir auch schon vorhin rein geometrisch erkannten (p. 256).

Es liegt nahe, auch bei der allgemeinen Collineation nach solchen Punkten zu fragen, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Wir finden die Coordinaten derselben aus den Gleichungen

$$\varrho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3,$$

wenn wir $y_i = x_i$ setzen, wodurch wir erhalten:

$$(8) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 + a_{23} x_3 &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \varrho) x_3 &= 0; \end{aligned}$$

und die Elimination der x ergibt die für ϱ cubische Gleichung:

$$(9) \quad \Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Im Allgemeinen gibt es daher drei Punkte, welche mit ihren zugehörigen zusammenfallen. Ebenso muss es auch *drei sich selbst entsprechende Gerade geben;* es sind offenbar die Verbindungslinien der drei Punkte, da die Linien, welche entsprechende Punkte verbinden, auch entsprechende sind. Das so bestimmte Dreieck bildet ein besonders einfaches Coordinatensystem für die Transformation. Da unter Zu-

grundelegung desselben der Linie $x_i = 0$ die Linie $y_i = 0$ entspricht, so müssen die Gleichungen (1) dann die vereinfachte Form annehmen:

$$
(10) \qquad \begin{aligned} \varrho y_1 &= \alpha_1 x_1 \\ \varrho y_2 &= \alpha_2 x_2 \\ \varrho y_3 &= \alpha_3 x_3 . \end{aligned}
$$

Man kann sich dieselben aus (1) entstanden denken, indem man jene Gleichungen mit u_1, u_2, u_3 multiplicirt und addirt:

$$
(11) \qquad \varrho\,(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) = \Sigma\, a_{ik}\, u_i\, x_k ,
$$

und dann die u so bestimmt, dass der lineare Ausdruck links dem rechts proportional wird, also:

$$
\alpha u_k = \sum_i a_{ik} u_i .
$$

Die u_k sind dann die Coordinaten einer sich selbst entsprechenden Geraden, und die Elimination derselben aus den letzten Gleichungen führt für α auf die cubische Gleichung (9). Die Gleichung (11) verwandelt sich in ($u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$):

$$
\varrho u_y = \alpha u_x ,
$$

d. h. in eine der Gleichungen (10). Man sieht also, *dass* α_1, α_2, α_3 *die Wurzeln jener cubischen Gleichung sind.*

Die drei so ausgezeichneten Punkte sind im Allgemeinen von einander verschieden*); und nur dann ist das Dreieck derselben in dieser Weise einzuführen. Rücken zwei der Punkte einander unendlich nahe, oder, was dasselbe ist, hat die Gleichung (9) zwei gleiche Wurzeln, so wird kein eigentliches Dreieck mehr gebildet, und man kann die Transformation nicht mehr in der Gestalt (10) darstellen. Dagegen ist dies noch möglich, wenn eine unendliche Zahl von Punkten existirt, die alle mit ihren entsprechenden zusammenfallen, wie es bei der perspectivischen Lage der Fall war; und zwar tritt dies ein, wenn alle Unterdeterminanten Δ_{ik} der Determinante (9) verschwinden. Denn die Coordinaten der drei Punkte genügen nach (8) den Relationen:

$$
\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} \\ &= \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23} \\ &= \Delta_{31} : \Delta_{32} : \Delta_{33} ; \end{aligned}
$$

ein solcher Punkt wird also in der That unbestimmt, wenn für eine

*) Zwei derselben können auch imaginär werden. Es tritt dies z. B. ein bei den Transformationen, durch welche eine Drehung der Ebene in sich um einen ihrer Punkte dargestellt wird. In diesem Falle fallen zwei der Punkte in die imaginären Kreispunkte, der dritte ist das Rotationscentrum; ebenso sind zwei der Geraden imaginär, die dritte fällt in die unendlich ferne Gerade.

Wurzel von (9) alle Δ_{ik} Null werden. Diese Wurzel ist dann aber Doppelwurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$, denn es wird auch

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varrho} = -\varrho\,(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) = 0\,.$$

Bezeichnen wir diese Doppelwurzel durch σ, so können sich also bei der perspectivischen Lage, vorausgesetzt, dass $\Delta(\varrho) = 0$ nicht eine dreifache Wurzel habe*), die Gleichungen (8) nur um einen constanten Factor unterscheiden; d. h. *wir können die neun Coëfficienten a_{ik} der Transformation in der folgenden Weise durch sechs Grössen ausdrücken:*

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \alpha_1\beta_1 + \sigma & a_{21} = \alpha_1\beta_2 & a_{31} = \alpha_1\beta_3 \\ a_{12} = \alpha_2\beta_1 & a_{22} = \alpha_2\beta_2 + \sigma & a_{32} = \alpha_2\beta_3 \\ a_{13} = \alpha_3\beta_1 & a_{23} = \alpha_3\beta_2 & a_{33} = \alpha_3\beta_3 + \sigma \end{array}$$

Unsere Gleichungen (1) nehmen dadurch die einfachere Form an:

$$\varrho y_i = \sigma x_i + \beta_i\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\,, \tag{12}$$

und die cubische Gleichung geht über in:

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 - (\varrho-\sigma) & \alpha_2\beta_1 & \alpha_3\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 & \alpha_2\beta_2 - (\varrho-\sigma) & \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\beta_3 & \alpha_2\beta_3 & \alpha_3\beta_3 - (\varrho-\sigma) \end{vmatrix} = -(\varrho-\sigma)^2(\varrho-\sigma-\beta_1\alpha_1-\beta_2\alpha_2-\beta_3\alpha_3).$$

Wir erhalten also in der That die Doppelwurzel $\varrho = \sigma$ und die einfache Wurzel

$$\varrho = \sigma + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3\,.$$

Die erstere gibt uns *die Gleichung der Collineationsaxe:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0\,,$$

die andere *die Coordinaten des Collineationscentrums:*

$$x_1 : x_2 : x_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3\,.$$

Die Gleichung dieses Punktes ergibt sich ebenso, wie die der Axe aus (12), wenn wir die Collineationsgleichungen für Liniencoordinaten aufstellen; denn diese werden:

$$\varrho u_i = \sigma v_i + \alpha_i\,(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3)\,. \tag{13}$$

Aus (12) folgt ferner durch Elimination von ϱ, σ und α_x:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

und ebenso aus (13) durch Elimination von ϱ, σ, v_β:

*) Eine vollständige Behandlung der verschiedenen hier auftretenden Möglichkeiten findet sich in der letzten Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wodurch wieder die früher schon bewiesenen Sätze gegeben sind, dass Verbindungslinien entsprechender Punkte durch das Collineationscentrum gehen, und entsprechende Gerade sich auf der Collineationsaxe schneiden.

Legen wir nun zwei Ecken des Coordinatensystems auf die Axe, die dritte in das Centrum der Collineation, so erhalten wir die Transformation in der kanonischen Form:

$$\varrho y_1 = \tau x_1, \quad \varrho y_2 = \sigma x_2, \quad \varrho y_3 = \sigma x_3$$

welche sich von der obigen Form nur dadurch unterscheidet, dass dort die unendlich ferne Gerade statt der Collineationsaxe als dritte Coordinatenseite benutzt wurde.

Auf andere Besonderheiten, welche bei den linearen Verwandtschaften eintreten können, werden wir später von anderem Gesichtspunkte aus zurückkommen. Wir gedenken hier nur noch mit einigen Worten der sogenannten *dualistischen Verwandtschaften oder Transformationen*, von denen wir in der durch einen Kegelschnitt begründeten Polarreciprocität einen speciellen Fall kennen gelernt haben. Eine solche Verwandtschaft wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\varrho u_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3,$$

oder aufgelöst: $$\sigma x_i = A_{1i} u_1 + A_{2i} u_2 + A_{3i} u_3;$$

sie ordnet also jedem Punkte eine Gerade, jeder Geraden einen Punkt zu und kann somit als algebraischer Ausdruck für das allgemeine Dualitätsprincip betrachtet werden. Besonders ausgezeichnet sind dabei zwei Kegelschnitte:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0,$$

der eine als Ort der Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen, der andere als umhüllt von diesen Geraden. Beide Curven sind mit einander identisch für $a_{ik} = a_{ki}$, und dann ist $\Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$ die Liniencoordinatengleichung von $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$: *In diesem Falle geht also die dualistische Verwandtschaft in die Polarreciprocität in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ über.* —

VII. Die ternären Formen im Allgemeinen.

Bevor wir zu allgemeinen Sätzen über ternäre Formen übergehen, schicken wir einige Bemerkungen über die Natur der bei ihnen auftretenden Bildungen voraus. Weiterhin wird uns hauptsächlich die symbolische Darstellung derselben und die aus dieser fliessende Uebertragung der Resultate der binären Formentheorie auf das ternäre Gebiet beschäftigen.

Betrachten wir zunächst eine lineare Form:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 ,$$

so stellt dieselbe bekanntlich gleich Null gesetzt eine gerade Linie dar; und die u_i sind die *Coordinaten dieser Geraden.* Dies werden wir jedoch gemäss dem Dualitätsprincip besser dahin aussprechen, dass die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

die *Bedingung für die vereinigte Lage des Punktes x und der Geraden u ist* (vgl. p. 69). Schon hieraus ersehen wir, dass unsere lineare Form die Invarianteneigenschaft haben muss; denn wir haben gesehen, dass die vereinigte Lage von Punkt und Gerade durch eine Collineation nicht zerstört werden kann. Sei nun eine solche gegeben durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \varrho X_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 ,$$

so werden die entsprechenden Gleichungen für Liniencoordinaten (vgl. p. 68):

$$(2) \qquad \sigma u_i = \alpha_{1i} U_1 + \alpha_{2i} U_2 + \alpha_{3i} U_3 .$$

Durch Benutzung dieser Relationen und unter Anwendung des Multiplicationstheorems der Determinanten erkennt man zunächst, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

die Invarianteneigenschaft hat, ebenso wie bei den binären Formen die zweigliedrige Determinante (xy). Wir haben nämlich, wenn Y, Z die Coordinaten der Punkte sind, in welche y, z vermöge der Gleichungen (1) übergehen, unmittelbar:

$$\varrho^3 \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ,$$

oder wenn wir die aus den x, y, z gebildete Determinante kurz durch $(x y z)$, die Substitutionsdeterminante der α_{ik} durch $r \cdot \varrho^3$ bezeichnen:

$$(3) \qquad (X Y Z) = r\,(x y z)\,.$$

Die Coordinaten einer Geraden sind nun proportional zu den zweigliedrigen Unterdeterminanten irgend zweier auf ihr gelegener Punkte; und die dabei auftretenden Proportionalitätsfactoren wollen wir in der Folge immer so bestimmt denken, *dass der Ausdruck* $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$ *ohne Factor in* $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ *übergeht.* D. h. wir setzen:

$$\begin{aligned}
r U_1 &= Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2\,, & u_1 &= y_2 z_3 - y_3 z_2\,,\\
r U_2 &= Y_3 Z_1 - Y_1 Z_3\,, & u_2 &= y_3 z_1 - y_1 z_3\,,\\
r U_3 &= Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1\,, & u_3 &= y_1 z_2 - y_2 z_1\,;
\end{aligned}$$

und dadurch erhalten wir also in abgekürzter Schreibweise:

$$(4) \qquad U_X = u_x$$

Diesen Ausdruck u_x wollen wir in der Folge, da er nur von Punkt- und Liniencoordinaten abhängt, ohne sonst noch Coëfficienten zu enthalten, als *identische Covariante* bezeichnen.

Die Mannigfaltigkeit der geometrischen Gebilde, welche durch das Auftreten der Liniencoordinaten im ternären Gebiete bedingt ist, nöthigt uns, auch den Kreis der invarianten Bildungen entsprechend zu erweitern. Während nämlich bei den binären Formen nur Invarianten und Covarianten auftreten, haben wir bei drei homogenen Veränderlichen die folgenden Klassen von Functionen mit der Invarianteneigenschaft:

1. *Invarianten.* Dieselben hängen nur von den Coëfficienten der Grundform (oder bei simultanen Systemen, der Grundformen) ab, und geben durch ihr Verschwinden besondere Eigenschaften des durch die Grundform dargestellten Gebildes (Curve).

2. *Covarianten.* Dieselben enthalten ausser den Coëfficienten der Grundform noch die Coordinaten eines Punktes, oder auch mehrerer. Im ersten Falle geben sie, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Curve, die mit der Grundcurve in einer invarianten Beziehung steht.

3. *Zugehörige Formen oder Contravarianten.* Sie enthalten ausser den Coëfficienten der Grundform noch Liniencoordinaten. Kommt nur eine Reihe von diesen vor, so stellen sie, gleich Null gesetzt, eine von den Linien umhüllte Curve dar.

4. *Zwischenformen.* Dieselben enthalten ausser den Coëfficienten gleichzeitig Punkt- und Liniencoordinaten. Ist von jeder Art dieser Veränderlichen nur eine Reihe vorhanden, so wird durch

Nullsetzen einer Zwischenform jedem Punkte x der Ebene eine von Linien u umhüllte Curve, jener Linie u eine von Punkten x beschriebene Curve zugeordnet. Man hat diese Gebilde bisher nur eingehender betrachtet, wo man, ausgehend von Grundformen mit Punkt- *oder* Liniencoordinaten, durch covariante Bildungen auf sie geführt wurde. Es ist jedoch, wenn anders man systematische Vollständigkeit erreichen will, von diesen Zwischenformen selbst als Grundformen auszugehen. Wir werden hierauf später zurückkommen.*)

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass endlich noch *absolute Invarianten***) auftreten, d. h. Functionen, die bei linearen Transformationen *völlig* ungeändert bleiben, und die, wie bei den binären Formen, durch Quotienten passender Potenzen von Invarianten gegeben werden (p. 196). — Alle diese Bildungen wollen wir im Folgenden kurz unter dem Ausdrucke *Functionalinvariante* zusammenfassen. Wir theilen dieselben ein nach dem „*Grade*" in den Coëfficienten der Grundform, nach der „*Ordnung*" in den Punktcoordinaten und nach der „*Klasse*" in den Liniencoordinaten.

Es drängt sich hier naturgemäss die Frage auf, ob es möglich ist, ganz allgemein die formale Gestalt einer solchen invarianten Bildung zu charakterisiren, wie uns dies ja bei den Invarianten und Covarianten binärer Formen gelang. Dies ist nun in der That erreichbar; und zwar werden wir dazu durch Anwendung einer symbolischen Bezeichnungsweise geführt, welche der bei zwei homogenen Variabeln benutzten ganz analog ist, und welche daher wohl nur einer kürzeren Erörterung bedarf. Es beruht diese Symbolik darauf, dass wir eine ternäre Form n^{ter} Ordnung in den x oder u durch die n^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks ersetzen, so dass dieselbe in der Form

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x^n$$

bezüglich:

$$\varphi = (u_1 \alpha_1 + u_1 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^n = u_\alpha^m$$

erscheint. Die Functionalinvarianten einer Grundform sind dadurch, wie bei den binären Formen, auf diejenigen linearer Formen zurückzuführen. Von einem symbolischen Ausdrucke a_x^n einer solchen

*) Vgl. die letzte Abtheilung des vorliegenden Bandes.

**) Die Zahl derselben für eine Form n^{ter} Ordnung ist

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 9,$$

denn durch lineare Transformation kann man immer 9 von den $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coëfficienten der Form beliebig gegebene Werthe annehmen lassen. Vgl. die entsprechende Bestimmung für binäre Formen auf p. 249, und Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 62.

Bildung nämlich kann man zu dem wirklichen der betreffenden Form nur in eindeutig bestimmter Weise zurückkehren, wenn in jenem die Coëfficienten von a_x^n *linear* vorkommen. Ist nun die Bildung vom ϱ^{ten} Grade in den Coëfficienten von a_x^n, so können wir durch Anwendung des invarianten Processes:

$$(4) \qquad \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} b_i ,$$

wo die a_i die wirklichen Coëfficienten von f bedeuten, die b_i diejenigen einer andern Form f', welche von derselben Ordnung wie f in den Variabeln ist, aus Π eine andere invariante Function ableiten, welche vom $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grade in den Coëfficienten von f und vom ersten Grade in den Coëfficienten von f' ist. Durch $(\varrho - 1)$malige Wiederholung des angeführten Processes, wobei jedesmal die Coëfficienten einer neuen Grundform eingeführt werden, erhalten wir so schliesslich eine simultane invariante Function, welche die Coëfficienten einer jeden von ϱ verschiedenen Formen n^{ter} Ordnung linear enthält; und von der wir zu der ursprünglichen Function Π unzweideutig zurückgehen können,wenn wir successive die Symbole dieser verschiedenen Formen durch die wirklichen Coëfficienten der einen Grundform f ersetzen. Denkt man sich andererseits die verschiedenen Hülfsformen n^{ter} Ordnung durch Potenzen linearer Formen b_x^n, c_x^n, d_x^n etc. ersetzt, so ist Π als simultane Functionalinvariante linearer Formen dargestellt. So erscheint z. B. die Invariante eines Kegelschnittes $f = a_x^2 = 0$ als simultane Invariante dreier Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2. In der That setzen wir in der ersten Horizontalreihe der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{ik} = a_i a_k$, in der zweiten $a_{ik} = b_i b_k$, in der dritten $a_{ik} = c_i c_k$, so wird:

$$A = a_1 b_2 c_3 (abc) ,$$

oder wenn wir in der zweiten Reihe die a, in der dritten die b, in der ersten die c einführen und so alle möglichen Vertauschungen vornehmen:

$$6 A = (abc) \left\{ a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 \right\}$$
$$= (abc)^2 . -$$

Dass *der benutzte Differentationsprocess in der That die Invarianteneigenschaft der Function* Π *nicht ändert*, erkennt man in derselben Weise, wie den entsprechenden Satz bei binären Formen, denn der dort gegebene Beweis ist seinem Inhalte nach völlig unabhängig von

der Zahl der Veränderlichen (vgl. p. 183). Es sei nur bemerkt, dass man in die Form Π statt der b_i, wenn die a_i als Coëfficienten linearer Formen in Punktcoordinaten angesehen werden, auch die entsprechenden zweigliedrigen Unterdeterminanten aus Coëfficienten α, β von linearen Formen in Liniencoordinaten: u_α, u_β einführen kann; denn diese Unterdeterminanten verhalten sich ja bei linearen Transformationen, wie die a, oder b, d. h. ebenfalls wie Liniencoordinaten. Also *auch die Operation*

$$(5) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3) + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}(\alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1) + \frac{\partial \Pi}{\partial a_3}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

ändert die Invarianteneigenschaft nicht, wenn die a Coëfficienten linearer Ausdrücke in Punktcoordinaten waren. Dass ganz Analoges für eine Functionalinvariante einer Form n^{ter} Klasse $u_\alpha{}^n$ oder einer Zwischenform, sowie für simultane Systeme gilt, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

Durch diese symbolische Darstellung sind alle invarianten Bildungen auf solche von simultanen linearen Formen zurückgeführt. Wir brauchten also nur die symbolische Gestalt dieser letzteren zu untersuchen, um zur Beantwortung der gestellten Frage zu gelangen. Auf directerem Wege gelingt dies auch, wenn wir das folgende fundamentale Theorem voraussetzen, auf welches wir erst bei einer späteren Gelegenheit eingehen werden; dasselbe lautet:

*Ein System von beliebig vielen ternären Formen, deren jede mehrere Reihen von Punktcoordinaten $(x, y, \ldots)$ und Liniencoordinaten $(u, v, \ldots)$ enthält, kann stets durch ein „reducirtes äquivalentes System" ersetzt werden, d. h. durch ein anderes System von Formen, deren keine mehr, als eine Reihe Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten enthält, und dessen sämmtliche simultane covariante Bildungen mit denen des ursprünglichen Systems identisch sind;**) und zwar besteht dies reducirte System immer aus einer endlichen Anzahl von Formen. Ist z. B. eine ternäre Form gegeben, welche vom m^{ten} Grade in den x und vom n^{ten} in den y ist, so kann man dieselbe durch ein reducirtes äquivalentes System von drei Formen ersetzen. Stellen wir die gegebene Form symbolisch durch

$$f = a_x{}^m b_y{}^n = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^m (b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3)^n$$

dar, wo dann erst das Product von je m Symbolen a und je n Symbolen b durch einen wirklichen Coëfficienten zu ersetzen ist, so wird das verlangte zu f äquivalente System gegeben durch:

---

*) Vgl. Clebsch: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 17, 1872; und die letzte Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$\varphi = a_x^m b_x^n, \quad \varphi_1 = a_x^{m-1} b_x^{n-1} (a b u), \quad \varphi_2 = a_x^{m-2} b_x^{n-2} (a b u)^2.$$

Dabei bedeutet wieder $(a b u)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Ist nun eine beliebige Function Π mit der Invarianteneigenschaft gegenüber einem beliebigen simultanen Systeme von ternären Formen gegeben, so können wir dieselbe mittelst der Processe (4), (5) symbolisch darstellen, als wenn dieselbe aus einem bestimmten Systeme linearer Formen abgeleitet sei. Die Coëfficienten linearer Formen, in denen die x variabel sind, können wir aber geradezu als Liniencoordinaten ansehen, da sie sich bei linearen Transformationen ebenso verhalten, und in gleicher Weise können wir die Coëfficienten der linearen Formen von der Gestalt u_α als Punktcoordinaten betrachten. Die Function Π kann also als eine Form angesehen werden, welche neben reinen Zahlen nur verschiedene Reihen der Coordinaten beider Arten enthält. Nach dem angeführten Satze über äquivalente Systeme muss daher Π auch als covariante Bildung aus einem Systeme von Formen ableitbar sein, von denen jede ausser *rein numerischen* Coëfficienten nur *eine* Reihe von Punkt- und *eine* Reihe von Liniencoordinaten enthält. Eine Form der letzteren Art kann aber, wie wir sogleich nachweisen werden, nur eine Potenz von $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ sein. Es wird ferner in der Theorie der äquivalenten Systeme gezeigt, dass man die Formen des ursprünglich gegebenen Systems als simultane Invarianten aus denen des reducirten Systems ableiten kann, indem man auf letztere die Operationen (4), (5) in passender Weise anwendet und die so gebildeten Formen, multiplicirt mit bestimmten Zahlencoëfficienten, addirt. Es muss daher die Invariante Π in derselben Weise aus Ausdrücken von der Form u_x^m, v_y^n etc. entstehen. Die erwähnten Operationen, auf diese identischen Covarianten angewandt, liefern aber immer nur Formen, welche sich aus Factoren von dem Typus

$$u_x \, u_y \, v_x \, v_y \, (u v w) \, (x y z)$$

zusammensetzen; also ist Π als Aggregat von Producten solcher Bildungen und numerischer Coëfficienten darstellbar.

Wir haben nur noch nachträglich zu beweisen, *dass jede Functionalinvariante, welche ausser reinen Zahlen nur eine Reihe Punkt- und eine Reihe Liniencoordinaten enthält, eine Potenz von u_x, also von der Form u_x^λ sein muss.* Die gegebene Functionalinvariante sei:

$$\Pi\,(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3);$$

in ihr können wir die Coordinaten der Geraden u durch die Unterdeterminanten aus denen zweier ihrer Punkte ersetzen, nämlich:

$$u_1 = y_2 z_3 - z_2 y_3\,, \quad u_2 = y_3 z_1 - z_3 y_1\,, \quad u_3 = y_1 z_2 - z_1 y_2\,.$$

Nach dieser Substitution wenden wir auf die Function $\Pi(x, u)$ die folgende specielle lineare Transformation an:

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1 T_1 + y_1 T_2 + z_1 T_3 \\ t_2 &= x_2 T_1 + y_2 T_2 + z_2 T_3 \\ t_3 &= x_3 T_1 + y_3 T_2 + z_3 T_3\,, \end{aligned}$$

wobei die t_i die laufenden Coordinaten sein mögen, und die T_i die entsprechenden für das neue Coordinatensystem. Bezeichnen wir durch X, Y, Z die neuen Coordinaten für die Punkte x, y, z, so ergeben sich für dieselben, indem man t bez. mit x, y, z identisch setzt, die Werthe:

$$\begin{aligned} &X_1 = 1\,, \quad X_2 = 0\,, \quad X_3 = 0 \\ (6) \qquad &Y_1 = 0\,, \quad Y_2 = 1\,, \quad Y_3 = 0 \\ &Z_1 = 0\,, \quad Z_2 = 0\,, \quad Z_3 = 1\,, \end{aligned}$$

und hieraus für die der Linie u entsprechenden Coordinaten:

$$U_1 = 1\,, \quad U_2 = 0\,, \quad U_3 = 0.$$

Nun ist zufolge unserer Definition einer Functionalinvariante

$$(7) \qquad \Pi = r^\lambda \Pi'\,,$$

wenn Π' die Function Π, gebildet für die neuen Coordinaten, und r die Transformationsdeterminante bedeutet. Letztere ist in unserem Falle

$$r = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (xyz)\,,$$

und somit geht wegen (6) die Gleichung (7) über in:

$$\Pi(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3) = (xyz)^\lambda\, \Pi(1, 0, 0;\ 1, 0, 0)\,.$$

Rechts steht jetzt aber wegen der über die Natur von Π gemachten Annahme neben der Potenz von u_x ein reiner Zahlenfactor; bezeichnen wir denselben also mit c und führen statt der Coordinaten von y und z wieder die ihrer Verbindungslinie ein, so wird:

$$\Pi(x_1, x_2, x_3;\ u_1, u_2, u_3) = u_x^\lambda \,.\, c\,.$$

Und damit ist unsere Behauptung bewiesen, denn die angewandte Transformation ist der Definition nach auf die Natur einer Invariante ohne Einfluss.

Wir können daher nunmehr das folgende wichtige Theorem aussprechen:

Jede invariante Bildung eines Systems von ternären Formen kann als ein Aggregat symbolischer Producte dargestellt werden, deren Factoren identische Invarianten der Form u_x, (xyz) oder (uvw) sind.

Wir wollen die symbolische Darstellung der Formen zunächst verwerthen, um die Natur solcher Functionen festzustellen, durch deren Verschwinden Eigenschaften des Systems von Grundformen gegeben werden, welche bei allen Collineationen erhalten bleiben, und um uns so zu überzeugen, dass dazu die oben erwähnten Functionalinvarianten genügen. Der Einfachheit wegen werden wir nur *eine* Grundform $f = a_x^n = b_x^n$ als gegeben voraussetzen: man erkennt sofort, dass ganz dieselben Schlüsse für Systeme von beliebig vielen Formen gültig sind, unter denen dann auch Contravarianten und Zwischenformen enthalten sein können.

Man übersieht nun sofort, *dass eine einzelne Bedingung der Art nur durch das Verschwinden einer Invariante dargestellt werden kann.**) Ist nämlich Π (die Function, deren Verschwinden die besagte Bedingung liefert) Invariante, und Π' eine daraus durch Collineation hervorgehende, so muss $\Pi' = 0$ sein, *sobald* $\Pi = 0$ und *nur*, wenn $\Pi = 0$; also hat man

$$\Pi' = c \,.\, \Pi\,,$$

wo c nur von den Substitutionscoëfficienten abhängt. Um nun Π als Invariante zu erkennen, haben wir zu zeigen, dass c eine Potenz der Determinante r ist. Da wir es aber nur mit ganzen, algebraischen Functionen zu thun haben, so können wir wieder die schon gelegentlich bei den Kegelschnitten benutzte Schlussweise anwenden (vgl. p. 130) und erhalten so unmittelbar:

$$\Pi' = r^\lambda \,.\, \Pi\,, \text{ q. e. d.}$$

Genügt die Form f jedoch gleichzeitig mehreren Bedingungen**):

$$\Pi_1 = 0\,, \quad \Pi_2 = 0\,, \quad \Pi_3 = 0\,\ldots,$$

wo die Π_i keine Veränderliche enthalten, so lässt sich zeigen, dass dieselben dadurch erhalten werden können, dass man die Coëfficienten einer (oder mehrerer) von den Variabeln abhängigen Functionalinvariante von f einzeln Null setzt, wie wir dies schon bei den binären cubischen und biquadratischen Formen gesehen haben (vgl. p. 228 und p. 241). Denken wir uns nämlich einen Ausdruck Π_1 symbolisch dargestellt, so wird derselbe neben Factoren vom Typus (abc), welche unmittelbar die Invarianteneigenschaft haben, noch einzelne Symbole a_i, b_k oder zweigliedrige symbolische Determinanten vom Typus $a_i b_k - b_i a_k$ als Factoren enthalten, d. h. es wird:

---

*) Vgl. Aronhold: Crelle's Journal, Bd. 63, p. 302.

**) Vgl. im Folgenden Gram: Math. Annalen, Bd. 7, p. 230.

$$\Pi_1 = \Pi \left\{ (abc)^\varrho \ldots a_i^\lambda b_k^\mu \ldots (a_i b_k - b_i a_k)^\nu \ldots \right\}.$$

Das System der Functionen Π_i soll nun durch eine Collineation in das System der entsprechenden Functionen Π_i' übergehen, wobei jedoch nicht nöthig ist, dass jede Function Π_i einzeln in die entsprechende Π_i' übergeführt wird. Wir wenden dazu insbesondere diese specielle lineare Transformation an:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1 x_3, & u_1 &= \xi_1 U_1 + \xi_2 U_2 + \xi_3 U_3, \\
X_2 &= \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2 x_3, & u_2 &= \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2 + \eta_3 U_3, \\
X_3 &= \xi_2 x_1 + \eta_3 x_2 + \zeta_3 x_3; & u_3 &= \zeta_1 U_1 + \zeta_2 U_2 + \zeta_3 U_3,
\end{aligned}$$

wo die ξ_i, η_i, ζ_i Coordinaten beliebiger fester Punkte bedeuten, oder aufgelöst, wenn v, w, t bez. die Coordinaten der Verbindungslinien $\overline{\eta\zeta}$, $\overline{\zeta\xi}$, $\overline{\xi\eta}$ sind (z. B. $v_1 = \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2$) und $r = (\xi\eta\zeta)$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
r x_1 &= v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3, & r U_1 &= v_1 u_1 + w_1 u_2 + t_1 u_3, \\
r x_2 &= w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3, & r U_2 &= v_2 u_1 + w_2 u_2 + t_2 u_3, \\
r x_3 &= t_1 X_1 + t_2 Y_2 + t_3 X_3, & r U_3 &= v_3 u_1 + w_3 u_2 + t_3 u_3.
\end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass sich die Symbole a_i bei der Transformation verhalten wie die u_i, also die zweigliedrigen Determinanten aus den a und b, wie die entsprechenden Determinanten aus zwei Reihen Liniencoordinaten, d. h. wie Punktcoordinaten. Bezeichnen wir also mit a', b' ... die Symbole der aus f durch unsere Transformation entstehenden Form, so wird z. B.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \xi_1 a_1' + \xi_2 a_2' + \xi_3 a_3' = a_\xi' \\
(ab)_2 &= (a_3 b_1 - b_3 a_1) \\
&= \frac{1}{r}\left[w_1 (a'b')_1 + w_2 (a'b')_2 + w_3 (a'b')_3\right] = \frac{1}{r}(a'b'w).
\end{aligned}$$

Die Function Π_i' enthält also nur noch symbolische Factoren, deren Invarianteneigenschaft evident ist, und welche noch von den *völlig willkürlichen* Grössen ξ, η, ζ, v, w, t abhängen; und Π_i' muss *unabhängig* von den Werthen der letzteren verschwinden, sobald alle Π_i Null sind. Wir können also insbesondere setzen:

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \eta_i = \zeta_i = X_i, \\
v_i &= w_i = t_i = U_i,
\end{aligned}$$

und dann ist Π_i' von der Form

$$\Pi \left\{ (a'b'c')^\varrho \ldots a_x'^\lambda b_x'^\mu \ldots (a'b'U)^\nu \ldots \right\},$$

also eine *Zwischenform;* und man muss das System der Gleichungen $\Pi_i' = 0$ erhalten, welches dem Systeme der Π_i (oder einem Theile desselben) entspricht, wenn man die einzelnen Coëfficienten dieser Zwischenform gleich Null setzt. Dann folgt aber, dass sich auch die

Functionen Π_i als Coëfficienten einer Zwischenform auffassen lassen; und wir haben das folgende Theorem (wodurch dann gleichzeitig der entsprechende Satz für binäre Formen bewiesen ist, vgl. p. 174):

*Alle invarianten Eigenschaften einer ternären Form können durch Verschwinden von Invarianten oder durch identisches Verschwinden von Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen derselben dargestellt werden.**) —

An die symbolische Darstellung der Formen knüpfen sich ferner die folgenden Erörterungen. Wir hoben schon früher hervor, dass auf derselben bei den binären Formen hauptsächlich der Beweis des Gordan'schen Satzes von der Endlichkeit der Formensysteme beruht. Einen entsprechenden Satz für ternäre Formen aufzustellen, ist jedoch im Allgemeinen nicht gelungen; nur für die quadratischen und cubischen Formen**) ist der Beweis eines solchen geliefert. Ferner liefert uns die Symbolik hier ein Princip, auf das wir bereits oben hinwiesen, und nach welchem es möglich ist, alle für binäre Formen bekannten Sätze sofort für ternäre Bildungen zu verwerthen, und so eine gewisse Klasse von Invarianten auch geometrisch leicht zu interpretiren, sobald dies für die entsprechenden binären Formen geschehen ist.

Man wird zu diesem *Uebertragungsprincipe* naturgemäss durch das Studium des Schnittpunktsystems einer Geraden mit einer gegebenen Curve geführt. Bekanntlich wird eine Curve n^{ter} Ordnung von einer Geraden in n Punkten geschnitten (vgl. p. 53). Dieselben werden im Allgemeinen keine besondere Eigenschaft haben, d. h. keine, welche durch das Verschwinden einer bestimmten Invariante der das Schnittpunktsystem auf der Geraden repräsentirenden binären Form gegeben ist. Dies kann jedoch sehr wohl bei besonderen Lagen der betrachteten Geraden eintreten. So wird z. B. für eine Tangente der Curve, die ja dadurch definirt ist, dass zwei ihrer n Schnittpunkte in den Berührungspunkt zusammenfallen, die Discriminante der betreffenden binären Form n^{ter} Ordnung verschwinden; und so kann man bei

*) Betrachtet man alle ternären Formen als identisch, welche aus einander durch lineare Transformationen hervorgehen, so ist nach diesem Satze eine ternäre Form durch das Verschwinden gewisser Functionalinvarianten völlig definirt, d. h. bestimmt bis auf solche Formen, die aus ihr eben durch lineare Transformationen hervorgehen; und hieraus folgt sofort der Satz: *Zwei ternäre Formen können linear in einander transformirt werden, sobald für beide dieselben Relationen zwischen den Functionalinvarianten bestehen;* (die Gleichheit der absoluten Invarianten ist in dieser Bedingung mit eingeschlossen).

**) Vgl. hierüber Gordan: Ueber ternäre Formen dritten Grades, Math. Annalen, Bd. 1, p. 90. Zufolge einer Mittheilung an den Herausgeber hat Gordan die Endlichkeit des Systems auch für ternäre Formen 4. Ordnung bewiesen und das vollständige System einer solchen Form aufgestellt.

einer Curve vierter Ordnung nach denjenigen Geraden fragen, deren vier Schnittpunkte mit der Curve ein Doppelverhältniss von gegebenem Werthe bestimmen. Es kommt also bei derartigen Fragen nur darauf an, die zugehörigen binären Formen für die Schnittpunktsysteme herzustellen; und dies geschieht einfach, indem wir den beweglichen Punkt x der Geraden in bekannter Weise mittelst eines Parameters $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ als Function zweier Punkte y und z derselben darstellen. Wir setzen also (unter Vernachlässigung des das Folgende nicht beeinflussenden Proportionalitätsfactors):

$$x_1 = \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1$$
$$x_2 = \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2$$
$$x_3 = \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3 ,$$

wo dann $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die binären Coordinaten des Punktes x auf der Verbindungslinie von y und z vorstellen; und zwar sind die letzteren Punkte die Grundpunkte dieser Coordinatenbestimmung (vgl. p. 171).

Führen wir diese Ausdrücke von x in die Gleichung der Curve ein, welche durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = b_x^n = 0$$

gegeben sein mag, so sind die Schnittpunkte der Linie $\overline{yz}$ bestimmt durch die n Wurzeln $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ der Gleichung:

$$f = [\varkappa_1 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \varkappa_2 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)]^n$$
$$= (\varkappa_1 a_y + \varkappa_2 a_z)^n = 0 .$$

Bezeichnen wir daher die symbolischen Ausdrücke a_y, a_z kurz bez. durch α_1, α_2, so erhalten wir eine binäre Form

$$\varphi = (\varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2)^n = \alpha_\varkappa^n = \beta_\varkappa^n = \ldots$$

welche geometrisch auf der Linie $\overline{yz}$ durch die n Schnittpunkte mit der gegebenen Curve $f = 0$ repräsentirt ist. Eine einzelne projectivische Eigenschaft dieses Punktsystems ist nun durch das Verschwinden einer Invariante der binären Form φ bedingt.*) Eine solche Inva-

*) Es gibt zweifach unendlich viele Linien in der Ebene. Stellen wir also *eine* Bedingung für das Schnittpunktsystem, so wird es noch einfach unendlich viele Gerade geben, die ihr genügen. Dagegen gibt es nur eine endliche Anzahl von Geraden, welche gleichzeitig zwei Bedingungen genügen. *Eine* Bedingung wird nun im binären Gebiete immer durch das Verschwinden einer Invariante dargestellt, und die entsprechenden Geraden der Ebene umhüllen dann nach den Entwicklungen des Textes eine Curve (Contravariante). Fügt man nun als zweite Bedingung das Verschwinden einer zweiten binären Invariante hinzu, so werden die *beiden* Bedingungen genügenden Geraden der Ebene durch die *Gesammtheit* der gemeinsamen Tangenten zweier Curven gegeben. Werden dagegen die bei-

riante besteht nach den Sätzen über binäre Formen aus einem Aggregate von Producten, deren einzelne Factoren durch symbolische Determinanten von der Form $(\alpha\beta) = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ gegeben sind. Stellen wir sie demnach dar durch

$$I = \Sigma c \Pi (\alpha\beta),$$

wo die c die etwa hinzutretenden Zahlenfactoren bezeichnen mögen, so wird, wenn wir die α, β wieder durch ihre Ausdrücke in y, z ersetzen, eine Invarianteneigenschaft des Schnittpunktsystems gegeben durch eine Gleichung von der Form:

$$I = \Sigma c \Pi (a_y b_z - b_y a_z) = 0.$$

Hier können wir schliesslich die Liniencoordinaten u leicht einführen; denn es ist:

$$\begin{aligned} a_y b_z - b_y a_z &= (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_2 y_3)(b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3) \\ &\quad - (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3)(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3) \\ &= (a_1 b_2 - b_1 a_2)(y_1 z_2 - z_1 y_2) + (a_2 b_3 - b_2 a_3)(y_2 z_3 - z_2 y_3) \\ &\quad + (a_3 b_1 - b_3 a_1)(y_3 z_1 - z_3 y_1), \end{aligned}$$

oder da die Unterdeterminanten der y, z zu den Coordinaten u ihrer Verbindungslinie proportional sind, wenn wir den Proportionalitätsfactor vernachlässigen:

$$a_y b_z - b_y a_z = (abu).$$

Die Bedingung dafür, dass das Schnittpunktsystem einer Linie u mit der Curve $f = 0$ die Invarianteneigenschaft

$$\Sigma c \Pi (\alpha\beta) = 0$$

habe, ist also gegeben durch die Gleichung:

$$\Sigma c \Pi (abu) = 0;$$

dieselbe stellt dann eine von den betreffenden Linien u umhüllte Curve dar, deren Klasse gleich der Anzahl der symbolischen Determinantenfactoren in einem Gliede der binären Invariante Π ist. Wir können den durch diese Entwicklungen gefundenen einfachen und äusserst fruchtbaren Satz in folgender Weise aussprechen:

Soll eine Gerade eine Curve n^{ter} Ordnung in einer Punktgruppe schneiden, welche eine besondere projectivische Eigenschaft besitzt, so erhält man

---

den binären Bedingungen durch das identische Verschwinden einer Covariante dargestellt, so sind die entsprechenden Geraden durch die gemeinsamen Tangenten eines Systems von Curven gegeben, wo dann je *zwei* Curven des Systems ausserdem noch andere Tangenten gemein haben. Ein Beispiel wird sogleich unten angeführt werden. Es sei hier nur bemerkt, dass sich z. B. drei Gerade der Ebene am einfachsten als die gemeinsamen Tangenten eines zweifach unendlichen Systems von Kegelschnitten darstellen, in dem je zwei Curven noch eine bewegliche Tangente gemein haben.

*die Gleichung der von der Geraden umhüllten Curve in folgender Weise: Man stelle die Invariante der binären Form n^{ter} Ordnung, deren Verschwinden die geforderte Eigenschaft aussagt, symbolisch dar und ersetze jede in ihr vorkommende zweigliedrige Determinante (ab) durch eine dreigliedrige (abu), wo die u Liniencoordinaten und die a, b . . . Symbole der gegebenen ternären Form bedeuten.**)

Einige Beispiele mögen dazu dienen, die Fruchtbarkeit dieses Satzes zu erweisen, sowie die Art von Problemen zu kennzeichnen, deren Lösung durch denselben im Principe geleistet ist.

Stellen wir uns zunächst die schon anderweitig behandelte Aufgabe, einen Kegelschnitt:

$$a_x^2 = b_x^2 = 0$$

in Liniencoordinnten darzustellen. Derselbe wird von einer Geraden u, wenn wir uns der obigen Bezeichnungen bedienen, in einem Punktepaare getroffen, das durch die Gleichung

$$\alpha_\varkappa^2 = (\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha_2 \varkappa_1)^2 = 0$$

gegeben ist. Für eine Tangente müssen die beiden Punkte zusammenfallen, d. h. die Discriminante der Form $\alpha_\varkappa^2$:

$$(\alpha\beta)^2$$

verschwinden. *Die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten ist daher symbolisch* dargestellt durch:

$$(abu)^2 = 0.$$

Man kann leicht die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der früher gegebenen nachweisen. Ist nämlich entsprechend unserer sonstigen Bezeichnung:

$$a_x^2 = b_x^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1,$$

so haben wir in $(abu)^2$ zu setzen:

$$a_i a_k = b_i b_k = a_{ik}.$$

Die Entwicklung der symbolischen Determinante ergibt dann:

$$\begin{aligned}(abu)^2 &= u_1^2 (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + u_2^2 (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + u_3^2 (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ &\quad + 2u_2u_3 (a_3b_1 - b_3a_1)(a_1b_2 - b_1a_2) + 2u_3u_1 (a_1b_2 - b_1a_2)(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad + 2u_1u_2 (a_2b_3 - b_2a_3)(a_3b_1 - b_3a_1), \\ &= 2u_1^2 (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + \ldots + 4u_2u_3 (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) + \ldots,\end{aligned}$$

oder wie man leicht übersieht:

---

*) Dieser Satz lässt sich auf beliebig viele Veränderliche ausdehnen und wurde in dieser Form von Clebsch gegeben in der erwähnten Abhandlung im 59. Bd. von Crelle's Journal.

$$(abu)^2 = -2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

In ähnlicher Weise lässt sich allgemein die Gleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve in Liniencoordinaten darstellen, wenn man von der Discriminante der entsprechenden binären Form ausgeht, worauf wir sogleich zurückkommen werden. Wir erwähnen hier zuvor noch die folgenden Beispiele:

Die Discriminante einer binären cubischen Form

$$a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = d_x^3$$

war gegeben durch

$$(ab)^2 (cd)^2 (ac) (bd),$$

und es ist daher die Bedingung dafür, dass eine Linie u eine Curve dritter Ordnung

$$a_x^3 = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = 0$$

in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, oder *die Gleichung der Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten:*

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = 0,$$

wo b, c, d mit a gleichwerthige Symbole sind.

Die allgemeine Curve dritter Ordnung ist also von der sechsten Klasse.

Die Discriminante der binären biquadratischen Form

$$a_x^4 = b_x^4 = \dots$$

war dargestellt durch

$$i^3 - 6 j^2,$$

wo $i = (ab)^4$, $j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2$; es ist daher *die Gleichung der Curve vierter Ordnung*

$$a_x^4 = 0$$

in Liniencoordinaten:

$$I^3 - 6 J^2 = 0,$$

wenn man setzt:

$$I = (abu)^4$$
$$J = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2.$$

Die allgemeine Curve vierter Ordnung ist somit von der zwölften Klasse.

Da man nun allgemeine Methoden hat, um die Discriminante einer binären Form zu bilden (vgl. p. 192), so kann man auch die Liniencoordinatengleichung einer jeden in Punktcoordinaten gegebenen Curve aufstellen. Insbesondere kann man also auch die Klasse einer

Curve n^{ter} Ordnung sowie den Grad der Liniengleichung in den Coëfficienten allgemein angeben.*) Die Discriminante einer binären Form n^{ter} Ordnung nämlich ist vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten derselben, enthält also $2(n-1)$ verschiedene, einander gleichwerthige Symbole, von denen jedes zur n^{ten} Dimension vorkommt. Diese Verhältnisse werden aber nicht geändert, wenn man eine binäre Determinante (ab) durch die ternäre (abu) ersetzt; also:

Die Liniencoordinatengleichung einer Curve n^{ter} Ordnung ist vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten ihrer Punktcoordinaten-Gleichung.

Ferner wissen wir (vgl. p. 195), dass eine binäre Invariante vom Grade r in den Coëfficienten einer Form s^{ter} Ordnung immer $\frac{1}{2} rs$ symbolische Determinantenfactoren enthält. In unserer Discriminante kommen daher $n(n-1)$ Factoren vom Typus (ab) vor; und da bei Anwendung des Uebertragungsprincips aus jedem solchen Factor ein in den u linearer Ausdruck wird, so folgt:

Eine Curve n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen von der Klasse $n(n-1)$. —

Wir kehren zu dem zuletzt von uns behandelten Beispiele zurück. Das Verschwinden der Discriminante einer binären biquadratischen Form ist nur ein specieller Fall davon, dass die absolute Invariante derselben $\frac{i^3}{j^2}$ einen gegebenen Werth hat, d. h. dass die vier Punkte ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden. Dem entsprechend ist nach unserem Uebertragungsprincipe durch die Gleichung

$$I^3 - kJ^2 = 0,$$

wenn man k als Parameter auffasst, ein System von einfach unendlich vielen Curven zwölfter Klasse gegeben, deren jede die Eigenschaft hat, dass alle ihre Tangenten die gegebene Curve vierter Ordnung in einem Punktquadrupel mit gewissem Doppelverhältnisse trifft; und zwar bestimmt sich letzteres (α) mittelst der Gleichung (vgl. p. 239)

$$k = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(1-2\alpha)^2(2-\alpha)^2}$$

in bekannter Weise durch den Parameter k. Geben wir demselben insbesondere die Werthe 0 und ∞, so erhalten wir bez. die folgenden Sätze:

Die geraden Linien, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung

$$a_x^4 = 0$$

nach äquianharmonischem Doppelverhältnisse schneiden, umhüllen eine Curve vierter Klasse:

---

*) Die folgende Abzählung bezieht sich zunächst nur auf den Fall, dass die Curve keine sogenannte „mehrfachen Punkte“ besitzt; vgl. hierüber die folgende Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$I = (abu)^4 = 0.$$

*Die Linien, welche jene Curve nach harmonischem Doppelverhältnisse schneiden, umhüllen eine Curve sechster Klasse:**)

$$J = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 = 0.$$

*) Indem wir der Entwicklung des Textes vorgreifen und die Begriffe einer Wende- und Doppeltangente voraussetzen (vgl. die folgende Abtheilung), knüpfen wir hier im Anschlusse an die Anmerkung auf p. 275 folgende Bemerkungen an. — Die Curve $a_x^4 = 0$ hat eine endliche Anzahl von Wendetangenten, d. h. Tangenten, welche die Curve in drei successiven Punkten treffen. Für eine solche muss die ihrem Schnittpunktsysteme entsprechende binäre Form eine dreifache Wurzel haben, d. h. es muss gleichzeitig $i = 0$ und $j = 0$ sein (vgl. p. 240). Das Uebertragungsprincip gibt also den Satz:

Die Wendetangenten der Curve 4ter Ordnung sind die gemeinsamen Tangenten der Curven

$$I = (abu)^4 = 0, \qquad J = (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 = 0;$$

ihre Zahl ist also 24.

Stellt man das entsprechende Problem bei Curven dritter Ordnung, so müsste die entsprechende binäre cubische Form $a_\varkappa^3$ ein vollständiger Cubus sein, d. h. ihre Hesse'sche Form $\Delta = (ab)^2 a_\varkappa b_\varkappa$ *identisch* verschwinden. Sind nun allgemein zwei Bedingungen für das Schnittpunktsystem durch das identische Verschwinden einer binären Coonvariante:

$$\Pi\, (ab)\, a_\varkappa b_\varkappa = 0$$

gegeben, so geht diese Gleichung bei Anwendung des Uebertragungsprincips, wenn man wieder $\varkappa_1 y_i + \varkappa_2 z_i$ durch x_i ersetzt, über in:

$$\Pi\, (abu)\, a_x b_x = 0,$$

wo nun x *irgend* ein Punkt auf der Linie u ist. Der letzteren Bedingung geben wir Ausdruck durch die Substitution:

$$x_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3, \quad x_2 = u_3 v_1 - v_3 u_1, \quad x_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2,$$

wo die v_i ganz willkürliche Grössen sind. Dann erhalten wir den Satz:

Soll für das Schnittpunktsystem einer Linie u mit einer Curve $a_x^n = 0$ eine binäre Covariante $\Pi\, (ab)\, a_\varkappa b_\varkappa$ identisch verschwinden, so wird u von allen Curven des zweifach unendlichen Systems (mit den Parametern $v_1 : v_2 : v_3$):

$$\Pi\, (abu)\, (auv)\, (buv) = 0$$

berührt.

Insbesondere folgt für das beregte Beispiel:

Die Wendetangenten einer Curve 3ter Ordnung $a_x^3 = 0$ sind die gemeinsamen Tangenten des Systems von Curven 4ter Klasse:

$$(abu)^2 (auv) (buv) = 0.$$

Da ferner für eine binäre biquadratische Form f die Bedingung für das Auftreten zweier Doppelwurzeln durch das identische Verschwinden der Covariante $iH - jf$ gegeben ist, so haben wir:

Die Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $a_x^4 = 0$ sind die gemeinsamen Tangenten des Systems von Curven 10ter Klasse:

$$(abu)^4 (cdu)^2 (cuv)^2 (duv)^2 - (abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 (duv)^4 = 0.$$

— Vgl. hierüber: Gundelfinger, Math. Annalen, Bd. 6, p. 16.

Ganz dasselbe Princip findet auch auf die simultanen Invarianten mehrerer binärer Formen Anwendung. Sind z. B. zwei quadratische Formen gegeben:

$$a_x^2 \quad \text{und} \quad \alpha_x^2,$$

so werden dieselben durch zwei Punktepaare repräsentirt, deren Doppelverhältniss α sich durch die Gleichung

$$D'^2 (\alpha - 1)^2 - D D'' (\alpha + 1)^2 = 0$$

bestimmt (vgl. p. 217), wo D' die simultane Invariante $(a\alpha)^2$, D und D'' bez. die Invarianten $(ab)^2$, $(\alpha\beta)^2$ bedeuten. Hieraus ergibt unser Uebertragungsprincip sofort den Satz:

Die geraden Linien, deren Schnittpunkte mit zwei Kegelschnitten:

$$a_x^2 = 0 \quad \textit{und} \quad \alpha_x^2 = 0$$

ein bestimmtes Doppelverhältniss α bilden, umhüllen eine Curve vierter Klasse, gegeben durch die Gleichung

$$D'^2 (\alpha - 1)^2 - D D'' (\alpha + 1)^2 = 0,$$

wenn man setzt:

$$D' = (a\alpha u)^2, \quad D = (abu)^2, \quad D'' = (\alpha\beta u)^2.$$

Diese Curve besteht insbesondere aus dem doppelt zählenden Kegelschnitte

$$(a\alpha u)^2 = 0,$$

wenn das erwähnte Doppelverhältniss harmonisch sein soll.

Ebenso können wir auch *die Gleichung des Productes der vier Schnittpunkte beider Kegelschnitte* in symbolischer Form unmittelbar hinschreiben. Soll die Linie u durch einen dieser Punkte gehen, so müssen die beiden binären Formen a_x^2 und α_x^2 einen linearen Factor gemein haben, und die Bedingung dafür ist, unter D, D', D'' die bekannten binären Invarianten verstanden, nach Früherem:

$$D'^2 - D D'' = 0.$$

Dieselbe Gleichung stellt daher auch das Product der vier Schnittpunkte dar, wenn wir unter D, D', D'' die erwähnten, eine Reihe u enthaltenden dreigliedrigen Determinanten verstehen.

In derselben Weise lässt sich allgemein die Gleichung der Schnittpunkte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung

$$a_x^m = 0, \quad \alpha_x^n = 0$$

angeben. Man hat die Resultante der binären Formen a_x^m, α_x^n symbolisch zu bilden und durch Hinzufügen von u die einzelnen symbolischen Determinanten zu dreigliedrigen zu ergänzen. Wir können aus diesem Bildungsgesetze der Gleichung die Klasse derselben und also die Zahl der Schnittpunkte beider Curven ableiten. Die binäre

Resultante nämlich ist vom n^{ten} Grade in den Coëfficienten von a_x^m, enthält also n verschiedene Symbole $a, b, c \ldots$, von denen jedes m-mal vorkommt; im Ganzen enthält sie also mn linear vorkommende Grössen $a, b, c \ldots$ und ebensoviele Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Von diesen $2mn$ Grössen werden je zwei in einen Determinantenfactor vereinigt: die Resultante besteht also aus $m \cdot n$ symbolischen Determinantenfactoren (vgl. p. 195); und somit wird die Gleichung der Schnittpunkte von der Klasse mn. Es folgt also der unter dem Namen des Bézout'schen Theorems*) bekannte Satz:

Zwei Curven von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung schneiden sich in mn Punkten. Dieselben sind natürlich nicht nothwendig alle reell.

Die besprochenen Beispiele werden genügen, um die ausserordentliche Fruchtbarkeit des aufgestellten Uebertragungsprincipes vorläufig darzulegen;**) wir werden dasselbe überdies in unseren weiteren Betrachtungen wiederholt anzuwenden haben. Gleichzeitig zeigen sie uns aber die grossen Vortheile, welche unsere symbolische Darstellung mit sich führt; in der That braucht man nur einen Blick auf die entsprechenden wirklich ausgerechneten Bildungen zu werfen, um sich von der unübersichtlichen Weitläufigkeit derselben zu überzeugen. Auch bei unseren weiteren geometrischen Untersuchungen wird uns diese Symbolik wesentliche Erleichterungen bieten; wir stellen daher hier einige identische Gleichungen zusammen, die oft zur Umformung symbolischer Ausdrücke von grossem Nutzen sind.

---

*) Vgl. Bézout: Théorie générale des équations algébriques, 1769. Es werden hier die Gleichungen der beiden Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung in der Form

$$f(\overset{p}{x}, \overset{q}{y}) = 0, \qquad \varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0$$

angenommen, wo f, φ bez. vom p^{ten}, r^{ten} Grade in x und vom q^{ten}, s^{ten} Grade in y sind; alsdann wird für die Schnittpunkte die Zahl angegeben:

$$m \cdot n - (m-p)(n-r) - (m-q)(n-s).$$

Die an der Zahl des Textes angebrachte Reduction rührt daher, dass die Curven $f = 0$, $\varphi = 0$ in der angenommenen Form auf der X-Axe einen $(m-p)$-, bez. $(n-r)$-fachen, auf der Y-Axe einen $(m-q)$-, bez. $(n-s)$-fachen Punkt haben, und dass die in diese Punkte fallenden Schnittpunkte nicht mitgezählt sind. Will man nur die Zahl der im Endlichen liegenden Schnittpunkte haben, so hat man von obiger Zahl noch die der sonst etwa auf der unendlich fernen Geraden gelegenen abzuziehen. — Es sei bemerkt, dass sich das Bézout'sche Theorem auch sehr einfach mittelst des Chasles'schen Correspondenzprincips (p. 210) beweisen lässt; vgl. Chasles: Comptes rendus, t. 75, 1872.

**) Vgl. noch besonders die Anwendungen dieses Princips auf die Theorie der binären Formen fünfter Ordnung in der Arbeit von Clebsch: Das Fünfseit und die Gleichung fünften Grades; Math. Annalen, Bd. 4, p. 284. In Betreff der oben erwähnten Curven $I^3 - kJ^2 = 0$ wird hier beiläufig gezeigt, dass sie in sechs Kegelschnitte zerfallen, wenn die gegebene Curve 4. Ordnung aus vier geraden Linien besteht.

Offenbar verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_x \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_x \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_x \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_x \end{vmatrix}$$

identisch, denn indem man die ersten drei Verticalreihen bez. mit x_1, x_2, x_3 multiplicirt und von der letzten abzieht, verschwinden alle Glieder dieser Reihe. Die Entwicklung der Determinante gibt uns daher die Identität:

$$\text{(I)} \qquad (abc)\, d_x - (abd)\, c_x + (acd)\, b_x - (bcd)\, a_x = 0.$$

Man kann dieselbe leicht dem Gedächtnisse einprägen, wenn man bemerkt, dass die drei Buchstaben in den einzelnen Determinanten immer auf einander nach dem Alphabete folgen, und das Vorzeichen abwechselnd positiv und negativ ist. Aus dieser Gleichung leiten wir eine andere ab, indem wir die x durch die zweigliedrigen Determinanten der Grössen

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix}$$

ersetzen. Es ist dann identisch

$$\text{(II)} \quad (abc)\,(def) - (abd)\,(cef) + (acd)\,(bef) - (bcd)\,(aef) = 0.$$

Vertauschen wir ferner die Buchstaben d in (I) mit u, so kommt die gleich bedeutende Identität:

$$\text{(III)} \qquad (abu)\, c_x - (acu)\, b_x = (abc)\, u_x - (bcu)\, a_x;$$

und hieraus folgt durch Quadriren:

$$\text{(IV)} \qquad (abu)^2\, c_x^2 - 2\,(abu)\,(acu)\, b_x c_x + (acu)^2\, b_x^2$$
$$= (abc)^2\, u_x^2 - 2\,(abc)\,(bcu)\, u_x a_x + (bcu)^2\, a_x^2.$$

Schliesslich fügen wir noch die schon oben bewiesene und benutzte Identität hinzu (vgl. p. 276):

$$\text{(V)} \qquad (abu) = a_x b_y - b_x a_y,$$

welche besteht, sobald $u_x = 0$ und $u_y = 0$ ist, und $u_i = (xy)_i$.

Die Verwerthung dieser Formeln bei symbolischen Rechnungen geschieht ganz ebenso, wie die der entsprechenden Identitäten bei den binären Formen (p. 193). Es sei noch besonders hervorgehoben, dass dabei die Vertauschung gleichbedeutender Symbole und Addition der so erhaltenen, unter einander identischen Ausdrücke ein oft benutztes Hülfsmittel bildet, und dass daher insbesondere der folgende Satz gilt:

Wenn ein symbolischer Ausdruck durch Vertauschung zweier gleichwerthiger Symbole sein Vorzeichen ändert, so verschwindet derselbe identisch.

VIII. Die ternären quadratischen Formen.

Wir wollen die für die ternären Formen im Vorstehenden gewonnenen Anschauungen zunächst insbesondere für die quadratischen Formen,*) d. h. für die Theorie der Kegelschnitte verwerthen. Wir haben letztere schon früher, wenn auch in ganz anderer Weise behandelt und können uns daher in Betreff der geometrischen Resultate kurz fassen. Gemäss den Forderungen der Invariantentheorie haben wir hier nur nach solchen Eigenschaften der Kegelschnitte zu fragen, welche bei beliebigen linearen Transformationen ungeändert bleiben, d. h. welche allen perspectivischen Projectionen eines solchen gemeinsam sind. Es fallen demnach für unsere jetzige Fragestellung alle Unterschiede zwischen Ellipse, Hyperbel und Parabel fort; denn dieselben beruhen allein auf den Beziehungen der Curven zu der unendlich fernen Geraden. Da wir nun durch eine Collineation die letztere stets in eine im Endlichen gelegene Gerade überführen, und umgekehrt jede beliebige Gerade der Ebene in die unendlich ferne projiciren können, so ist diese hier nicht weiter ausgezeichnet. Neben Ellipse und Hyperbel stellen wir ferner den als *imaginäre Ellipse* bezeichneten Kegelschnitt, welcher dadurch charakterisirt ist, dass alle seine Punkte imaginär, die Coëfficienten seiner Gleichung jedoch reell sind. Wir können nun aber, wie schon früher (p. 173) bemerkt, auch die Coëfficienten als complexe Grössen annehmen, ohne dass dadurch die Gültigkeit der algebraischen Entwicklungen beeinflusst würde. Damit hätten wir dann eine neue Klasse von Kegelschnitten bezeichnet. Es ist aber klar, dass auch letztere in reelle Curven, und umgekehrt diese in jene linear transformirt werden können, wenn wir auch den Transformationscoëfficienten complexe Werthe beilegen. In diesem Sinne können wir ganz allgemein folgenden Satz aussprechen: *Ein eigentlicher Kegelschnitt hat keine projectivischen Besonderheiten; ein jeder kann in jeden anderen durch Collineation übergeführt werden.* Insbesondere kann eine ternäre quadratische Form keine absolute Invariante haben; denn eine solche würde nur erlauben, diejenigen Kegelschnitte in einander zu transformiren, für welche der Zahlenwerth dieser Invariante derselbe wäre. Wir werden uns von diesen Resultaten im Folgenden auch direct durch Betrachtung der überhaupt möglichen invarianten Bildungen überzeugen.

Die Gleichung des Kegelschnittes

(1) $$f = a_x^2 = b_x^2 = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

---

*) Vgl. für diese Theorie neben Cayley's mehrfach erwähnten Memoirs upon quantics, besonders Salmon: Lessons introductory to the modern higher algebra, sodann dessen Kegelschnitttheorie (Cap. XXXI der Fiedler'schen Bearbeitung).

in Liniencoordinaten haben wir in ihrer symbolischen Gestalt schon früher bei Besprechung des Uebertragungsprincipes aufgestellt; sie ist dargestellt durch das Verschwinden der zugehörigen Form:

$$(2) \qquad F = (a b u)^2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzen wir in F die Coordinaten u proportional zu den Unterdeterminanten aus den Coordinaten x, y, so erhalten wir wegen der Identität

$$(a b u) = a_x b_y - b_x a_y$$

die Gleichung des Productes der beiden vom Punkte y an den Kegelschnitt gelegten Tangenten, in der bekannten Form (vgl. p. 107)

$$0 = (a_x b_y - b_x a_y)^2 = a_x^2 b_y^2 + b_x^2 a_y^2 - 2\, a_x a_y b_x b_y$$
$$= 2 \left\{ f(x) \cdot f(y) - \left(\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i \right)^2 \right\}.$$

Die Gleichung der Berührungspunkte dieser beiden Tangenten ergibt sich leicht, da dieselben die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Polare von y sind, deren Coordinaten durch

$$v_i = \frac{1}{2} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} = a_y a_i = b_y b_i = c_y c_i$$

gegeben werden. Diese Werthe haben wir nur in die Gleichung der Schnittpunkte der Linie v mit der Curve $f = 0$:

$$(a v u)^2 = 0$$

einzusetzen, um das Product der Berührungspunkte zu erhalten. Dabei müssen wir, weil die Coordinaten v in $(a v u)^2$ quadratisch vorkommen, einmal durch den bekannten Differentiationsprocess (Polarenbildung) andere, gleichbedeutende Coordinaten w einführen, und dann die v_i durch $b_i b_y$, die w_i durch $c_i c_y$ ersetzen; die gesuchte Gleichung wird also:

$$(a v u)\,(a w u) = (a b u)\,(a c u)\, b_y c_y = 0.$$

Wir sind hier zu dem ersten Beispiele für eine Zwischenform geführt; nehmen wir in ihr y constant, so gibt sie, gleich Null gesetzt, das Product jener beiden Berührungspunkte, nehmen wir u constant, so stellt sie die Gleichung der beiden in den Schnittpunkten der Linie u mit f an diese Curve gezogenen Tangenten dar. Diese Zwischenform lässt sich jedoch unter Anwendung der für ternäre Formen geltenden Identitäten (p. 283) als rationale und ganze Function einfacherer Bildungen darstellen. Zunächst ergibt die identische Gleichung IV wegen

$$F = (a\,b\,u)^2 = (a\,c\,u)^2 = (b\,c\,u)^2$$
$$f = a_x{}^2 = b_x{}^2 = c_x{}^2,$$

wenn wir x statt y schreiben und

$$A = (a\,b\,c)^2$$

setzen:

$$2\,(a\,b\,u)\,(a\,c\,u)\,b_x\,c_x = f\,F - A\,.\,u_x{}^2 + (a\,b\,c)\,(b\,c\,u)\,u_x\,a_x\,.$$

Vertauschen wir ferner in dem letzten Gliede dieser Gleichung die gleichwerthigen Symbole a, b, c, so können wir dasselbe durch ein Drittel der Summe der so erhaltenen Ausdrücke ersetzen; es wird:

$$(a\,b\,c)\,(b\,c\,u)\,u_x\,a_x = \tfrac{1}{3}\,(a\,b\,c)\,\{(b\,c\,u)\,a_x - (a\,c\,u)\,b_x + (a\,b\,u)\,c_x\}\,.$$

Wenden wir hierauf endlich die Identität III an, so erhalten wir:

$$(a\,b\,c)\,(b\,c\,u)\,u_x\,a_x = \tfrac{1}{3}\,A\,.\,u_x{}^2;$$

und somit haben wir für unsere Zwischenform:

$$2\,(a\,b\,u)\,(a\,c\,u)\,b_x c_x = f\,F - \tfrac{1}{3}\,A\,u_x{}^2. \tag{3}$$

Die hierin auftretende Invariante A muss nach dem Obigen mit der Determinante von f, deren Verschwinden die Bedingung für das Zerfallen in ein Linienpaar ist, bis auf einen Zahlenfactor identisch sein. In der That finden wir, wie schon früher ausgeführt wurde (vgl. p. 268):

$$A = (a\,b\,c)^2 = 6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Mit den Formen f, F, A ist nun der Kreis der hier möglichen Bildungen abgeschlossen. Der Beweis hierfür gründet sich auf die folgenden beiden Sätze:*)

Jedes symbolische Product, welches den symbolischen Factor $(a\,b\,c)$ *hat, enthält den wirklichen Factor* A.

Jedes symbolische Product, welches einen symbolischen Factor $(a\,b\,u)$, *aber keinen symbolischen Factor des Typus* $(a\,b\,c)$ *mehr enthält, zerfällt in Glieder, welche theils den wirklichen Factor* F, *theils den wirklichen Factor* $A\,.\,u_x$ *haben.*

Zum Beweise des ersten Satzes braucht man nur zu bemerken, dass man einen Ausdruck mit dem Factor $(a\,b\,c)$ jedenfalls als eine Summe einzelner Glieder darstellen kann, deren jedes von der Form $(a\,b\,c)\,a_i b_k c_l\,.\,M$ ist, wo M die Symbole a, b, c nicht mehr enthält. Von diesen verschwinden alle diejenigen, bei denen zwei der Indices i, k, l gleich sind, da sie durch Vertauschung der betreffenden Sym-

*) Vgl. Clebsch: Zur Theorie der Charakteristiken, Math. Annalen, Bd. 6, p. 1.

bole ihr Zeichen ändern würden; und jedes der anderen Glieder ist wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c gleich $\frac{1}{6}(abc)^2$, hat also in der That den wirklichen Factor A.

Enthält dagegen ein symbolisches Product den Factor (abu), ohne dass darin gleichzeitig ein Factor (abc) vorkommt, so müssen die Symbole a, b noch einmal in einer der folgenden vier Verbindungen auftreten

in einer Determinante (abu), wo dann der Factor F unmittelbar hervortritt,

oder in zwei Determinanten: $(acu)(bdu)$,

oder in einer Determinante und einer linearen Form: $(acu)\,b_x$,

oder in zwei linearen Formen: $a_x\,b_x$.

Im letzten Falle verschwindet der Ausdruck identisch, denn der Factor $(abc)\,a_x\,b_x$ ändert bei Vertauschung von a und b sein Vorzeichen. Im zweiten Falle haben wir wegen der Vertauschbarkeit von c, d und wegen der Identität II (p. 283), wenn wir darin d und f durch u, e durch d ersetzen, und wenn wir den von a, b freien Factor mit M bezeichnen:

$$M\,(abu)(acu)(bdu) = \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(acu)(bdu) - (adu)(bcu)\right\} M$$
$$= \tfrac{1}{2}(abu)^2(cdu)\,M = \tfrac{1}{2}F\,(cdu)\,.\,M.$$

Im dritten Falle erhalten wir nach der Identität III:

$$(abu)(acu)\,b_x\,.\,M = \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(acu)\,b_x - (bcu)\,a_x\right\} M$$
$$= \tfrac{1}{2}(abu)\left\{(abu)\,c_x - (abc)\,u_x\right\} M$$
$$= \tfrac{1}{2}Fc_x\,.\,M - (abu)(abc)\,u_x\,M.$$

Hier enthält der zweite Term den wirklichen Factor A nach dem ersten Satze; und somit ist auch der zweite Satz wegen der Theilbarkeit aller anderen Glieder durch F bewiesen.

Jede zu f gehörige invariante Bildung mit nur einer Reihe von Punkt- und einer Reihe von Liniencoordinaten setzt sich nun aus symbolischen Factoren der Form (abc), (abu), a_x, u_x, zusammen. Wir können daher von einer solchen durch obigen Zerlegungsprocess Theile mit den Factoren A, F oder $A\,.\,u_x$ absondern, bis symbolische Factoren vom Typus (abc) oder (abu) nicht mehr vorkommen. Das übrig bleibende Product kann dann nur noch eine Summe von Termen der Form $a_x^2\,.\,b_x^2\,.\,.\,.\,.\,u_x^\alpha$ sein, also nur noch aus einer Potenz von f und einer Potenz von u_x bestehen. Somit ist der folgende Satz bewiesen:

Jede Invariante, Covariante, zugehörige Form und Zwischenform einer ternären quadratischen Form mit höchstens einer Reihe von x und u ist eine ganze Function der Formen

$$u_x,\quad f,\quad F,\quad A.$$

— Ungleich grösser wird die Zahl der invarianten Bildungen, wenn man *das simultane System zweier quadratischer Formen* betrachtet, d. h. die gegenseitigen Beziehungen zweier Kegelschnitte untersucht. Wir wollen für dieselben zunächst das vollständige System aufstellen, d. h. diejenigen simultanen Functionalinvarianten angeben, durch welche sich alle andern rational und ganz ausdrücken lassen; und zwar gehen wir auf die betreffenden Erörterungen um so lieber ein, als wir auf derartige Fragen weiterhin nicht zurückkommen werden. Das Folgende mag daher als ein einfachstes Beispiel für solche Untersuchungen überhaupt gelten.

Die beiden gegebenen Formen seien:

$$(5) \qquad \begin{aligned} f &= a_x^2 = b_x^2 \ldots = \Sigma a_{ik} x_i x_k \\ f' &= a_x'^2 = b_x'^2 \ldots = \Sigma a_{ik}' x_i x_k . \end{aligned}$$

Alsdann haben wir nach dem Früheren zunächst die zugehörigen Formen:

$$(6) \qquad F_{11} = (abu)^2 = u_\alpha^2, \quad F_{22} = (a'b'u)^2 = u_{\alpha'}^2 .$$

und die Invarianten:

$$(7) \qquad A_{111} = (abc)^2 = a_\alpha^2, \quad A_{222} = (a'b'c')^2 = a'_{\alpha'}{}^2 .$$

Durch principielle Einführung der in diesen Formen benutzten Symbole

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3, \quad & \alpha_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1, \quad & \alpha_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2, \\ \alpha_1' &= a_2' b_3' - b_2' a_3', \quad & \alpha_2' &= a_3' b_1' - b_3' a_1', \quad & \alpha_3' &= a_1' b_2' - b_1' a_2' \end{aligned}$$

werden nun die folgenden Betrachtungen wesentlich vereinfacht. Zunächst gilt der Satz:

Hat ein symbolisches Product Π *den Factor* $(abv) = v_\alpha$, *so kann dasselbe so umgeformt werden, dass in ihm auch ein Factor* $(abw) = w_\alpha$ *auftritt, wo* v, w *Liniencoordinaten oder Symbole irgend welcher Formen, also überhaupt beliebige Grössen sind.*

Alsdann ist nämlich:

$$\Pi = (abv)\, a_y b_z \,.\, M,$$

wo M die Symbole a, b nicht mehr enthält, und wo y, z irgend welche Bedeutung haben. Nach der Identität V, p. 283 wird also:

$$\begin{aligned} 2\,\Pi &= (abv)\,(a_y b_z - b_y a_z) \,.\, M \\ &= (abv)\,(abw) \,.\, M, \end{aligned}$$

wenn $w_i = (yz)_i$ gesetzt wird, q. e. d.

Wir denken uns nun immer die Symbole a, b etc., so weit es möglich ist, zu Symbolen α zusammengefasst; und wenn wir von

Symbolen a sprechen, so verstehen wir darunter nur diejenigen, welche nicht mit andern Symbolen b zu Symbolen α vereinigt werden können. Entsprechendes gilt für a', b' und α'. Nach dieser Festsetzung können in einem symbolischen Producte Factoren vom Typus (abv) oder $(a'b'v)$ nicht mehr vorkommen; denn, wie soeben bewiesen ist, lässt sich dieses Product alsdann so umformen, dass noch ein Factor (abw), bez. $(a'b'w)$ auftritt; dann können wir aber $(ab) = \alpha$ setzen, wodurch Factoren vom Typus $v_\alpha w_\alpha$ bez. $v_{\alpha'} w_{\alpha'}$ entstehen. Ganz dasselbe gilt auch für die Symbole α, α': Jeder Factor $(\alpha\beta y)$ bedingt einen weiteren Factor $(\alpha\beta z)$, und nach dem Satze von den adjungirten Determinanten ist dann (vgl. p. 114):

$$3\,(\alpha\beta y)\,(\alpha\beta z) = A_{111}\, a_y\, a_z\,.$$

Aus diesen Ueberlegungen folgt, dass in einem symbolischen Producte der von uns betrachteten Art *nur Factoren der folgenden Typen* vorauszusetzen sind:

$$(8)\qquad \begin{cases} a_x\,, & a_x'\,, & u_\alpha\,, & u_{\alpha'}\,, \\ a_\alpha\,, & a_\alpha'\,, & a_{\alpha'}\,, & a'_{\alpha'}\,, \\ (a a' u)\,, & & (\alpha\alpha' x)\,. \end{cases}$$

Das Einfachste ist nun, dass wir eine simultane Form aus zwei *gleichen* Factoren dieses Schemas bilden; dadurch entstehen neben den in (6) und (7) gegebenen Formen noch die folgenden*):

$$A_{112} = a_\alpha'^2,\quad A_{122} = a_{\alpha'}^2,\quad F_{12} = (a a' u)^2,\quad \Phi_{12} = (\alpha\alpha' x)^2.$$

Für eine aus verschiedenen Factoren zusammengesetzte Form können wir nun zeigen, dass *von den in* (8) *aufgeführten Typen niemals zwei verschiedene Factoren von gleichem Typus in ein symbolisches Product eingehen können, d. h. dass sich jede Form*

$$a_x a_y b_z b_t \quad \text{oder} \quad a_x' a_y' b_z' b_t'$$

als Aggregat anderer Formen darstellen lässt, die entweder direct in niederere Bildungen zerfallen, oder in denen sich die Symbole a, b (bez. a', b') zu α (bez. α') zusammenziehen lassen.

Wenn die Form $a_x a_y b_z b_t$ nicht direct in zwei Factoren zerfallen soll, so haben wir, damit zwei Factoren des gleichen Typus vorkommen, nach dem Schema (8) folgende 3 Möglichkeiten

1) $y = z = \alpha$

2) $y = z = \alpha'$

3) $y = z = (a' u)$,

wo man statt y auch x und statt z auch t schreiben kann.

---

*) Nach der hier befolgten Bezeichnungsweise würden Φ_{11} und Φ_{22} bez. die Formen $(\alpha\beta x)^2$, $(\alpha'\beta' x)^2$ darstellen; es ist aber (vgl. p. 114):

$$3\,\Phi_{11} = A_{111}\cdot f,\qquad 3\,\Phi_{22} = A_{222}\cdot f'.$$

Im ersten Falle ist für $\beta = (ab)$ identisch nach V (p. 283):

$$a_\alpha b_\alpha a_x b_t = a_\alpha b_t (b_\alpha a_x - a_\alpha b_x) + a_\alpha^2 \,.\, b_x b_t$$
$$= \tfrac{1}{2} (a_\alpha b_t - b_\alpha a_t)(b_\alpha a_x - a_\alpha b_x) + a_\alpha^2 \,.\, b_x b_t$$
$$= \tfrac{1}{2} (\beta \alpha x)(\beta \alpha t) + A_{111} \,.\, b_x b_t, \text{ q. e. d.}$$

Im zweiten Falle ist ebenso für $\alpha = (ab)$:

$$a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_t = a_{\alpha'} b_t (\alpha \alpha' x) + a_{\alpha'}^2 \,.\, b_x b_t = \tfrac{1}{2} (\alpha \alpha' t)(\alpha \alpha' x) + A_{122} \,.\, b_x b_t.$$

Im dritten Falle endlich wenden wir die Identität an:

$$(a a' u)\, b_t = (a b u)\, a_t' - (a b a')\, u_t + (b a' u) a_t,$$

und es wird:

$$a_x a_y b_z b_t = a_x (b a' u)(u_\alpha a_t' - a_\alpha' u_t) + (b a' u)^2 a_x a_t$$
$$= \tfrac{1}{2} (a_\alpha' u_x - u_\alpha a_x')(u_\alpha a_t' - a_\alpha' u_t) + F_{12} \,.\, a_x a_t;$$

und hier zerfallen die Terme rechts in der That in getrennte Factoren. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; denn es ist klar, dass sich ein Product $a_x' a_y' b_z' b_t'$ ganz ebenso behandeln lässt; mit Hülfe des Satzes über adjungirte Determinanten *formt man ferner auch Ausdrücke der Form $u_\alpha v_\alpha w_\beta s_\beta$ oder $u_{\alpha'} v_{\alpha'} w_{\beta'} s_{\beta'}$ in entsprechender Weise um.* — *Aber auch die beiden Factoren a_α, a'_α oder $a_{\alpha'}$, a_α dürfen niemals zusammen vorkommen;* denn nach Vorstehendem könnten aus (8) nur noch zwei Factoren a_α, a'_α (oder $a_{\alpha'}$, $a'_{\alpha'}$) oder ein Factor $(a a' u)$ z. B. zu $a_\alpha a'_\alpha$ hinzutreten. Es ist aber für $\alpha = (bc)$:

$$a_\alpha a'_\alpha (a a' u) = \tfrac{1}{2} (abc) \left\{ (a' b c)(a a' u) - (a' a c)(b a' u) \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} (abc)(a' b\, a)(c a' u) = - \tfrac{1}{2} c_\alpha a'_\alpha (c a' u),$$

also gleich Null; und aus den Gleichungen (17) folgt:

$$a_\alpha a'_\alpha a_x a'_x = P_{12} = \tfrac{1}{3} A_{111} \,.\, f'; \text{ q. e. d.}$$

Auch für die Combination zweier Factoren von verschiedenem Typus aus unserem Schema können wir endlich noch eine Einschränkung hinzufügen. *Es dürfen nämlich niemals die beiden Determinantenfactoren $(a a' u)$, $(\alpha \alpha' x)$ vereinigt vorkommen.* Der Beweis hierfür ist unmittelbar durch die Identität gegeben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1' & u_1 \\ a_2 & a_2' & u_2 \\ a_3 & a_3' & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & x_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2' & x_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3' & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\alpha' & u_\alpha \\ a_{\alpha'} & a_{\alpha'}' & u_{\alpha'} \\ a_x & a_x' & u_x \end{vmatrix}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir *das vollständige System der ternären quadratischen Formen f und f'* sofort hinschreiben; denn wir brauchen nur alle Combinationen aus den in (8) zusammengestellten Factoren zu bilden, die durch vorstehende Erörterungen nicht ausgeschlossen sind. Wir erhalten so die 20 Formen*):

---

*) Aufstellung und Ableitung des Systems verdankt der Herausgeber einer Mittheilung von Gordan.

(9)

1) Formen ohne Determinantenfactor:

$$\begin{aligned} f &= a_x^2 , & f' &= a_x'^2 ,\\ F_{11} &= u_\alpha^2 , & F_{22} &= u_{\alpha'}^2 ,\\ A_{111} &= a_\alpha^2 , & A_{222} &= a'_{\alpha'}{}^2 ,\\ A_{112} &= a_\alpha'^2 , & A_{122} &= a_{\alpha'}{}^2 ,\\ B_1 &= a_\alpha' a_x' u_\alpha , & B_2 &= a_{\alpha'}' a_x u_{\alpha'} . \end{aligned}$$

2) Formen mit einem Determinantenfactor:

$$\begin{aligned} N &= (a a' u)\, a_x a_x' , & \mathsf{N} &= (\alpha \alpha' x)\, u_\alpha u_{\alpha'} ,\\ C_1 &= (a a' u)\, a_\alpha' a_x u_\alpha , & \Gamma_1 &= (\alpha \alpha' x)\, a_{\alpha'} u_\alpha a_x ,\\ C_2 &= (a a' u)\, a_{\alpha'} a_x' u_{\alpha'} , & \Gamma_2 &= (\alpha \alpha' x)\, a_\alpha' u_{\alpha'} a_x' ,\\ D &= (a a' u)\, a_{\alpha'} a_\alpha' u_\alpha u_{\alpha'} , & \Delta &= (\alpha \alpha' x)\, a_{\alpha'} a_\alpha a_x' a_x . \end{aligned}$$

3) Formen mit zwei Determinantenfactoren:

$$F_{12} = (a a' u)^2 , \qquad \Phi_{12} = (\alpha \alpha' x)^2 .$$

— Wenn wir nun im Folgenden mehr geometrische Fragen mittelst der Formentheorie behandeln wollen, so wird es unsere Hauptaufgabe sein, alle dabei auftretenden Bildungen auf die Formen des Systems (9) zurückzuführen. Gleichzeitig werden wir dann die durch Nullsetzen der letzteren dargestellten Gebilde kennen lernen, sowie die Bedeutung der durch das Verschwinden der simultanen Invarianten gegebenen Bedingungen.

Für unsere frühere Untersuchung des Kegelschnittbüschels

$$(10) \qquad \varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$$

war die Determinante von $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f'$ und die Gleichung in Liniencoordinaten besonders wichtig. Die Determinante, welche mit $A_\varkappa$ bezeichnet sei, entsteht, wenn man in $(abc)^2$ die a_{ik} durch $\varkappa_1 a_{ik} + \varkappa_2 a_{ik}'$ ersetzt und nach dem Taylor'schen Satze entwickelt; also wird:

$$A_\varkappa = 6 \begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' \\ \varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' \\ \varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' \end{vmatrix}$$

$$= (abc)^2 \varkappa_1^3 + 3\,(aba')^2 \varkappa_1^2 \varkappa_2 + 3\,(ab'a')^2 \varkappa_1 \varkappa_2^2 + (a'b'c')^2 \varkappa_2^3$$

oder nach unserer obigen Bezeichnungsweise*):

*) In ausgerechneter Form ist also, wenn für den Augenblick A_{ik} die Unterdeterminanten von A_{111}, A_{ik}' die von A_{222} bezeichnen:

$$3\,A_{112} = \Sigma \frac{\partial A_{111}}{\partial a_{ik}} a_{ik}' = 6 \left\{ A_{11} a_{11}' + A_{22} a_{22}' + A_{33} a_{33}' + 2\,A_{12} a_{12}' + 2\,A_{23} a_{23}' + 2\,A_{31} a_{31}' \right\}$$

$$3\,A_{122} = \Sigma \frac{\partial A_{222}}{\partial a_{ik}'} a_{ik} = 6 \left\{ A_{11}' a_{11} + A_{22}' a_{22} + A_{33}' a_{33} + 2\,A_{12}' a_{12} + 2\,A_{23}' a_{23} + 2\,A_{31}' a_{31} \right\} .$$

$$(11) \qquad A_\varkappa = A_{111}\varkappa_1^3 + 3\,A_{112}\varkappa_1^2\varkappa_2 + 3\,A_{122}\varkappa_1\varkappa_2^2 + A_{222}\varkappa_2^3.$$

In derselben Weise findet man für die linke Seite der Liniencoordinatengleichung:

$$F_\varkappa = -2 \begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' & u_1 \\ \varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' & u_2 \\ \varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a\,b\,u)^2\,\varkappa_1^2 + \left\{(a b' u)^2 + (b a' u)^2\right\}\varkappa_1\varkappa_2 + (a' b' u)^2\,\varkappa_2^2,$$

oder wegen der Vertauschbarkeit von a und b, a' und b':

$$(12) \qquad F_\varkappa = F_{11}\varkappa_1^2 + 2\,F_{12}\varkappa_1\varkappa_2 + F_{22}\varkappa_2^2.$$

Die Coëfficienten von $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$ sind also die zugehörigen Formen der gegebenen Kegelschnitte; und der Coëfficient von $\varkappa_1\varkappa_2$ gibt bekanntlich, gleich Null gesetzt, den Kegelschnitt, dessen Tangenten die Curven $f = 0$ und $f' = 0$ in harmonischen Punktpaaren treffen (vgl. p. 281). Das quadratische Vorkommen des Parameters $\varkappa$ in (12) sagt aus, dass jede Gerade der Ebene von zwei Curven des Büschels berührt wird (vgl. p. 134). Nur wenn die Gerade durch einen der vier Grundpunkte des Büschels geht, fallen die beiden Berührungspunkte zusammen; es ist daher, wie auch aus dem Uebertragungsprincipe sofort folgt (p. 281), *das Product der vier Schnittpunkte von f und f'* gegeben durch das Verschwinden der Discriminante von $F_\varkappa$:

$$F_{11}\,F_{22} - F_{12}^2 = 0.$$

Ersetzt man in der Determinante $F_\varkappa$ die u_i des einen Randes durch v_i, so stellt $F_\varkappa = 0$ die Gleichung des Poles der Geraden v in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$ dar. Nimmt man ferner

$$v_i = \tfrac{1}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f'}{\partial x_i}\right) = \lambda_1 a_i a_x + \lambda_2 a_i' a_x',$$

d. h. betrachtet man die Gerade v als Polare von x in Bezug auf den Kegelschnitt $\lambda_1 f + \lambda_2 f' = 0$, so wird der Pol dieser Geraden in Bezug auf $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$ dargestellt durch das Verschwinden der Bildung $\left(f_i = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i},\ f_i' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial x_i}\right)$:

$$B_{\varkappa\lambda} = -2 \begin{vmatrix} \varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' & u_1 \\ \varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' & u_2 \\ \varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' & u_3 \\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_1' & \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_2' & \lambda_1 f_3 + \lambda_2 f_3' & 0 \end{vmatrix},$$

oder symbolisch aus (12):

$$
\begin{aligned}
B_{\varkappa\lambda} = \varkappa_1^2 \quad & u_\alpha \quad \{\lambda_1 c_\alpha c_x + \lambda_2 c_{\alpha}' c_x'\} \\
(13) \qquad + 2\varkappa_1\varkappa_2 & (aa'u) \{\lambda_1 (aa'c) c_x + \lambda_2 (aa'c') c_x'\} \\
+ \varkappa_2^2 \quad & u_{\alpha'} \quad \{\lambda_1 c_{\alpha'} c_x + \lambda_2 c'_{\alpha'} c_x'\} .
\end{aligned}
$$

Das erste und letzte Glied hängen nur von den Coëfficienten je einer Form ab und haben bez. den Factor c_α, $c'_{\alpha'}$; also enthalten sie bez. den wirklichen Factor A_{111}, A_{222}. Der Coëfficient von $\varkappa_1^2\lambda_2$ ist die Form B_1 der von $\varkappa_2^2\lambda_1$ die Form B_2. Um auch die andern Glieder auf einfache Bildungen zurückzuführen setzen wir $\varkappa_i = \lambda_i$. Alsdann ist $B_{\varkappa\varkappa} = 0$ die Gleichung des Poles der Polare von x in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$, d. h. die Gleichung des Punktes x, und somit muss $B_{\varkappa\varkappa}$ den Factor u_x enthalten. In der That multipliciren wir die ersten drei Horizontalreihen der Determinante $B_{\varkappa\varkappa}$ bez. mit x_1, x_2, x_3 und subtrahiren sie dann von der dritten, so verschwinden in dieser sämmtliche Glieder bis auf das letzte, wo an Selle von 0 der Term $-u_x$ auftritt. Wir erhalten also nach (11):

$$B_{\varkappa\varkappa} = \tfrac{1}{3} u_x \,.\, A_\varkappa \,.$$

Setzen wir andererseits in (13) $\varkappa_i = \lambda_i$; so findet man durch Vergleichung der Coëfficienten gleicher Potenzen der λ die folgenden Relationen, welche sich übrigens auch leicht direct durch symbolische Rechnung in obiger Weise ableiten lassen:

$$
\begin{aligned}
(abu)(abc)c_x = u_\alpha c_\alpha c_x \qquad & = \tfrac{1}{3} A_{111} \,.\, u_x \\
B_1 + 2(aa'u)(aa'c)c_x = & \quad A_{112} \,.\, u_x \\
2(aa'u)(aa'c')c_x' + B_2 \qquad & = \quad A_{122} \,.\, u_x \\
(a'b'u)(a'b'c')c_x' = u_{\alpha'} c'_{\alpha'} c_x' \qquad & = \tfrac{1}{3} A_{222} \,.\, u_x .
\end{aligned}
$$

Damit ist die Zurückführung auf die Formen unseres Systemes gegeben. Ueber die geometrische Bedeutung der Gleichungen $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ braucht wohl nach dem über $B_{\varkappa\lambda} = 0$ Gesagten kaum etwas hinzugefügt zu werden: B_1 entsteht ja aus $B_{\varkappa\lambda}$ für $\lambda_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$; B_2 ebenso für $\lambda_2 = 0$, $\varkappa_1 = 0$.

Aus $B_{\varkappa\lambda}$ entsteht nun sofort eine Reihe von quadratischen Covarianten, wenn wir die u_i durch $\mu_1 f_i + \mu_2 f_i'$ ersetzen; und wir werden zeigen, wie sich dieselben alle auf f, f' und Φ_{12} zurückführen lassen. Die so aus $B_{\varkappa\lambda}$ hervorgehende Bildung:

$$
H_{\varkappa\lambda\mu} = -2 \begin{vmatrix}
\varkappa_1 a_{11} + \varkappa_2 a_{11}' & \varkappa_1 a_{12} + \varkappa_2 a_{12}' & \varkappa_1 a_{13} + \varkappa_2 a_{13}' & \mu_1 f_1 + \mu_2 f_1' \\
\varkappa_1 a_{21} + \varkappa_2 a_{21}' & \varkappa_1 a_{22} + \varkappa_2 a_{22}' & \varkappa_1 a_{23} + \varkappa_2 a_{23}' & \mu_1 f_2 + \mu_2 f_2' \\
\varkappa_1 a_{31} + \varkappa_2 a_{31}' & \varkappa_1 a_{32} + \varkappa_2 a_{32}' & \varkappa_1 a_{33} + \varkappa_2 a_{33}' & \mu_1 f_3 + \mu_2 f_3' \\
\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_1' & \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_2' & \lambda_1 f_3 + \lambda_2 f_3' & 0
\end{vmatrix}
$$

gibt, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, dass die Polare eines Punktes x in Bezug auf den Kegelschnitt $\lambda_1 f + \lambda_2 f' = 0$ und die

desselben Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt $\mu_1 f + \mu_2 f' = 0$ einander conjugirt sein in Bezug auf die Curve $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f'' = 0$. In symbolischer Gestalt haben wir aus (13):

$$(14)\quad \begin{aligned} H_{\varkappa\lambda\mu} = {} & \varkappa_1^2 \{\mu_1 d_\alpha d_x + \mu_2 d_\alpha' d_x'\} \{\lambda_1 c_\alpha c_x + \lambda_2 c_\alpha' c_x'\} \\ & + 2\varkappa_1 \varkappa_2 \{\mu_1 (a a' d) d_x + \mu_2 (a a' d') d_x'\} \{\lambda_1 (a a' c) c_x + \lambda_2 (a a' c') c_x'\} \\ & + \varkappa_2^2 \{\mu_1 d_{\alpha'} d_x + \mu_2 d'_{\alpha'} d_x'\} \{\lambda_1 c_{\alpha'} c_x + \lambda_2 c'_{\alpha'} c_x'\}. \end{aligned}$$

oder, wenn wir die hier auftretenden Covarianten mit P bezeichnen und durch entsprechende Indices unterscheiden:

$$(15)\quad \begin{aligned} H_{\varkappa\lambda\mu} = {} & \varkappa_1^2 \{\lambda_1 \mu_1 P_{11} + \lambda_1 \mu_2 P_{12} + \lambda_2 \mu_1 P_{21} + \lambda_2 \mu_2 P_{22}\} \\ & + 2 \varkappa_1 \varkappa_2 \{\lambda_1 \mu_1 P_{11}' + \lambda_1 \mu_2 P_{12}' + \lambda_2 \mu_1 P_{21}' + \lambda_2 \mu_2 P_{22}'\} \\ & + \varkappa_2^2 \{\lambda_1 \mu_1 P_{11}'' + \lambda_1 \mu_2 P_{12}'' + \lambda_2 \mu_1 P_{21}'' + \lambda_2 \mu_2 P_{22}''\}, \end{aligned}$$

woraus die Bedeutung der einzelnen $P_{ik}^{(h)}$ unmittelbar ersichtlich ist. Um dieselben auf die Formen unseres Systemes (9) zurückzuführen, setzen wir in der Determinante $H_{\varkappa\lambda\mu}$ zuerst $\varkappa_i = \lambda_i$. Ziehen wir dann, wie bei $B_{\varkappa\varkappa}$, in (14) die bez. mit x_1, x_2, x_3 multiplicirten ersten drei Horizontalreihen von der vierten ab, so wird:

$$(16)\qquad H_{\varkappa\varkappa\mu} = \tfrac{1}{3} A_\varkappa (\mu_1 f + \mu_2 f').$$

Macht man andererseits dieselbe Substitution in (15), so erhält man durch Coëfficientenvergleichung die Relationen:

$$(17)\quad \begin{cases} P_{11} = \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f, & P_{12} = \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f' \\ 2 P_{11}' + P_{21} = A_{112} \cdot f, & 2 P_{12}' + P_{22} = A_{112} \cdot f' \\ P_{11}'' + 2 P_{21}' = A_{122} \cdot f, & P_{12}'' + 2 P_{22}' = A_{122} \cdot f' \\ P_{21}'' = A_{222} \cdot f, & P_{22}'' = \tfrac{1}{3} A_{222} \cdot f'. \end{cases}$$

Damit sind die fraglichen Covarianten zunächst auf vier reducirt; zwischen letzteren bestehen aber noch weitere Gleichungen, welche sich ergeben, wenn man in (15) $\varkappa = \mu$, setzt. Dann wird entsprechend der Gleichung (16):

$$H_{\varkappa\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{3} A_\varkappa (\lambda_1 f + \lambda_2 f');$$

und durch Coëfficientenvergleichung findet man:

$$(18)\quad \begin{cases} P_{11} = \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f, & P_{21} = \tfrac{1}{3} A_{111} \cdot f, \\ 2 P_{11}' + P_{12} = A_{112} \cdot f, & 2 P_{21}' + P_{22} = A_{112} \cdot f' \\ P_{11}'' + 2 P_{12}' = A_{122} \cdot f, & P_{21}'' + 2 P_{22}' = A_{122} \cdot f' \\ P_{12}'' = \tfrac{1}{3} A_{222} \cdot f, & P_{22}'' = \tfrac{1}{3} A_{222} \cdot f'. \end{cases}$$

Die Formen P_{11}, $P_{21} = P_{12}$, $P_{12}' = P_{21}''$, P_{22}'' zerfallen also direct in zwei Factoren, und die andern lassen sich alle durch eine mit Hülfe der Invarianten und der Grundformen f, f', ausdrücken. Wir haben

nur noch die Zurückführung dieser einen, etwa P_{11}'', auf Φ_{12} zu geben. Nun ist aber:

$$\Phi_{12} = (\alpha\alpha' x)^2 = (a_{\alpha'} b_x - b_{\alpha'} a_x)^2$$
$$= a_{\alpha'}^2 \cdot b_x^2 + b_{\alpha'}^2 a_x^2 - 2\, a_{\alpha'} b_{\alpha'} a_x b_x\,,$$

und hier ist der letzte Term eben unsere Form P_{11}''. Es folgt also:

(19) $$P_{11}'' = A_{122} \cdot f - \tfrac{1}{2}\,\Phi_{12}.$$

Wir haben somit in der That die zwölf Covarianten, welche in $H_{\varkappa\lambda\mu}$ *vorkommen, auf die Formen unseres Systems zurückgeführt.*

Mit Hülfe der Gleichung (19) können wir ohne Schwierigkeit die durch $A_{112} = 0$ oder $A_{122} = 0$ gegebenen Lagenbeziehungen von f und f' geometrisch charakterisiren. Die Form Φ_{12} entspricht dualistisch der Form F_{12}; $\Phi_{12} = 0$ *stellt daher den Ort der Punkte dar, von welchen zwei Paare zu einander harmonischer Tangenten an* f *und* f' *gehen.* Ferner entsteht P_{11}'' aus $F_{22} = u_{\alpha'}^2$, wenn man $u_i = f_i$ setzt; $P_{11}'' = 0$ *ist also der Kegelschnitt, welcher von den Polen der Tangenten von* $f' = 0$ *in Bezug auf* $f = 0$ *gebildet wird.* Die Bedingung $A_{122} = 0$ sagt nun wegen (19) aus, dass *diese beiden Curven identisch sind.* Nehmen wir unter dieser Voraussetzung eine Tangente u von $f' = 0$, so entspricht ihr vermöge $f = 0$ ein auf P_{11}'' gelegener Pol, und die beiden von letzterem an $f' = 0$ gezogenen Tangenten v, w sind harmonisch zu den beiden an $f = 0$ gezogenen, d. h. sie sind in Bezug auf $f = 0$ conjugirte Gerade. Somit bilden die Tangenten u, v, w von $f' = 0$ ein Polardreieck von $f = 0$; und ein solches Dreieck kann man für *jede* Tangente u von f construiren. Da aber $A_{122} = a_{\alpha}'^2$ symmetrisch in den Coëfficienten von a_x^2 und $u_{\alpha'}^2$ ist, so kann man auch dualistisch entsprechend, von einem beliebigen Punkte von $f = 0$ ausgehend, ein Dreieck construiren, dessen Ecken auf $f = 0$ liegen, und welches Polardreieck von $f' = 0$ ist. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn die simultane Invariante $A_{122} = a_{\alpha'}^2$ *der Kegelschnitte* $a_x^2 = 0$ *und* $u_{\alpha'}^2 = 0$ *verschwindet, so gibt es in Bezug auf* $a_x^2 = 0$ *einfach unendlich viele Polardreiecke, welche der Curve* $u_{\alpha'}^2 = 0$ *umgeschrieben, und in Bezug auf* $u_{\alpha'}^2 = 0$ *einfach unendlich viele Polardreiecke, welche der Curve* $a_x^2 = 0$ *eingeschrieben sind.**)

Der entsprechende Satz gilt selbstverständlich, wenn A_{112} verschwindet; man hat dann nur die Curven $f = 0$ und $f' = 0$ zu vertauschen.

Es ist leicht auch den durch $N = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ dargestellten Gebilden geometrische Deutungen unterzulegen; dasselbe gilt für N,

---

*) Ueber Kegelschnitte, welche in dieser Beziehung stehen, vgl. Smith: Proceedings of the London math. Society, vol. 2, p. 94; Rosanes: Math. Annalen, Bd. 6; Darboux: Bulletin des sciences math., t. 1, p. 348.

Γ_1 und Γ_2. Man sieht z. B. sofort, dass $N = 0$ *die Gleichung des Schnittpunktes der Polaren von x in Bezug auf $f = 0$ und $f' = 0$ ist.* Wir betrachten hier nur noch die Form C_1; sie ist die Functionaldeterminante von B_1, f und u_x:

$$C_1 = (a\,a'\,u)\,a_\alpha'\,a_x\,u_\alpha = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial B_1}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial B_1}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial B_1}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix}.$$

Nun ist $B_1 = 0$ die Gleichung einer Geraden v, für deren Punkte die Polaren in Bezug auf $f' = 0$ zu der Linie u in Bezug auf $f = 0$ conjugirt sind; die Differentialquotienten $\frac{\partial B_1}{\partial x_i}$ sind also die Coordinaten dieser Geraden, und $C_1 = 0$ *ist die Bedingung, dass die Polare von x in Bezug auf f durch den Schnittpunkt von u und v geht.*

Von grösserem Interesse für die Geometrie sind die Formen D und Δ. Sie haben zunächst die Eigenschaft, dass *die eine die reciproke Bildung der andern, sowohl in Bezug auf f, als in Bezug auf f' ist.* Zum Beweise dessen gehen wir von D aus und setzen:

$$u_i = f_i = b_x b_i = c_x c_i = d_x d_i.$$

Bezeichnen wir die dadurch aus D entstehende Bildung mit D', so wird:

$$\begin{aligned} D' &= \quad (a\,a'\,b)\,a_{\alpha'}\,a_\alpha'\,c_\alpha\,d_{\alpha'}\,b_x\,c_x\,d_x \\ &= \quad \tfrac{1}{2}\,(a\,a'\,b)\,(a_{\alpha'}\,b_x - b_{\alpha'}\,a_x)\,a_\alpha'\,c_\alpha\,d_{\alpha'}\,c_x\,d_x \\ &= -\tfrac{1}{2}\,a_\beta'\,(\beta\,\alpha'\,x)\,a_\alpha'\,c_\alpha\,d_{\alpha'}\,c_x\,d_x. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Identität $(\alpha = (a\,b))$

$$a_\alpha'\,c_x = (a'\,a\,b)\,c_x = (a\,b\,c)\,a_x' - (a'\,b\,c)\,a_x + (a'\,a\,c)\,b_x$$

finden wir nun:

$$a_\alpha'\,c_x\,a_\beta'\,c_\alpha = c_\alpha^2\,.\,a_\beta'\,a_x' + 2\,(a\,b\,c)\,(a'\,a\,c)\,b_x\,a_\beta'$$

oder für $(a\,c)_i = \alpha_i$:

$$a_\alpha'\,a_\beta'\,c_\alpha\,c_x = c_\alpha^2\,.\,a_\beta'\,a_x' - 2\,b_\alpha\,a_\alpha'\,b_x\,a_\beta'.$$

Das letzte Glied rechts unterscheidet sich aber von dem Ausdrucke links nur durch den Zahlenfactor und durch Vertauschung von b und c; also wird:

$$a_\alpha'\,a_\beta'\,c_\alpha\,c_x = \tfrac{1}{3}\,c_\alpha^2\,.\,a_\beta'\,a_x'.$$

Setzen wir dies in D' ein, so kommt:

$$D' = -\tfrac{1}{3}\,A_{111}\,.\,\Delta, \text{ q. e. d.}$$

Ebenso ist natürlich für $u_i = f_i'$:

$$D'' = \dot{-} \tfrac{1}{3} A_{222} \,.\, \Delta\,;$$

und dualistisch entsprechende Gleichungen gelten zur Ueberführung von Δ in D. Wir wissen aber, dass nur den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' die Eigenschaft zukommt, dass die Polaren ihrer Punkte in Bezug auf f und f' dieselbe Curve dritter Klasse umhüllen; und zwar besteht letztere aus den Ecken jenes Dreiecks. Hieraus folgt:

*Die Gleichung $D = 0$ stellt das Product der drei Seiten, $\Delta = 0$ das der drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' dar.**)

Dies Resultat war übrigens vorauszusehen, da nur die eine Covariante D von der dritten Ordnung in unserm Systeme enthalten ist, und das Polardreieck jedenfalls durch eine Covariante dargestellt wird. Aus diesem Grunde muss D auch das gemeinsame Polardreieck von F_{12} und Φ_{12} darstellen, und somit ergibt sich:

Alle covarianten Kegelschnitte von f und f' haben mit letzteren Curven dasselbe Polardreieck $D = 0$, $\Delta = 0$ gemeinsam; oder mit andern Worten: Die Formen D und Δ sind Combinanten für alle Formen des Systemes

$$\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' + \varkappa_3 \varphi\,,$$

wenn φ irgend eine zu f und f' covariante quadratische Form, also am einfachsten Φ_{12}, bedeutet. Sie dürfen daher alle, wenn dies Dreieck als Coordinatendreieck eingeführt wird, in ihren Gleichungen nur die Quadrate der Veränderlichen enthalten. In der That setzen wir:

$$\begin{aligned} f' &= \lambda' \xi_1^2 + \lambda'' \xi_2^2 + \lambda''' \xi_3^2 \\ f &= \quad \xi_1^2 + \quad \xi_2^2 + \quad \xi_3^2, \end{aligned}$$

so wird für $\varkappa_1 = \varkappa$, $\varkappa_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 1$:

$$H_{\varkappa\lambda\mu} = -2 \begin{vmatrix} \varkappa + \lambda' & 0 & 0 & (\mu + \lambda')\,\xi_1 \\ 0 & \varkappa + \lambda'' & 0 & (\mu + \lambda'')\,\xi_2 \\ 0 & 0 & \varkappa + \lambda''' & (\mu + \lambda''')\,\xi_3 \\ (\lambda + \lambda')\,\xi_1 & (\lambda + \lambda'')\,\xi_2 & (\lambda + \lambda''')\,\xi_3 & 0 \end{vmatrix},$$

und bei der Entwicklung der Determinante treten nur die Quadrate der ξ auf. —

Die bei der kanonischen Form in f' auftretenden Coëfficienten sind bekanntlich die Wurzeln der cubischen Gleichung $A_\varkappa = 0$. Wir haben ferner gesehen (p. 135 ff.), dass die Transformation auf diese Form nicht mehr unbedingt möglich ist, wenn jene Wurzeln zum

*) Durch Zerfällung von D bez. Δ in die drei linearen Factoren würde man somit eine neue Lösung für die gleichzeitige Transformation von f und f' auf die kanonische Form (p. 127) erhalten. Mittel zur Ausführung der Zerfällung werden wir in der Theorie der Curven 3. Ordnung kennen lernen.

Theil einander gleich werden. In diesem Falle berühren sich die Curven f und f' in gewisser Weise, und die Art dieser Berührung wurde durch das Verhalten der Unterdeterminanten von $A_\varkappa$ gegenüber der mehrfachen Wurzel besagter Gleichung bestimmt. Diese Berührungsbedingungen müssen sich aber nach einem früheren Satze auch durch das Verschwinden von Functionalinvarianten der Formen f und f' darstellen lassen (vgl. p. 274). Es führen dazu die folgenden Ueberlegungen.

Wir wissen, dass f und f' sich berühren, wenn zwei Wurzeln von $A_\varkappa = 0$ gleich sind, d. h. wenn die Discriminante der cubischen Form $A_\varkappa$ verschwindet (vgl. p. 136). *Die Bedingung für die einfache Berührung ist also:*

$$(20)\quad 4\,(A_{111}A_{122}-A_{112}^2)\,(A_{112}A_{222}-A_{122}^2)-(A_{111}A_{222}-A_{112}A_{122})^2=0.$$

Hat dagegen $A_\varkappa = 0$ drei gleiche Wurzeln, so osculiren sich f und f'; andererseits muss dann die Hesse'sche Form der binären cubischen Form $A_\varkappa$ identisch Null sein (vgl. p. 228). *Die Bedingungen für die zweipunktige Berührung sind also*)*:

$$(21)\qquad \frac{A_{111}}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A_{222}}.$$

Berühren sich f und f' in zwei verschiedenen Punkten, so steht der Büschel $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f' = 0$ sich selbst dualistisch gegenüber: Durch jeden Punkt geht eine Curve desselben, jede Gerade wird von einer Curve berührt. Letzteres wird dadurch möglich, dass $F_\varkappa = 0$ eine von den u_i unabhängige Wurzel für $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ zulässt, und zwar ist dies die Doppelwurzel von $A_\varkappa = 0$. In der That enthält der Büschel $\varkappa_1 f + \varkappa_2 f'$ eine Doppelgerade, die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, welche von jeder Geraden der Ebene berührt wird (p. 106); und diese ist eben durch die Doppelwurzel von $A_\varkappa = 0$ bestimmt. Die letztere aber wird durch die Gleichung $\Delta_A = 0$ doppelt zählend gegeben, wenn Δ_A die Hesse'sche Form von $A_\varkappa$ ist. Es muss daher die Resultante der beiden quadratischen Formen $F_\varkappa$ und Δ_A Null sein. Diese Resultante reducirt sich hier aber, da Δ_A ein vollständiges Quadrat ist, auf die Invariante $(\Delta F)^2$, wenn für den Augenblick

$$\Delta_A = (\Delta_1\varkappa_1 + \Delta_2\varkappa_2)^2,\quad F_\varkappa = (F_1\varkappa_1 + F_2\varkappa_2)^2$$

gesetzt wird. Nach Ausrechnung der Invariante $(\Delta F)^2$ haben wir also den Satz:

Wenn f und f' sich in zwei getrennten Punkten berühren, so besteht neben (20) *unabhängig von den u_i die Bedingung:*

$$(22)\quad (A_{111}A_{122}-A_{112}^2)F_{22}-(A_{111}A_{222}-A_{122}A_{112})F_{12}+(A_{112}A_{222}-A_{122}^2)F_{11}=0.$$

---

*) Vgl. Salmon-Fiedler: Kegelschnitttheorie.

Den Fall der dreipunktigen Berührung von f und f' können wir endlich als eine Combination der beiden letzten Fälle auffassen: A_x hat einen dreifachen linearen Factor und F_x enthält denselben Factor einfach. Da $A_x = (A_1 x_1 + A_2 x_2)^3$ nun ein vollständiger Cubus ist, so ist die gestellte Bedingung erfüllt, sobald die binäre lineare Covariante $(AF)^2 A_x$ unabhängig von den x verschwindet. Tragen wir also die wirklichen Werthe der Coëfficienten von x_1, x_2 ein, so haben wir den Satz:

Wenn sich f und f' dreipunktig berühren, so bestehen neben (21) *unabhängig von den u_i die Bedingungen:*

$$(23)\qquad \begin{aligned} A_{111} F_{22} - 2 A_{112} F_{12} + A_{122} F_{11} &= 0 \\ A_{112} F_{22} - 2 A_{122} F_{12} + A_{222} F_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Die hier besprochenen ausgezeichneten Lagen zweier Kegelschnitte beziehen sich jedoch nur auf die geometrisch besonders hervortretenden Fälle. Vom Standpunkte der Invariantentheorie aus müssen wir dagegen jedes System zweier Kegelschnitte von jedem anderen Systeme zweier solcher Curven streng unterscheiden, sobald es nicht möglich ist, die beiden Systeme linear in einander zu transformiren. Diese Möglichkeit hängt aber von dem Werthe der simultanen absoluten Invarianten beider Kegelschnitte ab*), und durch diese Werthe ist daher die Lage der Kegelschnitte gegen einander charakterisirt. Die Zahl der absoluten Invarianten ist leicht zu bestimmen. Die beiden Kegelschnitte nämlich hängen zusammen von 10 Constanten ab; die 8 Constanten einer linearen Transformation können wir nun so bestimmen, dass 8 jener 10 Constanten beliebige Werthe annehmen; die beiden übrigen sind dann aber absolut fest gelegt; d. h. *zwei Kegelschnitte haben zwei absolute Invarianten.* Die letzteren haben wir aus den vier Invarianten A_{111}, A_{112}, A_{122}, A_{222} so zu bilden, dass die Coëfficienten von f und f' in ihnen in Zähler und Nenner zu gleichen Dimensionen vorkommen; und zwar legt man am einfachsten die folgenden beiden zu Grunde

$$(24)\qquad \mathsf{A}_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111} \cdot A_{122}}, \quad \mathsf{A}_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112} \cdot A_{222}}.$$

Es ist nun weiter unsere Aufgabe, den Zusammenhang dieser absoluten Invarianten mit den in der Figur der beiden Kegelschnitte auftretenden Doppelverhältnissen darzulegen. Wir bemerken zunächst, dass die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes von $f = 0$ mit den

*) Und zwar ist die Transformation *immer* möglich, wenn die absoluten Invarianten in beiden Systemen dieselben Werthe haben, und wenn in beiden dieselben Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen identisch Null sind, also überhaupt, wenn in beiden Systemen dieselben Functionalinvarianten verschwinden; vgl. die Anmerkung auf p. 274.

vier Schnittpunkten von f und f' ein für alle Punkte von f constantes Doppelverhältniss bilden (vgl. p. 49). Ein anderes constantes Doppelverhältniss ist ebenso durch die Verbindungslinien eines Punktes von f' mit jenen vier Punkten gegeben: Wir wollen beide Doppelverhältnisse durch A_1, bez. A_2 ausdrücken. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass in jedem der vier Schnittpunkte (y) von f und f' durch die Tangenten der Curven des Büschels:

$$\varkappa_1 a_y a_x + \varkappa_2 a_y' a_x' = 0$$

ein Strahlbüschel gegeben ist, in welchem jeder Strahl durch die entsprechenden binären Coordinaten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ bestimmt wird; insbesondere ist also durch $\varkappa_1 = 0$ die Tangente von f', durch $\varkappa_2 = 0$ die von f im Punkte y gegeben. Demgemäss stellt uns $A_\varkappa$ eine binäre cubische Form dar, deren entsprechende Strahlen des Büschels die Tangenten der drei Linienpaare in y sind, d. h. die Verbindungslinien von y mit den drei anderen Schnittpunkten. Diese drei Linien bilden dann mit der Tangente von f in y, d. i. mit der Linie $\varkappa_2 = 0$, jenes für alle Punkte von f constante Doppelverhältniss. Wir haben somit die Aufgabe, das Doppelverhältniss einer binären biquadratischen Form zu bestimmen, welche in die cubische Form $A_\varkappa$ und in eine lineare Form $\varkappa_2$ zerfällt, und dies geschieht in bekannter Weise mit Hülfe der Invarianten i und j der biquadratischen Form (vgl. p. 239). Ist letztere nun durch

$$\alpha_\varkappa^4 = \alpha_0 \varkappa_1^4 + 4\alpha_1 \varkappa_1^3 \varkappa_2 + 6\alpha_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 + 4\alpha_3 \varkappa_1 \varkappa_2^3 + \alpha_4 \varkappa_2^4$$

gegeben, und setzen wir

$$\begin{aligned}\alpha_\varkappa^4 &= a_\varkappa^3 \,.\, a_\varkappa' \\ &= (a_0 \varkappa_1^3 + 3a_1 \varkappa_1^2 \varkappa_2 + 3a_2 \varkappa_1 \varkappa_2^2 + a_3 \varkappa_2^3)\,.\,(a_1' \varkappa_1 + a_2' \varkappa_2),\end{aligned}$$

so müssen wir in

$$i = 2(\alpha_0 \alpha_4 - 4\alpha_1 \alpha_3 + 3\alpha_2^2)$$

und

$$j = 6 \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$$

substituiren:

$$\alpha_0 = a_0 a_1', \qquad \alpha_4 = a_3 a_2',$$

$$4\alpha_1 = a_0 a_2' + 3a_1 a_1', \quad 2\alpha_2 = a_1 a_2' + a_2 a_1', \quad 4\alpha_3 = 3a_2 a_2' + a_3 a_1'.$$

Für unsern Zweck haben wir insbesondere $a_1' = 0$, $a_2' = 1$ zu wählen, und dadurch erhalten wir für $a_\varkappa^3 = A_\varkappa$:

$$\begin{aligned}2i &= A_{112}^2 - 3A_{122}A_{111} \\ \tfrac{8}{3} j &= 3A_{111}A_{112}A_{122} - A_{111}^2 A_{222} - 2A_{112}^3\end{aligned}$$

und somit für das gesuchte Doppelverhältniss α:

$$\frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2} = \frac{8}{9} \frac{(A_{112}^2 - 3 A_{122} A_{111})^3}{(3 A_{111} A_{112} A_{122} - A_{111}^2 A_{222} - 2 A_{112}^3)^2},$$

oder nach einer einfachen Umformung der rechten Seite:

$$(25) \qquad \frac{(\mathsf{A}_1 - 3)^3 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2^2}{(3 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 - 2 \mathsf{A}_1^2 \mathsf{A}_2 - 1)^2} = 27 \frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Das Doppelverhältniss α der Verbindungslinien eines Punktes von f mit den vier Schnittpunkten von f und f' ist also durch Gleichung (25) *gegeben; und ebenso das Doppelverhältniss β der Verbindungslinien eines Punktes von f' mit jenen vier Punkten durch die Gleichung:*

$$(26) \qquad \frac{(\mathsf{A}_2 - 3)^3 \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_1^2}{(3 \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 - 2 \mathsf{A}_2^2 \mathsf{A}_1 - 1)} = 27 \frac{(1-\beta+\beta^2)^3}{(1+\beta)^2(2-\beta)^2(1-2\beta)^2}.$$

In Folge dieser Gleichungen können wir unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2^2 = \frac{A_{122}^3}{A_{111} A_{222}^2}, \quad \mathsf{A}_1^2 \mathsf{A}_2 = \frac{A_{112}^3}{A_{111}^2 A_{222}}$$

insbesondere den folgenden Satz aussprechen;

Wenn gleichzeitig die Invarianten A_{112} und A_{122} verschwinden, so ist das Doppelverhältniss jener vier Schnittpunkte auf b e i d e n *Kegelschnitten äquianharmonisch.*

Es liegt ferner nahe nach den drei Doppelverhältnissen zu fragen, welche auf den Seiten des Polardreiecks durch ihre Schnittpunkte mit den Kegelschnitten f und f' bestimmt werden. Um die entsprechende cubische Gleichung aufzustellen, nehmen wir f und f' in der kanonischen Form an:

$$f = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$
$$f' = \lambda' \xi_1^2 + \lambda'' \xi_2^2 + \lambda''' \xi_3^2.$$

Auf der Seite $\xi_1 = 0$ liegen dann die beiden Schnittpunktepaare:

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda'' \xi_2^2 + \lambda''' \xi_3^2 = 0;$$

und zu dem Systeme dieser beiden binären quadratischen Formen gehören die Invarianten (vgl. p. 215):

$$D = 2, \quad D' = \lambda'' + \lambda''', \quad D'' = 2 \lambda'' \lambda'''.$$

Aus letzteren berechnet man das Doppelverhältniss α_1 der entsprechenden vier Punkte mittelst der Gleichung (vgl. p. 217):

$$\frac{D'^2}{D D''} = \frac{(\lambda'' + \lambda''')^2}{4 \lambda'' \lambda'''} = \frac{(\alpha_1 + 1)^2}{(\alpha_1 - 1)^2}.$$

Um also α_1 zu finden, brauchen wir nur die absolute Invariante

$$\gamma_1 = \frac{(\lambda'' + \lambda''')^2}{4 \lambda'' \lambda'''} = \frac{D'^2}{D D''}$$

zu kennen, d. h. wir müssen eine cubische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln die drei Grössen:

$$(27) \qquad \gamma_1 = \frac{(\lambda'' + \lambda''')^2}{4\,\lambda''\,\lambda'''}, \quad \gamma_2 = \frac{(\lambda''' + \lambda')^2}{4\,\lambda'''\,\lambda'}, \quad \gamma_3 = \frac{(\lambda' + \lambda'')^2}{4\,\lambda'\,\lambda''}$$

sind; aus ihnen finden wir dann die drei gesuchten Doppelverhältnisse mittelst der Relationen:

$$(28) \qquad \gamma_1 = \frac{(\alpha_1 + 1)^2}{(\alpha_1 - 1)^2}, \quad \gamma_2 = \frac{(\alpha_2 + 1)^2}{(\alpha_2 - 1)^2}, \quad \gamma_3 = \frac{(\alpha_3 + 1)^2}{(\alpha_3 - 1)^2}.$$

Wir kennen aber die symmetrischen Functionen dieser drei Wurzeln γ, da die der Wurzeln λ', λ'', λ''' bestimmt sind; und zwar findet man aus den Gleichungen:

$$3\,\frac{A_{112}}{A_{111}} = -\,(\lambda' + \lambda'' + \lambda''')$$

$$3\,\frac{A_{122}}{A_{111}} = \lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda'$$

$$\frac{A_{222}}{A_{111}} = -\,\lambda'\lambda''\lambda'''$$

unter Berücksichtigung von (27) die folgenden Relationen:

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{(A_{111}\,A_{222} - 9\,A_{112}\,A_{122})^2}{64\,A_{111}^2\,A_{222}^2} = \tfrac{1}{64}\,(1 - 9\,\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)^2$$

$$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 = \frac{3\,A_{222}^2 A_{111}^2 - 9\,A_{112}\,A_{122}\,A_{222}\,A_{111} + 27\,(A_{112}^3\,A_{222} + A_{122}^3\,A_{111})}{16\,A_{111}^2\,A_{222}^2}$$

$$= \tfrac{3}{16}\,\{1 - 3\,\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\,(1 - 9\,\mathsf{A}_1 - 9\,\mathsf{A}_2)\}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -\,3\,\frac{3\,A_{112}\,A_{122} + A_{111}\,A_{222}}{A_{111}\,A_{222}} = -\,3\,(1 + 3\,\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2).$$

Die absoluten Invarianten der drei Paare von binären quadratischen Formen, welche auf den Seiten des Polardreiecks durch ihre Schnittpunkte mit f und f' dargestellt werden, sind also die Wurzeln der Gleichung:

$$(29) \quad \gamma^3 + 3(1 + 3\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)\gamma^2 + \tfrac{3}{16}\{1 - 3\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2(1 - 9\mathsf{A}_1 - 9\mathsf{A}_2)\}\,\gamma - \tfrac{1}{64}(1 - 9\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2) = 0;$$

und aus den Wurzeln dieser Gleichung findet man die Doppelverhältnisse α der drei Punktquadrupel mittelst der Gleichungen (28)*).

---

*) Benutzt man einen der beiden vorliegenden Kegelschnitte zur Begründung einer *allgemeinen projectivischen Massbestimmung* (vgl. die Anmerkung auf p. 150), so wird man entsprechend den 2 absoluten Invarianten, welche ein beliebiger Kegelschnitt mit ersterem bestimmt, zweifach unendlich viele, in metrischer Hinsicht von einander verschiedene Kegelschnitte in der Ebene unterscheiden müssen. Eine weitere Eintheilung der letzteren ist dann nach den etwaigen Berührungen mit dem Fundamentalkegelschnitte durchzuführen, d. h. nach dem Verhalten der im Texte erwähnten Functionalinvarianten. Es würde dies der Eintheilung in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln bei gewöhnlicher Metrik entsprechen, denn die Realität der vier Schnittpunkte mit dem Fundamentalkegelschnitte wird von den Werthen der absoluten Invarianten abhängen. Die von den beiden Kegelschnitten auf den Seiten des Polardreiecks bestimmten Doppelverhältnisse entsprechen dann gewissermassen den Längen der Hauptaxen bei gewöhnlicher Metrik.

Wir fügen noch einige Bemerkungen über das *System von drei Kegelschnitten* hinzu. Es seien die drei quadratischen Formen gegeben:

$$f = a_x^2, \quad \varphi = a_x'^2, \quad \psi = a_x''^2;$$

dann bietet sich zunächst als einfachste simultane Covariante die *Functional- oder* Jakobi'*sche Determinante* derselben, d. h. die Determinante der ersten Differentialquotienten:

$$I = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (a a' a'') \, a_x a_x' a_x''.$$

Gleich Null gesetzt ergibt sie eine Gleichung, welche als das Resultat der Elimination der y oder x aus den drei Gleichungen

$$a_x a_y = 0, \quad a_x' a_y' = 0, \quad a_x'' a_y'' = 0$$

angesehen werden kann. *Die durch das Verschwinden der Functionaldeterminante dargestellte Curve dritter Ordnung ist daher der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf die drei gegebenen Kegelschnitte sich in einem Punkte schneiden; und gleichzeitig der Ort dieser Schnittpunkte selbst.* Diese Curve steht, wie man sofort erkennt, in derselben Beziehung zu irgend drei anderen Kegelschnitten des zweifach unendlichen Systems:

$$\varkappa f + \lambda \varphi + \mu \psi = 0,$$

deren Gesammtheit man als *Kegelschnittnetz**) zu bezeichnen pflegt, d. h. *sie ist eine Combinante des Netzes* (vgl. p. 208). Auf die Untersuchung der so erhaltenen Curve dritter Ordnung concentrirt sich weiterhin wesentlich das Interesse bei Betrachtung der Kegelschnittnetze. Wir erwähnen hier nur noch einige besondere Fälle.

Zunächst können die drei Curven z. B. so liegen, dass ihnen ein Polardreieck gemeinsam ist, ein Fall, der schon gelegentlich erwähnt wurde (p. 297). Alsdann können wir die Gleichungen der drei Grundkegelschnitte in der Form:

$$\begin{aligned} f &= \alpha\ \xi_1^2 + \beta\ \xi_2^2 + \gamma\ \xi_3^2 = 0 \\ \varphi &= \alpha'\ \xi_1^2 + \beta'\ \xi_2^2 + \gamma'\ \xi_3^2 = 0 \\ \psi &= \alpha''\xi_1^2 + \beta''\xi_2^2 + \gamma''\xi_3^2 = 0 \end{aligned}$$

voraussetzen; und die Functionaldeterminante wird daher:

---

*) Vgl. über diese Netze Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2. Bd. bearbeitet von Schröter, Leipzig 1867; und Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.

$$8\,I = \begin{vmatrix} \alpha\,\xi_1 & \beta\,\xi_2 & \gamma\,\xi_3 \\ \alpha'\,\xi_1 & \beta'\,\xi_2 & \gamma'\,\xi_3 \\ \alpha''\,\xi_1 & \beta''\,\xi_2 & \gamma''\,\xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \cdot \xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,.$$

Die Jakobi'*sche Curve des Netzes zerfällt also in die drei Seiten des Polardreiecks*, vorausgesetzt, dass die Determinante der α, β, γ nicht verschwindet, wo dann $I = 0$. Tritt dies jedoch ein, so können wir in unserem Falle setzen:

$$\alpha = \varkappa\alpha' + \lambda\alpha'', \quad \beta = \varkappa\beta' + \lambda\beta'', \quad \gamma = \varkappa\gamma' + \lambda\gamma'';$$

d. h. die drei Kegelschnitte gehören demselben Büschel an. Es gilt aber auch allgemein der Satz:

Wenn die Combinante I der drei quadratischen Formen f, φ, ψ identisch verschwindet, so gehören die entsprechenden drei Kegelschnitte demselben Büschel an.

Um dies zu beweisen, multipliciren wir die Form I mit u_x, wo die u_i ganz beliebige Grössen sind; nur darf u_x nicht Null sein. Benutzen wir dann die Identität III, p. 283, so wird:

$$(a\,a'\,a'')\,u_x = (a'\,a''\,u)\,a_x - (a\,a''\,u)\,a_x' + (a\,a'\,u)\,a_x'',$$

und wenn wir unserer früheren Bezeichnung entsprechend

$$N_{f\varphi} = (a\,a'\,u)\,a_x a_x', \quad N_{\varphi\psi} = (a'\,a''\,u)\,a_x' a_x'', \quad N_{\psi f} = (a''\,a\,u)\,a_x'' a_x$$

setzen, so geht die Bedingung $I = 0$ über in:

$$N_{\varphi f} \cdot \psi = N_{\varphi\psi} \cdot f + N_{\psi f} \cdot \varphi, \text{ q. e. d.}$$

Ein anderes Kegelschnittnetz von speciellem Charakter haben wir schon früher bei Gelegenheit der Kreistheorie erwähnt (vgl. p. 155, f). Dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass alle Curven zwei feste Punkte gemein haben. Man zeigt in diesem Falle an einer speciellen Gleichungsform leicht, dass die Jakobi'sche Curve in die Verbindungslinie der beiden Punkte und in einen durch letztere gehenden Kegelschnitt zerfällt, wie sich übrigens auch aus später abzuleitenden allgemeineren Sätzen über Functionaldeterminanten ergibt. Fallen insbesondere die beiden ausgezeichneten Punkte in die Kreispunkte der Ebene, so besteht die Jacobi'sche Curve aus der unendlich fernen Geraden und dem Orthogonalkreise der drei gegebenen Kreise $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, was sich ebenfalls unschwer nachweisen lässt.

Wir verlassen hiermit diesen Gegenstand, da eine vollständigere Theorie dieser Netze ein genaueres Studium der Curven dritter Ordnung voraussetzt; wir werden deshalb erst bei Betrachtung der letzteren auf jene zurückkommen.

Vierte Abtheilung.

Allgemeine Theorie der algebraischen Curven.

I. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Curve.

An die Theorie der Kegelschnitte würde sich naturgemäss die der Curven dritter Ordnung bez. Klasse anschliessen und in Verbindung mit ihr die Theorie der ternären cubischen Formen. Es lässt sich jedoch eine grosse Zahl der bei denselben hervortretenden Fragen ohne grössere Schwierigkeiten sofort allgemein für Curven beliebiger Ordnung beantworten; und gleichzeitig wird durch diese allgemeineren Betrachtungen von vornherein grössere Uebersichtlichkeit für die mannigfachen invarianten Eigenschaften und covarianten Gebilde gewonnen, denen wir bereits bei Curven dritter Ordnung begegnen. Wenn wir es daher im Folgenden unternehmen, eine allgemeine Theorie der algebraischen Curven in ihren Grundzügen zu entwerfen, so geschieht dies wenigstens zunächst in der Absicht, um Gesichtspunkte zu gewinnen, nach denen die Bearbeitung der Theorie specieller Curven in Angriff zu nehmen ist; und zwar wird uns hauptsächlich die Bestimmung gewisser für eine Curve charakteristischer Zahlen beschäftigen. Selbstverständlich beschränken wir uns dabei auf die Betrachtung projectivischer Eigenschaften der Curven, d. h. solcher Eigenschaften, welche bei beliebigen linearen Transformationen (deren Determinante nur nicht verschwindet) erhalten bleiben. Weiterhin werden sich jedoch hieran Untersuchungen knüpfen, bei denen andere, in gewissem Sinn, allgemeinere Vorstellungen massgebend sind, als wie sie durch die Invariantentheorie der *linearen* Transformationen gegeben werden: Dieselben beziehen sich auf die Frage nach solchen Eigenschaften einer Curve, die bei beliebig *eindeutiger* (nicht linearer) Umformung ungeändert bleiben, und eröffnen somit unserer Forschung ein wesentlich weiteres Gebiet. —

Eine Curve n^{ter} Ordnung ist durch eine Gleichung gegeben, in der die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 zur n^{ten} Dimension vorkommen. Ordnen wir die Glieder derselben etwa nach Potenzen von x_3, so erkennen wir, dass sie im Allgemeinen

$$1 + 2 + 3 \ldots . + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Coëfficienten enthält. Von diesen kann immer einer gleich der Einheit angenommen werden; die Curve ist daher von $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Constanten abhängig. Da nun die Forderung, dass die Curve durch $\frac{n(n+3)}{2}$ gegebene Punkte gehe, ebenso viele *lineare* Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten gibt*), so können wir den Satz aussprechen: *sie ist im Allgemeinen durch* $\frac{n(n+3)}{2}$ *ihrer Punkte bestimmt.* Wir erwähnen dies hier vorläufig, um erst später auf die sich hier anknüpfenden Fragen näher einzugehen. Zunächst wenden wir uns dem Studium des Schnittpunktsystems einer Geraden mit der Curve zu. Die Gleichung der letzteren sei:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = 0.$$

Ihre Schnittpunkte mit der Verbindungslinie zweier Punkte y und z ergeben sich, wenn wir setzen (vgl. p. 70):

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1 \\ x_2 &= \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2 \\ x_3 &= \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3 . \end{aligned}$$

Entwickeln wir alsdann f nach Potenzen von $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, so kommt (vgl. das Entsprechende für binäre Formen auf p. 203):

$$(2) \quad 0 = \varkappa_1^n a_y^n + n \varkappa_1^{n-1} \varkappa_2 a_y^{n-1} a_z + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \varkappa_1^{n-2} \varkappa_2^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \ldots + \varkappa_2^n a_z^n .$$

Das Bildungsgesetz der Coëfficienten dieser Entwicklung in nicht symbolischer Form ist unmittelbar durch den Taylor'schen Satz gegeben. Setzen wir

$$\begin{aligned} D^0 f &= f(y_1, y_2, y_3) = a_y^n \\ D\, f &= a_y^{n-1} a_z \\ D^2 f &= a_y^{n-2} a_z^2 \\ &\ldots\ldots \\ D^k f &= a_y^{n-k} a_z^k , \end{aligned}$$

so haben wir die recurrirende Formel:

$$(3) \quad (n-k)\, a_y^{n-k-1} a_z^{k+1} = z_1 \frac{\partial D^k f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial D^k f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial D^k f}{\partial y_3} = (n-k)\, D^{k+1} f .$$

Ganz in derselben Weise können wir auch umgekehrt jeden Coëfficienten in (2) aus dem nächst folgenden finden, denn es ist

---

*) Vgl. das Entsprechende für Kegelschnitte auf p. 48.

$$(4) \quad (k+1)\, a_y^{n-k} a_z^k = y_1 \frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_3} = (k+1)\, D^k f.$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen

$$Df = 0, \quad D^2 f = 0, \ldots D^k f = 0, \ldots D^n f = 0$$

ist nach dem über binäre Formen Gesagten (vgl. p. 204) bekannt. Durch die Substitution (1) haben wir auf der Verbindungslinie von y und z eine binäre Coordinatenbestimmung $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ eingeführt. Die den n Wurzeln von (2) entsprechenden Schnittpunkte der Geraden $\overline{yz}$ mit der Curve, geben die n Grundpunkte einer binären Form. Die Gleichungen $D^k f = 0$ stellen daher auf der Linie yz die verschiedenen Polarsysteme des Punktes z in Bezug auf die Grundpunkte dar. So ist $Df = 0$ die Bedingung dafür, dass y der ersten Polargruppe von z, oder z der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polargruppe von y in Bezug auf jenes Schnittpunktsystem angehöre. Lassen wir daher in (2) y constant und z variabel sein, *so gibt die Gleichung*

$$D^k f = 0$$

eine Curve k^{ter} Ordnung, deren k Schnittpunkte mit einer durch y gehenden Geraden das $(n-k)^{te}$ Polarsystem des Punktes y in Bezug auf die n Schnittpunkte der Geraden mit der Grundcurve $f = 0$ bilden. Die Curve selbst wird daher als *die $(n-k)^{te}$ Polarcurve* oder *Polare* von y in Bezug auf die Grundcurve bezeichnet.*) Von besonderer Bedeutung sind jedoch die Schnittpunkte einer jeden Polaren $D^k f = 0$ mit der nächst höheren $D^{k+1} f = 0$. Es ergibt sich dies, wenn man die Gleichung der Tangente eines Curvenpunktes näher betrachtet.

Es möge nämlich der Punkt y auf der Gurve $f = 0$ liegen, also

$$D^0 f = a_y^n = 0$$

sein. Alsdann fällt in (2) das erste Glied fort, und es sondert sich ein Factor $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ ab; die Gleichung hat eine Wurzel $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = 0$, wie es sein muss. Stellen wir nun die Forderung, dass ein weiterer Schnittpunkt der Geraden yz mit y zusammenfalle, d. h. dass sich in (2) noch ein Factor $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ absondere, so muss ausser $D^0 f$ auch noch Df verschwinden, was eine lineare Gleichung für z gibt. Eine gerade Linie, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, haben wir aber als Tangente bezeichnet (vgl. p. 27). *Es ist daher die Gleichung der Tangente von $f = 0$ im Punkte y* (in den Veränderlichen z):

$$Df = a_y^{n-1} a_z = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} z_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} z_3 \right) = 0,$$

*) Für die Entstehung und Entwicklung dieser Theorie vgl. die Anmerkung auf p. 203 und 204.

und die *Coordinaten der Tangente* sind:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varrho u_1 &= \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \varrho u_2 &= \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \varrho u_3 &= \frac{\partial f}{\partial y_3}. \end{aligned}$$

Es bietet sich uns hier die Aufgabe, mittelst dieser Gleichungen den Uebergang von der Gleichung der Curve in Punktcoordinaten zu der in Liniencoordinaten zu bewerkstelligen. Letztere Gleichung würde sich durch Elimination von ϱ, y_1, y_2, y_3 aus den drei Gleichungen (5) und aus

$$nf(x_1, x_2, x_3) = \varrho(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = 0$$

ergeben; und so sind wir in der That bei den Kegelschnitten zum Ziele gelangt (p. 78). Dies Eliminationsproblem ist jedoch im Allgemeinen ein sehr hohes, und die directe Auflösung desselben bietet nicht geringe Schwierigkeiten. Um so wichtiger ist es, dass wir durch die symbolischen Methoden der Invariantentheorie in der Lage waren, mittelst des Uebertragungsprincipes, die ganze Frage in das binäre Gebiet zu verweisen, so dass es nur nöthig ist, die Discriminantenbildung für eine binäre Form zu leisten (vgl. p. 279); und hierfür hat man allgemeine, mehr übersichtliche Methoden. Zugleich ergab dieses Verfahren für die Klasse der Curve n^{ter} Ordnung die Zahl $n(n-1)$, während der Grad in den Coëfficienten gleich $2(n-1)$ gefunden wurde. Zu ersterem Resultate gelangt man auch durch folgende Ueberlegung, die uns gleichzeitig zu den Polaren zurückführt.

Nehmen wir in der Gleichung der Tangente

$$a_y^{n-1} a_z = 0$$

den Punkt z constant und y variabel, so bestimmt dieselbe zusammen mit

$$a_y^n = 0$$

auf der Grundcurve diejenigen Punkte y, deren Tangenten durch z gehen, d. h. die Berührungspunkte dieser Tangenten. Diese beiden Curven von der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung schneiden sich in $n(n-1)$ Punkten; ebensoviele Tangenten kann man also von z an die Curve legen, und somit *ist die Klasse einer Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen gleich $n(n-1)$.**) Ganz dualistisch entsprechend muss auch *die Ordnung einer Curve k^{ter} Klasse gleich $k(k-1)$* sein. Indem man so von der gegebenen Curve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse dieselbe Ueberlegung rückwärts anstellt, würde man zu dem Widerspruche kommen, dass die

---

*) Die Bestimmung dieser Zahl gab Poncelet: Annales de Gergonne, t. 8, p. 214.

gegebene Curve n^{ter} Ordnung von der Ordnung $n(n-1)(n^2-n-1)$ sei. Dieser Widerspruch löst sich jedoch bei genauerer Ueberlegung; denn eine Curve, welche als Punktgebilde von der allgemeinsten Art ist, hat, als Liniengebilde aufgefasst, immer sehr specielle Eigenschaften. Bei den Kegelschnitten, welche von der zweiten Ordnung und Klasse sind, tritt diese Eigenthümlichkeit noch nicht in der Weise hervor. Doch kann uns eine in ein Linienpaar ausartende Curve zweiter Ordnung immerhin schon als Beispiel für solche Vorkommnisse dienen: es war uns nicht mehr möglich, die ganze Curve in Liniencoordinaten darzustellen, sondern die betreffende Gleichung ergab nur doppelt zählend den Scheitel des Linienpaares; der Rückgang von dieser Liniencoordinatengleichung zur Punktgleichung verlor dagegen überhaupt jede Bedeutung. Eben deshalb kann dieses Beispiel noch keine Anschauung für die allgemeinen Fälle geben: Ein Linienpaar ist eben als Punktgebilde eine Curve *zweiter* Ordnung, *nullter* Klasse. Auf die Gestaltung ähnlicher Verhältnisse bei höheren Curven können wir erst später eingehen.

Der hier befolgte Weg zur Bestimmung der $n(n-1)$ von z ausgehenden Tangenten gibt unmittelbar den Satz:

Die $n(n-1)$ Berührungspunkte der von einem Punkte an eine Curve n^{ter} Ordnung gelegten Tangenten bilden das vollständige Schnittpunktsystem der Curve mit einer Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung, der ersten Polare von z.

Für $n=1$ sagt dieser Satz noch nichts Besonderes aus, denn 2 Punkte liegen immer auf einer Geraden; wohl aber für höhere Curven. So haben wir nach ihm bei Curven dritter Ordnung 6 Berührungspunkte, welche auf einem Kegelschnitte liegen, während letzterer doch schon durch 5 Punkte bestimmt ist. Ueberhaupt ist eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung nach Obigem durch $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte bestimmt; und unser Satz sagt aus, dass von jenen $n(n-1)$ Berührungspunkten die übrigen

$$n(n-1)-\frac{(n-1)(n+2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

auf derselben Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung liegen.

In ähnlicher Weise sind $D^2f=0$, $D^3f=0\ldots$ Curven der Ordnungen $n-2$, $n-3\ldots$, welche in ganz bestimmter Weise zu einem Punkte z gehören. Nach dem für dieselben angegebenen Bildungsgesetze lässt sich der geometrische Zusammenhang derselben dahin aussprechen, dass wie $Df=0$ die erste Polare von z in Bezug auf $f=0$, so $D^2f=0$ die erste Polare von z in Bezug auf $Df=0$, $D^3f=0$ die in Bezug auf $D^2f=0$ u. s. w. Man kann demnach überhaupt allgemein den folgenden Satz aussprechen:

Die k^{te} Polare von z in Bezug auf die i^{te} Polare von z nach $f = 0$ ist die $(i + k)^{te}$ Polare von z nach $f = 0$.

Betrachtet man gleichzeitig mehrere Punkte und bildet immer die k^{te} Polare des einen in Bezug auf die i^{te} des andern, so kann man eine Reihe ähnlicher Sätze aussprechen, wie wir dieselben bei den Punktsystemen auf einer Geraden erhalten haben (vgl. p. 204). Es ist daher unnöthig auf dieselben noch näher wieder einzugehen; man kann sie vielmehr von den dort gegebenen unmittelbar ablesen. Wir erwähnen als Beispiel nur einen Satz, welcher als Verallgemeinerung der bei den Kegelschnitten auftretenden Polarenbeziehung erscheint. Aus der Gleichung

$$a_y^{n-k} a_z^k = 0$$

folgt nämlich: *Liegt y auf der k^{ten} Polare von z, so liegt z auf der $(n - k)^{ten}$ Polare von y.*

Die $(n - 1)^{te}$ Polare eines Punktes y endlich ist stets eine gerade Linie. Liegt der Punkt insbesondere auf der Grundcurve, so wird dieselbe nach (5) zur Tangente. Diese Gerade ist aber immer gleichzeitig lineare Polare von y in Bezug auf alle höheren Polarcurven, also etwa die $(n - i - 1)^{te}$ Polare in Bezug auf die i^{te} Polare von y.

Liegt also der Pol auf der Grundcurve, so gehen alle seine Polaren durch ihn hindurch und berühren in ihm die Grundcurve.

Da hiernach die erste Polare eines Punktes der Curve in diesem berührt, so fallen von den $n(n - 1)$ Tangenten, die man von ihm an die Curve ziehen kann, zwei in seine eigene Tangente zusammen. *Von einem Punkte der Curve kann man also nur noch $n(n - 1) - 2$ Tangenten an dieselbe legen.*

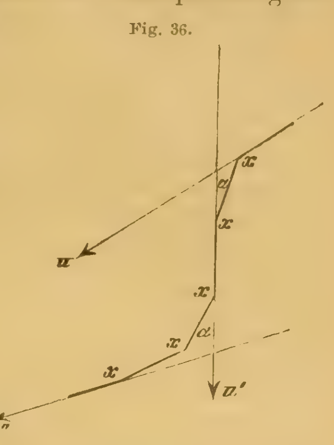
Die Tangenten hatten wir dadurch bestimmt, dass wir eine Gerade die Curve in *zwei* zusammenfallenden Punkten schneiden liessen. Wir können nun weiter nach solchen Geraden fragen, welche die Curve in *drei* consecutiven Punkten treffen. Diese Tangenten werden *Wende-* (oder *Inflexions-*) *Tangenten* genannt; ihre Berührungspunkte *Wende-* oder *Inflexions-Punkte*. Die Bezeichnung rührt daher, dass in einem solchen Punkte die Curve ihre Krümmung ändert, wie in den Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie in der Regel gezeigt wird (vgl. Fig. 35). Wir können uns von der Gestalt der Curve in der Nähe eines Wendepunktes auch durch folgende Ueberlegung ein Bild machen.*) Im Allgemeinen wird sich die Tangente continuirlich um die Curve drehen, während ihr Berührungspunkt in gleichem Sinne fortschreitet. In einem Wendepunkte fallen nun zwei successive

Fig. 35.

*) Vgl. Plücker: Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, 2. Abschnitt, §. 3.

Tangenten zusammen: während also der Punkt gleichmässig fortschreitet, wird die Drehung seiner Tangente im Wendepunkte gleich Null; letztere steht einen Augenblick still, um sodann ihre Drehung gemäss den Gesetzen der Continuität in entgegengesetztem Sinne fortzusetzen. Es wird dies recht deutlich, wenn wir uns die Curve für den Augenblick, wie in Fig. 36 durch ein Polygon ersetzt denken. Der beschreibende Punkt (x) rückt auf der umhüllenden Geraden (u) immer nach derselben Richtung fort; diese Linie aber hat sich von der Lage u bis zur Lage u' in demselben Sinne, dann aber von u' bis u'' in entgegengesetztem Sinne gedreht. Wird die Bewegung nun continuirlich,

Fig. 36.



lassen wir also das Polygon in eine Curve übergehen, so ist die Grösse der Tangentendrehung bei der Lage u' Null. Während also die Elementarseiten der Curve mit den früheren und späteren vergleichbar bleiben, werden an u' die Contingenzwinkel α gegen die früheren und späteren unendlich klein; und *so geht in der That Fig. 36 in Fig. 35 über.*

Die analytische Bedingung für einen Wendepunkt erhalten wir durch die Forderung, dass von den Schnittpunkten der Geraden $\overline{yz}$ mit der Curve drei Punkte in y zusammenfallen. Es muss sich dann in der Gleichung (2) ein Factor $\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^3$ absondern, d. h. es müssen gleichzeitig die drei Bedingungen bestehen:

$$D^0 f = a_y{}^n \qquad = 0$$
$$D\ f = a_y{}^{n-1} a_z \ = 0$$
$$D^2 f = a_y{}^{n-2} a_z{}^2 = 0.$$

Ist y ein Wendepunkt, so müssen dieser Ableitung zufolge die letzten beiden Gleichungen zusammen bestehen, sobald z auf der Tangente von y liegt. Die Gleichung $D^2 f = 0$ kann aber nur für jeden Punkt dieser Tangente erfüllt sein, wenn $D^2 f$ den Ausdruck Df als Factor enthält. Der Kegelschnitt

$$D^2 f = \Sigma f_{ik} z_i z_k = 0,$$

wo f_{ik} für $\frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_k}$ gesetzt ist, muss daher in ein Linienpaar zerfallen. Die Bedingung dafür wird durch das Verschwinden seiner Determinante, d. h. der aus den zweiten Differentialquotien von f gebildeten, gegeben, nämlich*):

*) Der Zahlenfactor $\frac{1}{6}$ ist hinzugefügt, damit Δ in der symbolischen Form ohne einen solchen definirt ist.

$$\tfrac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

In der symbolischen Form wird diese, analog wie bei den binären Formen, als Hesse'*sche Determinante* bezeichnete Form wegen

$$f_{ik} = a_y^{n-2} a_i a_k = b_y^{n-2} b_i b_k = c_y^{n-2} c_i c_k$$

gegeben durch:

$$a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (abc)\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2},$$

oder, wenn wir a, b, c in jeder Weise vertauschen und die Summe aller so entstehenden Ausdrücke nehmen (vgl. p. 268):

$$\Delta = (abc)^2\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2}. \tag{6}$$

Die Wendepunkte werden also auf der Grundcurve durch eine Curve $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Delta = 0$, ausgeschnitten. Es ist nämlich auch leicht zu zeigen, dass *jeder* dieser Schnittpunkte einen Wendepunkt von $f = 0$ liefert. Setzt man, entsprechend der Bedingung $\Delta = 0$:

$$f_{ik} = u_i v_k + v_i u_k ,$$

so wird

$$D^2 f = 2\, u_z v_z , \quad Df = u_y v_z + v_y u_z , \quad D^0 f = 2\, u_y v_y .$$

Ist nun $D^0 f = 0$, so muss u_y oder v_y verschwinden. Sei $u_y = 0$; dann ist $Df = u_z v_y$, also von u_z nur um eine Constante verschieden und mithin ein Factor von $D^2 f$, w. z. b. w. Wir haben also den Satz:

Die Wendepunkte sind die Schnittpunkte der Grundcurve $f = 0$ mit der Hesse'*schen Curve $\Delta = 0$; ihre Anzahl ist daher gleich $3n(n-2)$.**)

Es ist jedoch keineswegs umgekehrt die Curve $\Delta = 0$ durch die Wendepunkte allein bestimmt; sondern man kann dieselbe durch irgend eine Curve des Systems

$$\Delta + Mf = 0$$

ersetzen, wo M ein beliebiger Ausdruck von der Ordnung $3(n-2) - n = 2n - 6$ ist. Diese Bemerkung ist für Curven dritter Ordnung besonders wichtig; denn durch passende Bestimmung des Factors M gelingt es bei diesen die Coordinaten der Wendepunkte durch blosses Wurzelziehen wirklich anzugeben. —

Mehr als drei Schnittpunkte der Tangente mit der Curve können

*) Vgl. Hesse: Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung; Crelle's Journal, Bd. 28. Die Zahl der Wendepunkte wurde von Plücker gegeben: ib. Bd. 12.

niemals in den Berührungspunkt zusammenfallen, es sei denn, dass die Coëfficienten von f besonderen Bedingungen genügen.*) Wir haben nämlich an $f=0$ einfach unendlich viele Tangenten und können denselben also nur *eine* Bedingung auferlegen, um eine bestimmte Zahl zu erhalten.

Die obige Bestimmungsweise der Wendepunkte wird jedoch illusorisch, wenn es Punkte auf der Curve gibt, deren Tangente überhaupt unbestimmt ist, was dann ebenfalls nach sich zieht, dass die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare in ein Linienpaar zerfällt. Es wird dies immer eintreten, wenn die Curve sich in einem Punkte selbst durchsetzt (vgl. Fig. 37), wo dann in der That zwei verschiedene Tangenten möglich sind. In einem solchen „*Doppelpunkte der Curve*" kann daher die Gleichung der Tangente nichts mehr aussagen, ihre Coordinaten (5) müssen sämmtlich verschwinden. *Wir haben somit für einen Doppelpunkt y die Gleichungen* $\left(f_i = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$:

Fig. 37.

$$(7)\quad f_1 = a_y^{n-1} a_1 = 0, \quad f_2 = a_y^{n-1} a_2 = 0, \quad f_3 = a_y^{n-1} a_3 = 0.$$

Damit dieselben erfüllt sind, muss nicht nur y eine besondere Lage haben, sondern es muss eine Relation zwischen den Coëfficienten der Curve bestehen; denn wir können die y aus den drei Gleichungen (7) eliminiren. Die Curvengleichung $f=0$ braucht dabei nicht berücksichtigt zu werden, da sie wegen

$$f = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3$$

von selbst erfüllt ist. Die Ausführung dieser Elimination wird zu einer Gleichung

$$R = 0$$

führen, deren Bildungsgesetz in übersichtlicher Weise anzugeben jedoch bisher nicht möglich ist.**) Den Ausdruck R nennt man alsdann *die Discriminante der Curve;* sie ist natürlich eine Invariante der Form f; für Kegelschnitte ist sie z. B. mit der Determinante $A = (abc)^2$ identisch. Wir können auch leicht den Grad der Discriminante in den Coëfficienten von f angeben. Es gilt nämlich überhaupt der Satz:

Die Resultante dreier Gleichungen, bez. von der m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Ordnung in drei homogenen Veränderlichen, ist vom Grade np in den

---

*) Vgl. über solche höhere Ausnahmspunkte: Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes, Genève 1750, p. 403, und Cayley: Crelle's Journal, Bd. 34.

**) Allerdings hat Sylvester ein Verfahren angegeben, welches die Resultante aus drei Gleichungen von gleicher Ordnung in Determinantenform gibt. Es tritt dabei jedoch der Invariantencharakter der Resultante nicht deutlich hervor. Vgl. Salmon: Lessons introductory etc. (p. 82 in Fiedler's Uebersetzung).

Coëfficienten der ersten, vom Grade mp in denen der zweiten, vom Grade mn in denen der dritten Gleichung. Zum Beweise dieses Satzes denke man sich etwa die Coordinaten der np gemeinsamen Punkte der beiden letzten Curven berechnet. Sollen dann alle drei Curven einen gemeinsamen Punkt haben, so müssen die Coordinaten eines dieser np Punkte die erste Gleichung identisch befriedigen. Man wird daher die Resultante erhalten, wenn man das Product der np Ausdrücke bildet, welche aus der ersten Gleichung entstehen, wenn man darin bez. die Coordinaten der erwähnten np Punkte einsetzt. Die letzteren hängen nur von den Coëfficienten der zweiten und dritten Gleichung ab; das Product ist daher vom Grade np in den Coëfficienten der ersten Gleichung; und also, weil bei der Resultantenbildung alle drei Gleichungen symmetrisch benutzt werden müssen, vom Grade mp in denen der zweiten, vom Grade mn in denen der dritten Gleichung.

Die Anwendung dieses Satzes auf die Gleichungen (7) ergibt nun unmittelbar:

Die Discriminante einer ternären Form n^{ter} Ordnung, d. h. die Invariante, deren Verschwinden die Bedingung für die Existenz eines Doppelpunktes der entsprechenden Curve n^{ter} Ordnung gibt, ist vom Grade $3(n-1)^2$.

Eine jede durch einen Doppelpunkt y gehende Gerade hat in demselben zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Curve; in der That gibt die Gleichung (2) dann immer zwei Wurzeln $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = 0$. Wir können nun, wie bei einem beliebigen Punkte der Curve nach seiner Tangente, so hier nach *solchen Strahlen* fragen, *welche in y die Curve dreimal schneiden.* Alsdann muss z so liegen, dass auch

$$D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2 = \Sigma f_{ik} z_i z_k = 0.$$

Da aber y ein Doppelpunkt ist, so haben wir nach (7)

$$0 = f_i = f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3, \quad (i = 1, 2, 3),$$

also die Determinante der f_{ik} gleich Null. *Daher gibt die $(n-2)^{te}$ Polare des Doppelpunktes*

$$D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2 = 0$$

ein Linienpaar: das Product seiner beiden Tangenten; wo das Wort *Tangente* insofern berechtigt ist, als von den drei in y zusammenfallenden Schnittpunkten einer solchen Geraden, zwei einander consecutiv auf dem einen durch y gehenden Curvenzweige liegen, während der dritte als einfacher Schnittpunkt mit dem andern Zweige anzusehen ist (vgl. Fig. 37). Durch das Verschwinden der Determinante Δ ist gleichzeitig angezeigt, dass das Vorkommen von Doppelpunkten bei einer Curve auf die Anzahl der Wendepunkte von Einfluss ist, indem

durch den Doppelpunkt eine gewisse Zahl von Schnittpunkten beider Curven absorbirt wird; die genaue Bestimmung dieses Einflusses werden wir später geben.

Um die Coordinaten u_i, v_i der Tangenten im Doppelpunkte zu finden, haben wir also zu setzen:

$$\begin{array}{ll} f_{11} = u_1 v_1 & 2 f_{12} = u_1 v_2 + v_1 u_2 \\ f_{22} = u_2 v_2 & 2 f_{23} = u_2 v_3 + v_2 u_3 \\ f_{33} = u_3 v_3 & 2 f_{31} = u_3 v_1 + v_3 u_1, \end{array}$$

und für die Auflösung dieser Gleichungen sind in der Kegelschnitttheorie allgemeine Methoden gegeben (vgl. p. 103). Insbesondere kann es jedoch eintreten, dass die beiden Linien u, v in eine einzige zusammenfallen (vgl. Fig. 38); alsdann wird:

Fig. 38.

$$\begin{array}{ll} f_{11} = u_1^2 & f_{12} = u_1 v_2 \\ f_{22} = u_2^2 & f_{23} = u_2 v_3 \\ f_{33} = u_3^2 & f_{31} = u_3 v_1 . \end{array}$$

Ein solcher Punkt der Curve wird als Rückkehrpunkt bezeichnet; er ist also dadurch charakterisirt, dass für ihn die zweiten Differentialquotienten von f gleich den Quadraten und Producten dreier Grössen werden.

In derselben Weise, wie wir das identische Verschwinden von Df als Kennzeichen eines Doppelpunktes benutzten, kann man nun weiter gehen: Ist $D^2 f = 0$, so entsteht zunächst ein dreifacher Punkt, u. s. f.; *ist für einen Punkt $D^{k-1} f$ identisch Null, so hat die Curve in ihm einen k-fachen Punkt.* Es ist dabei unter einem r-fachen Punkte ein solcher verstanden, durch den r verschiedene Zweige der Curve hindurchgehen, d. h. *in welchem eine jede durch ihn gehende Gerade r vereinigt gelegene Punkte mit der Curve gemein hat.* Es verschwinden alsdann nach dem in Gleichung (4) ausgesprochenen Bildungsgesetze auch alle anderen Polaren Df, $D^2 f \ldots D^{k-2} f$ identisch; und *die Gleichung*

$$D^k f = a_y^{n-k} a_z^k = 0$$

gibt dann das Product der k verschiedenen Tangenten des Punktes. Zunächst nämlich hat diese Curve in y ebenfalls einen k-fachen Punkt, denn die $(k-1)^{\text{te}}$ Polare von y in Bezug auf sie ist mit $D^{k-1} f$ identisch, und verschwindet also ebenfalls unabhängig von z. Eine Curve k^{ter} Ordnung mit k-fachem Punkte muss aber immer in k gerade Linien zerfallen; denn sonst würde eine durch den k-fachen Punkt gehende Gerade noch in einem oder mehreren Punkten schneiden können, und somit mehr als k Punkte mit der Curve gemein haben, was nicht möglich ist. Diese Linien müssen die verschiedenen Zweige der Grundcurve in y berühren: denn betrachten wir einen zu y be-

nachbarten Punkt von $D^k f$, setzen also $z_i = y_i + dy_i$, so haben wir zur Bestimmung der k Fortschreitungsrichtungen auf der Curve $D^k f = 0$ dieselbe Gleichung:

$$a_y^{n-k} a_{dy}^k = 0,$$

wie zur Bestimmung der Fortschreitungsrichtungen auf der Grundcurve; womit obige Behauptung bewiesen ist. Näher werden wir weiterhin noch auf die Natur der vielfachen Punkte eingehen; wir werden dabei in erhöhtem Maasse die Bedeutung der Polarentheorie für die Untersuchung solcher Punkte und für die Bestimmung ihres Einflusses auf die Zahl der Wendepunkte, die Klasse der Curve etc. erkennen.

Von nicht geringerer Wichtigkeit wird jedoch die Polarentheorie, wenn man sich die Aufgabe stellt, symbolische Bildungen geometrisch zu deuten. Das Uebertragungsprincip gab uns ein Mittel, dies für die zugehörigen Formen zu leisten, vorausgesetzt, dass dieselben keine Factoren vom Typus (abc) enthalten*); der Begriff der Polarenbildung erlaubt nun dasselbe für alle Zwischenformen, welche nur aus symbolischen Factoren vom Typus (abu) und a_x zusammengesetzt sind. Lassen wir nämlich zunächst alle in einer solchen Form vorkommenden Factoren a_x^α, b_x^β ... fort, so können wir die Symbole a, b ... in dem übrig bleibenden Ausdrucke bez. als Symbole für die α^{te}, β^{te} ... Polare des Punktes x ansehen, wie sogleich an einem Beispiele näher erläutert werden soll. Der geometrische Satz, welcher durch Nullsetzen des so umgeformten Ausdrucks dargestellt wird, ist dann aber nach dem Uebertragungsprincipe gegeben. Auf Zwischenformen der hier gemeinten Art kommt man z. B., wenn man nicht das Product der $n(n-1)$ von einem Punkte x an eine Curve gehenden Tangenten aufstellt, sondern das Product der Gleichungen ihrer Berührungspunkte in Liniencoordinaten. Dieselben sind als Schnittpunkte der Grundcurve $a_z^n = 0$ und der ersten Polare von x $a_z^{n-1} a_x = 0$ gegeben. Man hat also nur die Resultante zweier binären Formen a_z^n, α_z^{n-1} von der n^{ten} und $(n-1)^{ten}$ Ordnung zu bilden, auf dieselbe das Uebertragungsprincip anzuwenden, alle n Symbole von α_z^{n-1}, welche in der Resultante vorkommen, durch solche von a_z^n zu ersetzen und n Factoren b_x, c_x ... hinzuzufügen. So ist z. B. das Product der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte x an einen Kegelschnitt $a_z^2 = 0$ gegeben durch (vgl. p. 285)

$$(abu)(acu) b_x c_x = 0.$$

Wir haben hier eine quadratische Form a_z^2 und eine lineare Form $\alpha_z = \beta_z = a_x a_z$; deren Resultante gleich $(a\alpha)(a\beta)$ ist. Ergänzt man in ihr die Determinanten durch Hinzufügen von u zu dreiglie-

*) Vgl. jedoch eine Anmerkung zu der letzten Abtheilung dieses Bandes bei Gelegenheit der Theorie der lineo-linearen Zwischenformen (Connexe).

drigen, ersetzt α, β bez. durch b, c und fügt die Factoren b_x, c_x hinzu, so entsteht die genannte Bildung. Ein anderes Beispiel gibt die Gleichung:

$$(8) \qquad (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Nehmen wir x constant, so stellt dieselbe die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare von x in Liniencoordinaten dar. Nehmen wir u constant, so gibt sie also eine Curve der Ordnung $2(n-2)$ als Ort der Punkte, deren $(n-2)^{\text{te}}$ Polaren die gegebene Gerade u berühren. *Auf jeder Geraden gibt es daher $2(n-2)$ Punkte, deren $(n-2)^{te}$ Polaren von derselben Geraden berührt werden.*

Auf dieselbe Gleichung (8) werden wir auch durch die folgende Ueberlegung geführt. Wir fragen nach solchen Punkten y auf einer Geraden u, deren erste Polare von eben dieser Geraden in einem Punkte x berührt wird. Die Coordinaten der Tangente dieser Polare im Punkte x sind nun:

$$= a_x^{n-2} a_y a_i = f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3.$$

Diese müssen mit den Coordinaten der gegebenen Geraden proportional werden; also haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_{11} y_1 + f_{12} y_2 + f_{13} y_3 &= \varrho u_1 \\ f_{21} y_1 + f_{22} y_2 + f_{23} y_3 &= \varrho u_2 \\ f_{31} y_1 + f_{32} y_2 + f_{33} y_3 &= \varrho u_3 \\ u_1 \; y_1 + u_2 \; y_2 + u_3 \; y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination von ϱ und y_1, y_2, y_3 ergibt dann neben $u_x = 0$ wieder die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Aus diesen Beziehungen folgern wir die Sätze:

Auf jeder Geraden gibt es $2(n-2)$ solcher Punkte, deren erste Polare von eben dieser Geraden berührt wird. Die $(n-2)^{ten}$ Polaren der $2(n-2)$ Berührungspunkte werden dann von derselben Geraden berührt.

Durch jeden Punkt lassen sich zwei solche Gerade ziehen, in deren jeder ein Punkt die Gerade selbst der Art zur Tangente seiner ersten Polare hat, dass der Berührungspunkt in dem gegebenen Punkte liegt. Es sind dies die beiden von dem Punkte an seine $(n-2)^{te}$ Polare zu legenden Tangenten.

Die Hesse'*sche Curve ist der Ort der Punkte, für welche diese*

*beiden Linien zusammenfallen.**) Soll nämlich letzteres eintreten, so muss entweder der Pol auf seiner conischen (d. i. $(n-2)^{ten}$) Polare liegen, was nur für die Punkte der Grundcurve eintritt, oder die conische Polare muss zerfallen, wo dann die beiden Tangenten in die Verbindungslinie des Poles mit dem Scheitel des Linienpaares zusammenfallen.

Durch eine ähnliche Reciprocität zwischen der $(n-2)^{ten}$ und 1ten Polare eines Punktes, wie sie uns in diesen Sätzen entgegentritt, können wir auch die Bedeutung der Hesse'schen Curve in anderer Form als bisher aussprechen. Stellen wir nämlich die Forderung, dass die erste Polare einen Doppelpunkt x habe, so müssen für denselben nach (7) die drei Gleichungen bestehen:

$$\frac{1}{n-1}\,\frac{\partial Df}{\partial x_i} = a_x^{n-2} a_y a_i = 0 .$$

Eliminiren wir aus diesen die y, so kommen wir wieder auf die Bedingung:

$$a_1 b_2 c_3 \,(abc)\, a_x b_x c_x = 0 ,$$

wo der links stehende Ausdruck sich wegen der Vertauschbarkeit von a, b, c nur um einen Zahlenfactor von Δ unterscheidet.

Die Hesse'*sche Curve ist daher gleichzeitig der Ort der Punkte, deren $(n-2)^{te}$ Polare einen Doppelpunkt hat, und der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren.*

Als Beispiel für die Fälle der aus der Polarentheorie fliessenden geometrischen Sätze sei endlich noch das Folgende erwähnt. Es ist die Gleichung der zur ersten Polare von y:

$$Df = a_x^{n-1} a_y = 0$$

als Grundcurve gehörigen Hesse'schen Curve, welche auf jener die Wendepunkte ausschneidet, gegeben durch:

$$\Delta_{Df} = (abc)^2\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} a_y b_y c_y = 0. \tag{9}$$

Nehmen wir hierin die x als gegeben an, so ergibt sich in Verbindung mit $Df = 0$ der Satz:

Es gibt auf der $(n-1)^{ten}$ Polare eines Punktes x immer drei verschiedene Pole, deren erste Polaren in dem Punkte x einen Wendepunkt haben.

---

*) Vgl. Clebsch: Ueber eine Klasse von Eliminationsproblemen und über einige Sätze aus der Theorie der Polaren; Borchardt's Journal, Bd. 58. Die zahlreichen Sätze, welche hier über Polaren aufgestellt werden, gründen sich auf eine allgemeine Methode, aus m Gleichungen mit m homogen vorkommenden Veränderlichen, von denen eine von beliebiger Ordnung, eine quadratisch ist, und $m-2$ linear sind, die Veränderlichen zu eliminiren. Mittelst dieser Methode wird z. B. die Curve untersucht, welche die Berührungspunkte x durchlaufen, wenn die Linie u eine gegebene Curve umhüllt.

Rückt nun der Pol y auf einer Curve $\varphi(y) = 0$ fort, so beschreiben die Wendepunkte seiner ersten Polare eine Curve, welche aus $Df = 0$, $\Delta_{Df} = 0$, $\varphi = 0$ durch Elimination der y erhalten wird. Ist die Curve φ insbesondere eine Gerade

$$u_y = 0,$$

so kann man wegen $Df = a_x^{n-1} a_y = 0$ in Δ_{Df} setzen:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_2 f_3 - u_3 f_2 = (u_2 a_3 - u_3 a_2)\, a_x^{n-1} \\ y_2 &= u_3 f_1 - u_1 f_3 = (u_3 a_1 - u_1 a_3)\, a_x^{n-1} \\ y_3 &= u_1 f_2 - u_2 f_1 = (u_1 a_2 - u_2 a_1)\, a_x^{n-1}. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man als Gleichung der gesuchten Curve, wenn man in diesen drei Gleichungen die Symbole a bez. durch d, e, f ersetzt denkt:

$$(abc)^2 (adu)(beu)(cfu)\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-1} e_x^{n-1} f_x^{n-1} = 0. \tag{10}$$

Wenn also der Pol eine Gerade beschreibt, so durchlaufen die Wendepunkte der ersten Polare eine Curve von der Ordnung $6(n-2)$. *Sämmtliche Polaren, deren Pole auf der Geraden liegen, schneiden sich in* $(n-1)^2$ *Punkten, den Lösungen der Gleichungen:*

$$\varrho u_1 = f_1, \quad \varrho u_2 = f_2, \quad \varrho u_3 = f_3. \tag{11}$$

Diese $(n-1)^2$ *Punkte sind dreifache Punkte der Curve* (10). Letzteres folgt daraus, dass für $\varrho u_i = f_i = d_x^{n-1} d_i = \ldots$ jeder der drei Factoren $(adu)\, d_x^{n-1}$, $(beu)\, e_x^{n-1}$, $(cfu)\, f_x^{n-1}$ identisch verschwindet, und somit auch jeder zweite Differentialquotient des Ausdrucks (10) nach den x_i.

Betrachtet man dagegen in der Gleichung (10) *die x als constant, die u als veränderlich, so gibt dieselbe das Product dreier linearer Factoren; es sind dies die Gleichungen der vorhin erwähnten drei Pole, deren erste Polaren in x einen Wendepunkt haben.**)

Aus (11) folgt weiter:

Wenn die Gerade u eine Curve $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ *von der m^{ten} Klasse umhüllt, so beschreiben die* $(n-1)$ *Schnittpunkte der ersten Polaren die Curve* $m(n-1)^{ter}$ *Ordnung* $\varphi(f_1, f_2, f_3) = 0$. *Dreht sich insbesondere die Gerade um einen Punkt ξ, so ist die beschriebene Curve die erste Polare von ξ.*

II. Die singulären Punkte.

Wir kehren zum Studium der vielfachen Punkte zurück; wir beginnen mit dem Doppelpunkte. Die Natur eines solchen hängt davon

---

*) Vgl. Clebsch: Ueber Curven vierter Ordnung; Borchardt's Journal, Bd. 59.

ab, ob die linearen Factoren von $D^2 f$ reell *(eigentlicher Doppelpunkt)*, imaginär *(isolirter Punkt)* oder zusammenfallend *(Rückkehrpunkt)* sind. Wir wollen nun das Verhalten der Curve in der Nähe des betreffenden Punktes eingehend untersuchen. Zu dem Zwecke verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Doppelpunkt, so dass die Coordinaten des letzteren werden:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Ziehen wir dann durch ihn eine beliebige Gerade, so können wir die Coordinaten x_1, x_2 eines Punktes der Geraden auffassen als Coordinaten ihres Schnittpunktes mit der dritten Seite $x_3 = 0$, die dritte Coordinate eines solchen Punktes dagegen als einen für die einzelnen Punkte der gezogenen Geraden variirenden Parameter. Wir fragen nach den Schnittpunkten einer solchen Linie mit der Curve und müssen die Gleichung derselben daher nach Potenzen des Parameters x_3 entwickeln. Setzen wir also

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$

so wird

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = f^{(0)} z^n + f^{(1)} z^{n-1} + f^{(2)} z^{n-2} + \ldots + f^{(n)},$$

wo die Functionen $f^{(i)}$ homogen in x, y und von so hoher Ordnung sind, als ihr oberer Index angibt. Soll der Punkt $x = 0$, $y = 0$ auf der Curve liegen, wie wir es annehmen, so muss der von x, y unabhängige Factor $f^{(0)}$ verschwinden. Für einen Doppelpunkt muss aber auch der zweite Term identisch Null sein, damit ein Factor z^2 vortritt, d. h. zwei Schnittpunkte der betrachteten Linie in den Anfangspunkt zusammenfallen. Im Allgemeinen dagegen gibt die Gleichung

$$(2) \qquad f^{(1)} = ax + by = 0$$

die *Tangente im Anfangspunkte;* denn für einen Punkt in unmittelbarer Nähe des Anfangspunktes werden x, y unendlich klein, und die Coëfficienten der niederern Potenzen von z verschwinden im Vergleiche zu dem Coëfficienten $f^{(1)}$ von z^{n-1}. Die Gleichung (1) reducirt sich also auf das erste Glied, d. h. die Curve $f = 0$ kann in der Nähe des Anfangspunktes durch die gerade Linie $f^{(1)} = 0$ ersetzt werden, oder mit andern Worten: Diese Gerade ist Tangente der Curve $f = 0$ im Punkte $x = 0$, $y = 0$, q. e. d.

Bei einem Doppelpunkte verschwindet also $f^{(1)}$ identisch. Der Verlauf der Curve in der Nähe des Doppelpunktes ist daher bei Vernachlässigung höherer Potenzen von x, y dargestellt durch

$$(3) \qquad f^{(2)} = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0,$$

oder mit anderen Worten: *Es ist dies die Gleichung des Productes der*

beiden Tangenten im Doppelpunkte. Wir haben hier, wenn die Coëfficienten α, β, γ als reell vorausgesetzt werden, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

$\beta^2 > \alpha\gamma$, *eigentlicher Doppelpunkt*, zwei reelle Tangenten (vgl. Fig. 37).

$\beta^2 = \alpha\gamma$, *Rückkehrpunkt*, eine doppelt zählende Tangente (vgl. Fig. 38).

$\beta^2 < \alpha\gamma$, *isolirter Doppelpunkt*, zwei imaginäre Tangenten (vgl. Fig. 39).

Fig. 39.

$x = 0$ $y = 0$ f

Im letzteren Falle ist der Schnittpunkt beider Tangenten reell: die Curve hat einen reellen Punkt, durch den kein reeller Zweig hindurchgeht.

Führen wir die beiden Tangenten des *Doppelpunktes* als Coordinatenaxen $x = 0$, $y = 0$ ein, so können wir also die Curvengleichung auf die Form bringen:

$$(4) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = xy \,.\, z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Für einen *Rückkehrpunkt* dagegen wird die Gleichung, indem beide Tangenten (etwa in die Axe $x = 0$) zusammenfallen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 \,.\, z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0\,.$$

Die Form der letztern Gleichung können wir noch weiter vereinfachen. Es sei die Function $f^{(3)}$ gegeben durch

$$f^{(3)} = ax^3 + 3\,bx^2y + 3\,cxy^2 + dy^3.$$

Die Linie $y = 0$ ist zunächst nur insoweit bestimmt, als sie durch den Rückkehrpunkt gehen soll; wir können daher, während x fest bleibt, über y und z noch derartig verfügen, dass die Terme dritter Dimension in einen vollständigen Cubus übergehen. Setzen wir nämlich:

$$y = y' + \lambda x$$
$$z = z' + \mu y' + \nu x,$$

so möge f übergehen in:

$$f = x^2 z'^{n-2} + \varphi^{(3)} z'^{n-3} + \varphi^{(4)} z'^{n-4} + \ldots,$$

wo die φ Functionen von der Ordnung ihres oberen Index in x, y sind. Wir können nun λ, μ, ν so wählen, dass der Coëfficient

$$\varphi^{(3)} = (n-2)\,x^2\,(\mu y' + \nu x) + ax^3 + 3\,bx^2\,(y' + \lambda x) + 3cx\,(y' + \lambda x)^2 + d\,(y' + \lambda x)^3$$

sich auf den einen nur y'^3 enthaltenden Term reducirt; es ist dabei natürlich vorausgesetzt, dass d nicht verschwindet, was eine höhere Singularität bedingen würde. Wir haben dann zur Bestimmung von λ, μ, ν die folgenden Gleichungen:

$$(n-2)\nu + a + 3b\lambda + 3c\lambda^2 + d\lambda^3 = 0$$
$$(n-2)\mu + 3b + 6c\lambda + 3d\lambda^2 = 0$$
$$c + d\lambda = 0.$$

Schreiben wir nun wieder y, z statt y', z' und $f^{(i)}$ für $\varphi^{(i)}$, *so kann also für einen Rückkehrpunkt die Curvengleichung immer in die Form gebracht werden:*

(5) $$f = x^2 z^{n-2} + dy^3 z^{n-3} + f^{(4)} z^{n-4} + \ldots = 0.$$

Wir knüpfen an die Gleichungen (4) und (5) sogleich einige Bemerkungen über das Verhalten der Polaren und der Hesse'schen Curve in den Doppel- und Rückkehrpunkten der Grundcurve*), welche in der Folge für uns von grosser Wichtigkeit sein werden. Wir wissen bereits (vgl. p. 313), dass alle ersten Polarcurven durch den Doppelpunkt gehen. Bilden wir nun die Gleichung der Polare $\varphi = 0$ des Punktes ξ, η, ζ unter Zugrundelegung von (4), so wird

$$\varphi = (\xi y + \eta x) z^{n-2} + \left((n-2) xy\zeta + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x}\xi + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y}\eta\right) z^{n-3} + \ldots$$

Die Tangente derselben im Anfangspunkt ist durch den Term niedrigster Ordnung, d. h. durch

$$\xi y + \eta x = 0$$

gegeben. Dagegen ist die Gleichung der Verbindungslinie des Poles ξ, η, ζ mit dem Anfangspunkte

$$\xi y - \eta x = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichungen folgt, weil $x = 0$, $y = 0$ die Tangenten des Doppelpunktes sind, unmittelbar der Satz:

Die erste Polare eines beliebigen Punktes geht durch den Doppelpunkt; und ihre Tangente in demselben ist harmonisch zu den Tangenten der Grundcurve im Doppelpunkte und der Verbindungslinie desselben mit dem Pole.

Bilden wir ebenso, ausgehend von der Gleichung (5), die Polare des Punktes ξ, η, ζ für eine Curve mit Rückkehrpunkt, so kommt, wenn wir nach z ordnen:

$$\varphi = 2x\xi z^{n-2} + (3d\eta y^2 + (n-2)\zeta x^2) z^{n-3} + \varphi'^{(4)} z^{n-4} + \ldots = 0.$$

Die Linie $x = 0$ ist also auch Tangente einer jeden ersten Polare: *Im Rückkehrpunkte berührt die erste Polare eines jeden Punktes die Rückkehrtangente.* Es ist von Wichtigkeit ein Urtheil über die Zahl der Schnittpunkte beider Curven zu gewinnen, welche man sich im Rückkehrpunkte vereinigt gelegen denken muss. Man gelangt dazu,

*) Dieselben Sätze werden im folgenden Abschnitte (über die Plücker'schen Formeln) ohne Benutzung eines speciellen Coordinatensystems bewiesen werden.

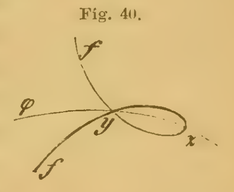
soweit es sich um reelle Punkte handelt, etwa durch folgende Ueberlegung. Ein eigentlicher Doppelpunkt y einer Curve kann insbesondere dadurch entstehen, dass die Curve eine Schleife besitzt, wie es in Fig. 40 veranschaulicht ist; und von einem derartigen Doppelpunkte *müssen* wir ausgehen, wenn aus ihm durch Grenzübergang ein Rückkehrpunkt entstehen soll. Alsdann muss nämlich beim allmählichen Zusammenrücken der Tangenten im Doppelpunkte der von diesen in dem einen Winkelraume eingeschlossene Curventheil völlig zerstört werden; denn beim Rückkehrpunkte finden sich über diesen Punkt hinaus keine rellen Punkte der Curve. Aus (5) ergibt sich nämlich für einen unmittelbar benachbarten Punkt ($z = 1$):

$$x = \sqrt{-\,dy^3},$$

und dies ist, für $d > 0$ imaginär, sobald $y > 0$ wird. Ein solches Zerstören eines Curvenzuges ist aber nur beim Auftreten einer Schleife durch allmähliches Zusammenziehen derselben möglich; denn andernfalls würde durch das Zusammenfallen der beiden Tangenten ein sogenannter *„Selbstberührungspunkt“* entstehen (vgl. unten Fig. 48).

Eine beliebige durch den Doppelpunkt gehende Gerade, die wir uns auch durch irgend einen anderen Curvenzweig (φ in Fig. 40) ersetzt denken können, trifft diese Schleife dann noch in einem Punkte z, und die Entfernung des letzteren vom Doppelpunkte wird an einer gewissen Stelle ein Maximum erreichen, von dem wir die Ausdehnung der Schleife überhaupt abhängig denken können. Aus dem Doppelpunkte lassen wir nun einen Rückkehrpunkt entstehen, indem wir die Schleife immer mehr zusammenziehen und so jenes Maximum immer kleiner werden lassen, bis sie auf einen einzelnen Punkt reducirt ist (indem also $\alpha\gamma - \beta^2$ in Gleichung (3) sich immer mehr der Null nähert). In diesem Momente fallen die beiden Tangenten des Doppelpunktes mit jener Geraden zusammen, und in den entstandenen Rückkehrpunkt fällt auch der weitere Schnittpunkt z des betrachteten Curvenzweiges hinein. Im Ganzen liegen also insbesondere bei der ersten Polare *drei* Schnittpunkte im Rückkehrpunkte der Grundcurve vereinigt; denn ein Doppelpunkt würde offenbar zwei über einander liegende Schnittpunkte ergeben. Zu demselben Resultate gelangen wir auf analytischem Wege: Durch die Schnittpunkte von f und φ geht auch jede Curve $\varkappa f + \lambda\varphi = 0$ hindurch, insbesondere also auch die Curve

Fig. 40.



$$2\,\xi f - x\varphi = (2\,\xi dy^3 - 3\,\eta dxy^2 - (n-2)\,\zeta x^3)\,z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Wir können daher, so lange es nur auf die Schnittpunkte von f und φ ankommt, f auch durch diese Curve ersetzen. Dieselbe enthält aber

keinen Term erster oder zweiter Dimension in x, y, d. h. sie hat im Anfangspunkte einen dreifachen Punkt (vgl. p. 329), dessen 3 Tangenten gegeben sind durch

$$2\,\xi\,dy^3 - 3\,\eta\,dx\,y^2 - (n-2)\,\xi x^3 = 0\,.$$

Diese Linien sind also sämmtlich von der Tangente der Grundcurve verschieden, und somit haben wir drei Schnittpunkte von f und $2\,\xi f - x\varphi = 0$.

Eine Curve mit Rückkehrpunkt wird in diesem von jeder ihrer ersten Polarcurven in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten, d. h. die Gleichung, von welcher die Schnittpunkte beider Curven abhängen, hat entsprechend dem Rückkehrpunkte drei gleiche Wurzeln.

Eine ganz ähnliche Anwendung gestatten die hier gegebenen Methoden zur Charakterisirung der Schnittpunkte, welche die Hesse'sche Curve in einem Doppel- oder Rückkehrpunkte mit der Grundcurve bestimmt. Dass diese Curve durch die singulären Punkte überhaupt hindurch geht, haben wir schon früher gesehen (p. 314).

Wir beginnen mit der Betrachtung eines *Doppelpunktes*, nehmen also die Grundcurve in der Form (4) an:

$$f = xy\,.\,z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0\,.$$

Setzen wir nun

$$\frac{\partial f^{(3)}}{\partial x} = f^{(3)}_x, \quad \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y} = f^{(3)}_y, \quad \frac{\partial f^{(3)}}{\partial z} = f^{(3)}_z,$$

$$\frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x^2} = f^{(3)}_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial y^2} = f^{(3)}_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial z^2} = f^{(3)}_{zz},$$

$$\frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial y\,\partial z} = f^{(3)}_{yz}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial z\,\partial x} = f^{(3)}_{zx}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x\,\partial y} = f^{(3)}_{xy},$$

so findet man die Covariante $\Delta\,.\,\frac{1}{6}\,(n\,(n-1))^3$ gleich einer Determinante, deren erste beiden Verticalreihen folgende Elemente enthalten:

$$\begin{array}{rr} f^{(3)}_{xx} z^{n-3} + \ldots, & z^{n-2} + f^{(3)}_{xy} z^{n-3} + \ldots, \\ z^{n-2} + f^{(3)}_{yx} z^{n-3} + \ldots, & f^{(3)}_{yy} z^{n-3} + \ldots, \\ (n-2)\,y z^{n-3} + (n-3) f^{(3)}_x z^{n-4} + \ldots, & (n-2)\,x z^{n-3} + (n-3) f^{(3)}_y z^{n-4} + \ldots, \end{array}$$

während in die dritte Reihe folgende Elemente zu stellen sind:

$$(n-2)\,y z^{n-3} + (n-3)\,f^{(3)}_x z^{n-4} + \ldots,$$

$$(n-2)\,x z^{n-3} + (n-3)\,f^{(3)}_y z^{n-4} + \ldots,$$

$$(n-2)\,(n-3)\,xy z^{n-4} + (n-3)\,(n-4)\,f^{(3)} z^{n-5} + \ldots.$$

Man übersieht leicht, dass bei der Entwicklung dieser Determinante die Terme niedrigster Ordnung in x, y sind:

$$2(n-2)^2 xy z^{3n-8} - (n-2)(n-3) xy z^{3n-8} = (n-1)(n-2) xy z^{3n-8};$$

und es folgt daraus der Satz:

Die Hesse'*sche Curve hat in einem Doppelpunkte der Grundcurve ebenfalls einen Doppelpunkt; und zwar sind die Tangenten beider Curven im Doppelpunkte dieselben* (nämlich $x = 0$, $y = 0$).

Jeder Zweig der Grundcurve wird also im Doppelpunkte von einem Zweige der Hesse'schen Curve in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten (d. h. berührt) und von dem andern Zweige in einem einzelnen Punkte getroffen*), was zusammen drei Schnittpunkte beider Curven ergibt (vgl. Fig. 41). *Die Anzahl der Schnittpunkte, welche überhaupt im Doppelpunkte vereinigt gedacht werden müssen, ist also gleich sechs.* Dasselbe erkennt man auch direct aus den Formeln; denn bei Untersuchung der Schnittpunkte können wir die Curve $\Delta = 0$ durch irgend eine des Systems

Fig. 41.

$$\Delta + Mf = 0$$

ersetzen, wo M eine Function von der Ordnung $2(n-3)$ ist, insbesondere auch durch:

$$\tfrac{1}{6}(n(n-1))^3 \Delta - (n-1)(n-2) f z^{2n-6} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Glieder zweiter Ordnung in x, y ganz fortgefallen; sie stellt daher eine Curve mit dreifachem Punkte im Anfangspunkte dar, dessen drei Tangenten nicht weiter ausgezeichnete Beziehungen zu den Tangenten des Doppelpunktes haben. Jeder Ast derselben wird von jedem Aste der Grundcurve in einem Punkte getroffen, was wieder 6 Schnittpunkte gibt.

---

*) Mittelst der sogleich im Texte zu entwickelnden Methoden beweist man, dass *die beiden sich im Doppelpunkte berührenden Zweige der Grundcurve und* Hesse*schen Curve sich gegenseitig die convexe Seite zukehren*, wie es Fig. 41 zeigt. Betrachten wir nämlich die Zweige, welche die Seite $x = 0$ berühren, dann ist für benachbarte Punkte x von höherer Ordnung der Kleinheit, als y, und daher der betreffende Zweig der Grundcurve annähernd dargestellt durch die Parabel

$$x + dy^2 = 0,$$

wenn d der (reelle) Coëfficient von y^3 in $f^{(3)}$ ist. Lassen wir ebenso in $\frac{1}{6} n(n-1)^3 \Delta$ die in x multiplicirten Terme aus, so finden wir als Coëfficienten von z^{3n-9} den Ausdruck:

$$2(n-2)(n-3) f y^{(3)} - (n-3)(n-4) f^{(3)} - (n-2)^2 y^2 f y y^{(3)}.$$

Vernachlässigt man hierin wieder die mit x multiplicirten Terme, sucht also den Factor von y^3, so erkennt man, dass der entsprechende Zweig der Hesse'schen Curve dargestellt wird durch die Parabel:

$$(n-2)x - n \cdot d \cdot y^2 = 0;$$

und diese kehrt in der That ihre convexe Seite der convexen Seite jener ersten Parabel zu.

Für einen *Rückkehrpunkt* haben wir (die obige Constante $d = 1$ gesetzt):

$$f = x^2 z^{n-2} + y^3 z^{n-3} + f^{(4)} z^{n-4} + \dots;$$

und es wird also:

$$\frac{(n(n-1))^3}{6} \Delta = \begin{vmatrix} 2z^{n-2} + \dots, & 0 + \dots, & 2(n-2)xz^{n-3} + \dots \\ 0 + \dots, & 6yz^{n-3} + \dots, & 3(n-3)y^2 z^{n-4} + \dots \\ 2(n-2)xz^{n-3} + \dots, & 3(n-3)y^2 z^{n-4} + \dots, & (n-2)(n-3)x^2 z^{n-4} + \dots \end{vmatrix}$$

$$= -12(n-1)(n-2)\, y x^2 z^{3n-9} + \Delta^{(4)} z^{3n-10} + \dots$$

Man findet also in Δ die niedrigsten Terme in x, y von der dritten Dimension; und das Auftreten des Factors x^2 gibt den Satz:

Fig. 42.



In einem Rückkehrpunkte der Grundcurve hat die Hesse'sche Curve einen dreifachen Punkt; und zwar berühren zwei Zweige desselben die Rückkehrtangente), während der dritte von diesen getrennt verläuft* (vgl. Fig. 42).

Die Zahl der hier vereinigt liegenden Schnittpunkte erkennen wir durch Betrachtung der Curve (für $2n > 7$):

$$\tfrac{1}{6}(n(n-1))^3 \Delta + \mu y z^{2n-7} f = 0,$$

wo μ für den Zahlenfactor $12(n-2)(n-1)$ gesetzt ist.

Diese Gleichung enthält auch keine Terme dritter Ordnung mehr: das Merkmal eines vierfachen Punktes. Die vier Tangenten desselben haben keine besondere Lage gegen die Rückkehrtangente, werden also von den beiden Zweigen der Grundcurve zusammen in 8 Punkten geschnitten: *Von den Schnittpunkten einer Curve mit Rückkehrpunkt und ihrer* Hesse'*schen Curve liegen acht im Rückkehrpunkte vereinigt.* Dies

*) Dass diese beiden Zweige von Δ in der That, wie in Fig. 42, eine Spitze bilden, folgt aus der sogleich zu erörternden Newton-Cramer'schen Regel. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass der Ausdruck $\Delta^{(4)}$ in obiger Gleichung ein Glied mit y^4 enthält, während die andern noch in x^2 multiplicirt sind. Diese andern Glieder können aber für einen Punkt in der Nähe des Rückkehrpunktes vernachlässigt werden; denn x ist von höherer Ordnung der Kleinheit als y. Die Curve $\Delta = 0$ kann also ersetzt werden durch:

$$yx^2 + \delta y^4 = 0,$$

wo δ eine Constante ist; d. h. sie besteht aus zwei Zweigen, von denen der eine die Linie $y = 0$ berührt, der andere dagegen vom Typus des Rückkehrpunktes ist; wie es sein soll. Die in Fig. 42 angegebene Lage der Spitze von Δ gegen die von f folgt daraus, dass $\delta = \frac{1}{2}\frac{n-3}{n-2} \cdot d$, wenn d den Coëfficienten von $_{\varepsilon}{}^{h}$ in f angibt, also jedenfalls kleiner, als d, so dass einem gegebenen Werthe von y für Δ immer ein kleineres x entspricht, als für f.

ist durch unsere analytische Betrachtung zunächst nur für $2n > 7$ bewiesen, gilt aber auch noch für $n = 3$. In letzterem Falle gibt es im Allgemeinen 9 Wendepunkte; man sieht aber leicht, dass beim Auftreten eines Rückkehrpunktes nur einer übrig bleibt. Es ist nämlich dann, wie wir gesehen haben, f in der Form darstellbar:

$$f = x^2 z + y^3,$$

und also

$$6^2 \Delta = \begin{vmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 6y & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24\, x^2 y\,.$$

Für $f = 0$, $\Delta = 0$ ist daher entweder $x^2 = 0$ und $y^3 = 0$, was 6 im Rückkehrpunkte vereinigte Schnittpunkte gibt, oder $y = 0$ und $x^2 z = 0$, was noch 2 im Rückkehrpunkte liegende Punkte gibt und ausserdem den einzigen Wendepunkt $x = 0$, $z = 0$.

Diese für das Folgende sehr wichtigen Beispiele werden hinreichen, um das Wesen und die Anwendbarkeit der angeführten Methoden darzulegen. Wir gehen nunmehr zu der allgemeineren Aufgabe über, *die Gestalt einer Curve in der Nähe eines k-fachen Punktes aus der gegebenen Gleichungsform abzuleiten.**) Durch einen solchen Punkt gehen immer k Zweige der Curve hindurch; es kann jedoch eintreten, dass mehrere dieser Zweige unter einander in ihm eine einfache oder höhere Berührung eingehen, während andere Zweige von diesen getrennt verlaufen, wie wir soeben z. B. an dem Verhalten der Hesseschen Curve in einem Rückkehrpunkte der Grundcurve gesehen haben. Die folgenden Untersuchungen sollen nun dazu dienen, diese verschiedenen Zweige der Curve von einander zu trennen und in ihrem gegenseitigen Verhältnisse zu einander zu charakterisiren; und zwar werden wir sämmtliche Vorkommnisse *in erster Annäherung* als Combinationen von drei Grundtypen erkennen, welche für den Verlauf einer Curve in der Nähe eines Punktes möglich sind. Diese Grundtypen sind dann namentlich für die *Gestalt* der Curvenzweige in der Nähe des Punktes wichtig, soweit dieselben reell sind.

Wir nehmen den betreffenden Punkt wieder zu einem Eckpunkte des Coordinatendreiecks, oder, indem wir $z = 1$ setzen, zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems; ferner setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die Y-Axe eine Tangente der Curve im Anfangspunkte sei. Die Gleichung der Curve ist dann nach (2) von der Form:

$$f = x + f^{(2)} + f^{(3)} + \dots = 0.$$

*) Eine andere, von Nöther angegebene Methode zur Auflösung eines vielfachen Punktes in seine Bestandtheile werden wir am Schlusse dieser Abtheilung kennen lernen.

Gehen wir nun in Richtung der Tangente $x = 0$ auf der Curve weiter, so wird für einen dem Anfangspunkte unmittelbar benachbarten Punkt die Coordinate x unendlich klein gegen die Coordinate y: Man muss sich in diesem Falle, da wir es nur mit *algebraischen* Functionen zu thun haben, gemäss den für solche Functionen gültigen Elementarbegriffen die Vorstellung bilden, dass es eine gewisse Potenz von y gibt, welche mit x von derselben Ordnung unendlich klein wird; oder wie wir uns ausdrücken wollen: *Es wird x mit einer gewissen Potenz von y vergleichbar;* und diese Potenz ist dann eine für die Natur des Anfangspunktes charakteristische Zahl. — Da wir nun die Y-Axe als Tangente der Curve annehmen, so werden in

$$f = x + ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + f^{(3)} + \ldots$$

jedenfalls die Terme ax^2 und $2\,bxy$, wenn x und y unendlich klein sind, gegen x verschwinden, dagegen nicht nothwendig y^2. *Setzen wir also voraus, dass $c \gtrless 0$,* so haben wir als einfachsten Fall, *dass x mit y^2 vergleichbar wird.*

Alsdann können wir die Curve in der Nähe des Anfangspunktes ersetzen durch die *Parabel*

$$0 = x + c \,.\, y^2. \tag{6}$$

Dies ist also charakteristisch für eine einfache Berührung mit der Y-Axe. Ist dagegen der Anfangspunkt ein *Wendepunkt,* so muss seine quadratische Polare die Wendetangente $x = 0$ als Factor enthalten, d. h. in $f^{(2)} = ax^2 + 2\,bxy + cy^2$ *muss c gleich Null sein.* Wir haben dann, wenn wir für einen Augenblick wieder die dritte Variable z einführen:

$$f = x z^{n-1} + (ax + by) x z^{n-2} + (\alpha x^3 + 3\,\beta x^2 y + 3\,\gamma x y^2 + \delta y^3)\, z^{n-3} + \ldots$$

Hierin können wir durch Aenderung der Lage von $z = 0$ die Glieder zweiter Ordnung ganz fortschaffen, indem wir setzen:

$$z = z' - \frac{ax + by}{n - 1}.$$

Die Terme zweiter Ordnung heben sich dann in der That direct fort, und es bleibt ein Ausdruck von der Form:

$$f = x z'^{n-1} + (\alpha' x^3 + 3\,\beta' x y^2 + 3\,\gamma' x y^2 + \delta' y^3)\, z'^{n-3} + \ldots$$

In der Nähe des Anfangspunktes ist jedenfalls x wieder von höherer Ordnung unendlich klein, als y; die Terme $\alpha' x^3$, $3\,\beta' x^2 y$, $3\,\gamma' x y^2$ können wir daher vernachlässigen, und es wird x *mit y^3 vergleichbar. Die Curve kann also in der Nähe eines Wendepunktes ersetzt werden durch eine Curve*

$$x + \delta y^3 = 0. \tag{7}$$

Ein Doppelpunkt gibt hier nichts Besonderes, denn einen solchen können wir durch zwei Curven von der Form (6) ersetzen; anders ist es mit einem *Rückkehrpunkte*. Für einen solchen haben wir:

$$f = x^2 + dy^3 + \dots;$$

es wird x^2 mit y^3 oder *x mit $y^{\frac{3}{2}}$ vergleichbar*, und *die Curve kann ersetzt werden durch:*

$$x^2 + dy^3 = 0. \tag{8}$$

Die Gleichungen (6), (7), (8) stellen uns die erwähnten drei Grundtypen dar. Die erste Curve (Fig. 43) verläuft auf einer Seite der Y-Axe und ist symmetrisch gegen die X-Axe. Die zweite liegt

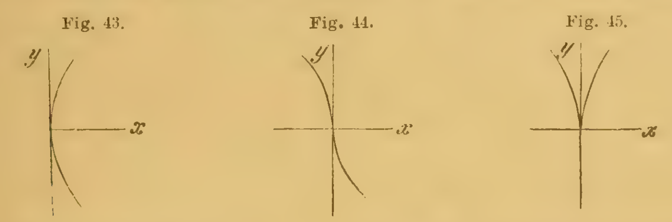


Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45.

gleichzeitig symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen (Fig. 44), während die dritte auf einer Seite der X-Axe verläuft und sich symmetrisch gegen die Y-Axe verhält (Fig. 45, wo d negativ angenommen).

Kehren wir nunmehr zu der gestellten Aufgabe zurück, eine Curve in der Nähe eines k-fachen Punktes zu untersuchen. In diesem Falle beginnt die Entwicklung von f mit dem Gliede $f^{(k)}$. Die Gleichung

$$f^{(k)} = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \dots + a_k y^k = 0 \tag{9}$$

gibt die k Tangenten des Punktes, die wir zuerst bestimmen müssen. Der einfachste Fall ist der, dass die Gleichung k^{ten} Grades lauter verschiedene Wurzeln hat, wo dann die Singularität des vielfachen Punktes durch Aufsuchung dieser Wurzeln erschöpft ist, es sei denn, dass die einzelnen Zweige in ihm noch Wendepunkte besitzen, was einer näheren Untersuchung bedarf. *Alsdann können wir uns den Punkt durch Vereinigung von $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten entstanden denken.* Man erkennt dies sofort, indem man die verschiedenen Zweige der Curve so zeichnet, dass sie noch nicht genau durch einen Punkt gehen, wie es in beistehenden Figuren für einen



Fig. 46.

4-fachen Punkt geschehen ist. Die Zahl $\frac{k(k-1)}{2}$ gibt eben die Zahl der Schnittpunkte dieser k verschiedenen Zweige (vgl. Fig. 46).

Setzen wir dagegen voraus, dass etwa r Wurzeln der Gleichung (9) zusammenfallen, so haben wir das gegenseitige Verhalten der r Zweige, welche dann eine gemeinsame Tangente haben, näher festzustellen. Wir verlegen zu dem Zwecke die Y-Achse in diese r-fach zählende Tangente; die Gleichung der Curve wird dadurch:

$$(10) \qquad f = x^r \varphi^{(k-r)} + f^{(k+1)} + f^{(k+2)} + \ldots = 0.$$

Unter dieser Annahme ist wieder x in der Nähe des betrachteten Punktes von höherer Ordnung der Kleinheit als y; und es ist unsere Aufgabe, in f alle diejenigen Glieder aufzusuchen, welche mit $x^r y^{k-r}$ vergleichbar sind. *Die Summe derselben, gleich Null gesetzt, stellt alsdann eine Curve dar, durch welche f in der Nähe des Anfangspunktes ersetzt werden kann, insofern es nur auf diejenigen r Zweige von f ankommt, welche die Y-Axe berühren.* Die Function φ nämlich ist von der Form

$$\varphi^{(k-r)} = \alpha_0 y^{k-r} + \alpha_1 y^{k-r-1} x + \ldots + \alpha_{k-r} x^{k-r};$$

und zwar kann in φ das Glied mit y^{k-r} nicht fehlen, denn sonst würde φ noch einen Factor x enthalten, während wir voraussetzen, dass dieser Factor nur r-mal in $f^{(k)}$ vorkommt. Alle weiteren Glieder von φ enthalten noch Factoren x, sind also gegen das erste zu vernachlässigen. Die mit $x^r y^{k-r}$ vergleichbaren Glieder sind daher in den Functionen $f^{(k+1)}$, $f^{(k+2)} \ldots$ zu suchen; und zwar sind nur Glieder der Form $x^p y^q$ zu berücksichtigen, für die $p \leqq r$ ist. Die Summe dieser Terme gleich Null gesetzt stellt unsere Curve in erster Annäherung dar. Diese neue Curve wird wieder aus verschiedenen Zweigen bestehen; und für jeden dieser Zweige werden x und y in ganz bestimmtem Verhältnisse zu einander in Bezug auf das Unendlichkleine stehen; für jeden Zweig wird x mit einer bestimmten Potenz von y, etwa $y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, vergleichbar sein, oder x^α mit y^β. Wir werden nun eine Regel angeben, nach welcher man diese Zahlen α, β finden kann, um so die Curve in verschiedene Zweige aufzulösen. Es führt dazu die folgende Ueberlegung. Setzen wir zunächst voraus, es sei das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ für einen gewissen Zweig bekannt. Führen wir dann eine Grösse ε als Maass der Kleinheit ein, so können wir setzen:

$$\begin{array}{l} \lim x = \varepsilon^\beta \\ \lim y = \varepsilon^\alpha \end{array} (\beta > \alpha);$$

denn dann wird in der Grenze $\varepsilon = x^{\frac{1}{\beta}}$, also $y = \varepsilon^\alpha = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, d. h. y^β mit x^α vergleichbar, wie es angenommen wurde. Für ein beliebiges Glied von f ist somit

$$x^p y^q = \varepsilon^{p\beta + q\alpha}.$$

Verlangen wir nun, dass $x^p y^q$ von einer bestimmten Ordnung unendlich klein werde, so muss die Zahl $p\beta + q\alpha$ einen bestimmten constanten Werth haben, also etwa

$$p\beta + q\alpha = \mu$$

sein. Wir haben somit den Satz:

Sind x^α und y^β von gleicher Ordnung der Kleinheit, so werden alle Glieder $x^p y^q$, welche von der Ordnung μ unendlich klein werden, durch die Bedingung

(11) $$p\beta + q\alpha = \mu$$

bestimmt.

Die betreffenden Zahlen p, q wirklich anzugeben, lehrt die Zahlentheorie; es kommt dies auf die Lösung der Congruenz

$$p\beta \equiv \mu \pmod{\alpha}$$

heraus, welche in unserem Falle immer möglich ist, weil α und β, auf deren Quotienten es allein ankommt, als zu einander relativ prim vorausgesetzt werden können. Für unsern Zweck sind natürlich nur die Werthe brauchbar, für welche $p + q < n$ ist, wenn n die Ordnung der untersuchten Curve bedeutet. *Wir haben nun μ möglichst klein zu wählen;* denn es kommt uns darauf an, diejenigen Glieder herauszufinden, gegen welche alle anderen von höherer Ordnung der Kleinheit sind. Wir können uns hiervon eine deutliche Vorstellung durch ein geometrisches Hülfsmittel machen.*) Betrachten wir nämlich die ganzen Zahlen p, q bez. als Abscisse und Ordinate eines Punktes der Ebene, so können wir jedes Glied $x^p y^q$ durch einen Punkt mit den Coordinaten p, q vorgestellt annehmen. Die Gleichung (11) stellt dann eine gerade Linie dar, und die Zahl μ können wir als Maass ihres Abstandes vom Anfangspunkte betrachten, denn dieser Abstand ist bekanntlich

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Bei dieser geometrischen Repräsentation liegen also alle Punkte, deren entsprechende Terme in f von der μ^{ten} Ordnung unendlich klein werden,

---

*) Dies Verfahren wurde von Newton angegeben, zunächst um aus einer gegebenen algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ y in Function von x angenähert darzustellen; vgl. dessen Methodus functionum et serierum infinitarum, London 1736 (Opuscula ed. Castillion, tom. 1, p. 37 ff.); für die Curventheorie verwerthet von Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750. Vgl. im Folgenden auch Puiseux: Recherches sur les fonctions algébriques; Liouville's Journal de mathématiques pures et appliquées, t. 15, 1850 (Deutsch von Fischer, Halle 1861, p. 24 ff.).

wenn x^α *mit* y^β *vergleichbar ist, auf einer Geraden in der Entfernung* $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ *vom Anfangspunkte.*

Jedes Glied, welches von höherer Ordnung der Kleinheit ist, dem also ein Werth $\mu' > \mu$ entspricht, liegt dann auf der dem Anfangspunkte abgewandten Seite der Linie (11). Um die Glieder *niedrigster* Ordnung zu finden, haben wir demnach das folgende Verfahren einzuschlagen. Es sei y^s das Glied niedrigsten Grades in f, welches von x frei ist. Ihm entspricht ein Punkt in der Entfernung s auf der Ordinatenaxe; durch diesen Punkt und einen anderen, dessen zugehörige Zahlen $p = \pi$, $q = \varkappa$ möglichst klein sind, legen wir eine gerade Linie, deren Abstand vom Anfangspunkte μ sei (vgl. unten Fig. 47). Diese Linie wird noch durch eine Reihe weiterer Punkte gehen, welche zwischen π, $\varkappa$, und o, s liegen und denen Terme in f entsprechen; die Summe aller solcher Terme:

$$K_1 = \Sigma a_{pq} x^p y^q = 0 \tag{12}$$

gibt uns dann eine Curve, für deren durch den vielfachen Punkt gehende Zweige x^α mit y^β vergleichbar ist, wo α und β bestimmt sind durch

$$\alpha \varkappa + \beta \pi = \mu$$
$$\alpha s = \mu .$$

Setzen wir ferner $x = x'^\beta$, $y = y'^\alpha$, so geht (12) in eine homogene Gleichung vom Grade μ in x', y' über (binäre Form), denn es wird dann $x^p y^q = x'^{\beta p} y'^{\alpha q}$. Sind alle Wurzeln $\frac{x'}{y'}$ derselben verschieden, so stellt $K_1 = 0$ eine Reihe von Zweigen dar, welche sich nur einfach im Anfangspunkte berühren, und von denen jeder durch den Typus der Parabel dargestellt wird. Sind dagegen mehrere Gruppen von Wurzeln einander gleich, so werden diese Zweige sich wieder in weitere Klassen auflösen, die durch Wiederholung ganz ähnlicher Betrachtungen bestimmt werden. Wir wollen darauf aber erst später eingehen.

Von dem Punkte π, $\varkappa$ gehen wir nun weiter zu einem Punkte π', $\varkappa'$, welcher jenseit der Linie $\alpha q + \beta p = \mu$, ihr aber möglichst nahe liegt. Die Verbindungslinie beider Punkte wird eine zweite Reihe von Gliedern enthalten, und die entsprechende Gleichung

$$K_2 = 0 \tag{13}$$

stellt wieder ein System von Zweigen dar, für welche in der Nähe des Anfangspunktes $x^{\alpha'}$ mit $y^{\beta'}$ vergleichbar ist, wo nun

$$\pi \beta' + \varkappa \alpha' = \mu'$$
$$\pi' \beta' + \varkappa' \alpha' = \mu' ,$$

wenn μ' den Abstand der neuen Linie vom Anfangspunkte bedeutet; und zwar gibt es zufolge unserer Construction keine Glieder, für welche das Verhältniss $\frac{\alpha'}{\beta'}$ dasselbe wäre, während μ' einen kleineren Werth hätte. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir eine Reihe von Linien, die sich zu einem Polygone vereinigen. Dasselbe kehrt seine convexe Seite den beiden Coordinatenaxen zu, und zwar derartig, dass alle Punkte, welche Gliedern von f entsprechen, durch das Polygon von diesen Axen getrennt werden oder selbst auf den Seiten des Polygons liegen. Diesen Seiten entspricht eine Reihe von Curven

$$K_1 = 0$$
$$K_2 = 0$$
$$K_3 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Jede derselben vereinigt die Terme, welche bei einem bestimmten Werthe von $\frac{\alpha}{\beta}$ von der möglichst niedrigen Ordnung der Kleinheit sind. Die letzte der Geraden geht durch den Punkt $p = r$, $q = k - r$, denn alle Glieder, für die $p > r$ ist, brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Damit ist dann das Polygon gegen die Abscissenaxe abgeschlossen. Eine weitere Fortsetzung des Verfahrens würde wenigstens nicht mehr zu Curvenzweigen führen, welche die Axe $x = 0$ berühren.

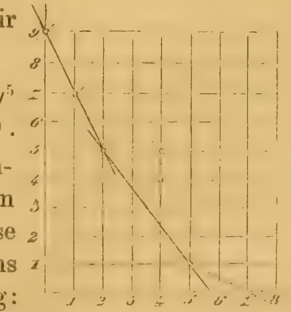
*Ein Beispiel**) wird dazu dienen, dies Verfahren völlig klar zu stellen. Wir betrachten die Curve:

$$(14) \qquad f(x, y) \equiv x^5 y + a x^7 + b x^2 y^5 + c x^8 + d x^4 y^4 + e x y^7 + f x^4 y^5 + g y^9 + h y^{10} = 0,$$

also eine Curve 10. Ordnung mit 6-fachem Punkte im Anfangspunkte. Zunächst können wir alle Glieder fortlassen, in denen der Exponent von x grösser, als 5 ist, denn diese verschwinden jedenfalls gegen $x^5 y$; ebenso das Glied mit y^{10}, denn wir beginnen unsere Construction mit y^9. Wir behalten dann eine Curve 9. Ordnung:

$$(15) \quad x^5 y + b x^2 y^5 + d x^4 y^4 + e x y^7 + f x^4 y^5 + g y^9 = 0.$$

Fig. 47.



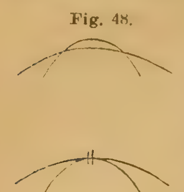
Die Terme dieser Gleichung sind in beistehender Figur markirt. Wir haben zunächst den Punkt 0, 9 mit 2, 5 zu verbinden; diese Linie geht auch durch 1, 7. Daher stellt uns nach Absonderung des Factors y^5 die Gleichung:

*) Vgl. auch die in den Anmerkungen auf p. 325 und p. 326 behandelten Beispiele.

(16) $$K_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = 0$$

eine Curve 4ter Ordnung dar, welche 2 Zweige von (14) in der Nähe des Anfangspunktes ersetzt. In letzterem hat sie einen sogenannten *Selbstberührungspunkt*. Sie wird in ihm von der X-Axe in 2, von der Y-Axe in 4 zusammenfallenden Punkten getroffen, ein Punkt, wie er durch das Zusammenrücken von 2 Doppelpunkten (Fig. 48) entsteht. Noch genauer erhalten wir den Verlauf der beiden Zweige, wenn wir nach dem oben angegebenen Verfahren $x = x'^2$, $y = y'$ in (16) setzen, oder $x = x'$, $y^2 = y'$, und die quadratische Gleichung auflösen. Dadurch zerfällt dann K_1 in zwei Factoren

Fig. 48.



$$x' - m_1 y', \quad x' - m_2 y';$$

und wir können daher $K_1 = 0$ ersetzen durch zwei Gleichungen vom Typus der Parabel (6):

$$x - m_1 y^2 = 0, \quad x - m_2 y^2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass m_1 und m_2 von einander verschieden sind.

Unserer Regel zufolge haben wir nun weiter den Punkt 2, 5 mit dem Punkte 5, 1 durch eine Gerade zu verbinden. Diese Linie enthält keinen markirten Punkt weiter. Wir haben daher nach Absonderung des Factors x^2y die Curve:

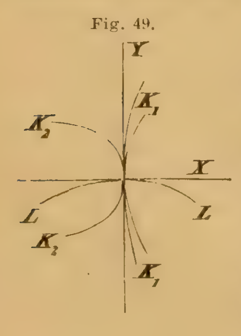
(17) $$K_2 = x^3 + by^4 = 0.$$

Für die hierdurch annähernd dargestellten Zweige der Curve (14) wird also x^3 mit y^4 vergleichbar. Die Curve hat im Anfangspunkte einen dreifachen Punkt mit 3 in $x = 0$ zusammenfallenden Tangenten; die drei Zweige legen sich nach Art einer Parabel einfach an die Y-Axe an. Es wird

$$x = \sqrt[3]{-by^4};$$

also sind zwei der Zweige imaginär und einer reell.

Fig. 49.



Damit sind alle Zweige der vorgelegten Curve, welche die Y-Axe berühren, völlig bestimmt. Setzen wir unser Verfahren noch weiter fort, so erhalten wir eine Näherungsgleichung für den die X-Axe berührenden Zweig des sechsfachen Punktes. Wir müssen dann zu (15) aus (14) den Term ax^7 hinzunehmen und noch die Linie 5, 1 — 7, 0 ziehen. Diese enthält keinen markirten Punkt mehr, und der gesuchte Zweig ist daher nach Absonderung eines Factors x^5:

$$L = y + ax^2 = 0,$$

also vom Typus der Parabel. Die verschiedenen reellen Zweige des sechsfachen Punktes verlaufen demnach, wie es Fig. 49 zeigt.*)

Es kann jedoch insbesondere eintreten, dass der Ausdruck K_1 in unserm Beispiele ein vollständiges Quadrat wird. Alsdann reicht dies erste Näherungsverfahren nicht aus, um die beiden Zweige der Curve zu trennen: dieselben haben eine höhere Berührung mit einander. Allgemein kann es vorkommen, dass aus einer der Gleichungen $K = 0$ ((12) und (13)) durch Einführung der Variabeln x', y' eine Gleichung

$$\varphi(x', y') = 0$$

entsteht, welche einen vielfachen linearen Factor (oder mehrere solche)

$$x' - my'$$

enthält. Um die entsprechenden Zweige der Curve zu trennen, führen wir wieder x, y ein, und haben dann annähernd

$$x^\alpha - m^\beta y^\beta = 0.$$

Setzen wir ferner

$$y = \eta^\alpha,$$

so wird also

$$x = m^{\frac{\beta}{\alpha}} \eta^\beta + \xi, \tag{18}$$

wo ξ eine Grösse ist, welche von höherer Ordnung unendlich klein wird, als η^β. Diese Substitution haben wir in $f(x, y)$ zu machen, um ξ in Function von η annähernd zu bestimmen. Und zwar hat man bei dieser annähernden Berechnung von η wieder die Glieder höherer Ordnung nach der Cramer'schen Regel auszuscheiden. Sollten in den verschiedenen dadurch entstehenden Klassen wieder Gleichungen vorkommen, welche einen vielfachen linearen Factor $\xi^{\alpha'} - m'^{\beta'} \eta^{\beta'}$ enthalten, so hat man diesen Factor wieder in derselben Weise zu behandeln. Schliesslich wird man so immer durch Einsetzen der Werthe ξ, η in (18) *für x eine Entwicklung nach steigenden, gebrochenen Potenzen von y* erhalten, welche das Verhalten der verschiedenen Zweige charakterisirt. Wir erläutern dies zunächst wieder an einem Beispiele. Setzen wir voraus, dass bei obiger Curve $f(x, y) = 0$ der Ausdruck K_1 (16) ein vollständiges Quadrat werde, dass wir also haben:

$$K_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = (ux + vy^2)^2.$$

Nach der eben angegebenen Regel müssen wir dann setzen ($\alpha = 1$, $\beta = 2$):

$$x = -\frac{v}{u}\eta^2 + \xi, \quad y = \eta;$$

und dadurch wird, wenn wir alle höheren Terme vernachlässigen:

*) In Fig. 49 ist vorausgesetzt, dass a, b, m_1, m_2 positive Grössen sind.

$$f(x, y) = -\frac{v^5}{u^5}\eta^{11} + \ldots + a\left(-\frac{v^7}{u^7}\eta^{14} + \ldots\right) + c\left(\frac{v^8}{u^8}\eta^{16} + \ldots\right)$$
$$+ d\left(\frac{v^4}{u^4}\eta^{12} + \ldots\right) + f\left(\frac{v^4}{u^4}\eta^{13} + \ldots\right) + h\,\eta^{10}$$
$$+ \eta^5\left(-v\eta^2 + u\xi + v\eta^2\right)^2.$$

Wenn wir den Factor η^5 fortlassen und anders ordnen, so haben wir also die Gleichung:

$$(19)\quad u^2\xi^2 + h\eta^5 - \frac{v^5}{u^5}\eta^6 + d\,\frac{v^4}{u^4}\eta^7 + f\,\frac{v^4}{u^4}\eta^8 - a\,\frac{v^7}{u^7}\eta^9 + c\,\frac{v^8}{u^8}\eta^{11} = 0.$$

Wenden wir hierauf unsere schematische Regel an, so haben wir nur die eine Verbindungslinie der Punkte 2, 0 und 0, 5 zu berücksichtigen, und daher nur die eine Klasse

$$K' = u^2\xi^2 + h\eta^5 = 0,$$

woraus sich für ξ die beiden Werthe

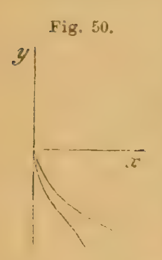
$$\xi = \pm\sqrt{-\frac{h}{u^2}\eta^5}$$

ergeben; und damit ist die Trennung der beiden parabolischen Zweige der Klasse K_1 vollendet. Für einen Punkt derselben in der Nähe des Anfangspunktes erhalten wir die Entwicklung:

$$(20)\qquad x = -\frac{v}{u}y^2 \pm \frac{1}{u}\sqrt{-hy^5}.$$

In Betreff der Gestalt der so getrennten Zweige gilt das Folgende. Nehmen wir an, es sei h eine positive Grösse, so wird $\sqrt{-hy^5}$ nur reell für negative Werthe von y. Wir erhalten also auch für x, wenn u, v ebenfalls reell sind, nur für negative Werthe von y reelle Werthe; d. h. die beiden sich im Anfangspunkte berührenden Zweige der Klasse K_1 legen sich an die negative Seite der Y-Axe, ohne die X-Axe zu überschreiten. Und zwar geschieht dies nach dem Typus des Rückkehrpunktes, wenn der eine Werth von x positiv, der andere negativ wird. Ist aber das Grössenverhältniss von v und h derartig, dass *beide* Werthe von x dasselbe Zeichen haben, so liegen beide Curvenzweige auf derselben Seite der Y-Axe: *Sie bilden eine „Spitze zweiter Art“* (Fig. 50), wie man eine solche Singularität gegenüber dem Rückkehrpunkte, der Spitze erster Art, bezeichnet.

Fig. 50.



Setzen wir dagegen voraus, dass in $f(x, y)$ das Glied mit y^{10} fehle ($h = 0$), dass also eine Curve 9. Ordnung zur Untersuchung vorliegt, so gibt die Anwendung der Cramer'schen Regel auf (19) die eine Klasse:

$$K' = u^2\xi^2 - \frac{v^5}{u^5}\eta^6 = 0,$$

also
$$\xi = \pm \frac{\eta^3}{u}\sqrt{\frac{v^5}{u^5}},$$

und somit:

(21) $$x = -\frac{y^2}{u}\left(v \mp \sqrt{\frac{v^5}{u^5}}\right).$$

In diesem Falle verlaufen daher beide Zweige symmetrisch zur X-Axe, nach dem Typus der Parabel.

Im Allgemeinen wird ganz ebenso, nachdem die Trennung sämmtlicher Curvenzweige durchgeführt ist, schliesslich *für x eine Reihenentwicklung nach steigenden gebrochenen Potenzen von y* erhalten von der Form:

(22) $$x = cy^{\frac{\alpha}{\beta}} + c_1 y^{\frac{\alpha'}{\beta\beta'}} + c_2 y^{\frac{\alpha''}{\beta\beta'\beta''}} + \dots$$

Ein jedes Glied der Entwicklung hat so viele verschiedene Werthe, als der Nenner des Exponenten angibt; den zugehörigen verschiedenen Werthen von x entsprechen dann ebenso viele getrennte Zweige der Curve $f = 0$. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass der Exponent eines Gliedes eine ganze Zahl wird, denn in diesem Falle ist der Coëfficient desselben noch immer irrational und gibt also eine Reihe verschiedener Werthe, wie z. B. in Gleichung (21). Zur Charakterisirung der Gestalt eines Zweiges in der Nähe des Anfangspunktes wird im Allgemeinen das erste Glied der Entwicklung schon einen Massstab geben; und zwar wird die Gestalt in erster Annäherung davon abhängen, ob die Zahlen α, β in Bezug auf Gerade oder Ungerade sich beide gleich oder ungleich verhalten. *Wir haben darnach, indem wir unsere früheren Benennungen verallgemeinern, die folgenden 3 Haupttypen:*

(I) $x^{2h+1} = y^{2k}$ *Typus der Parabel* (Fig. 43),

(II) $x^{2h+1} = y^{2k+1}$ *Typus des Wendepunktes* (Fig. 44),

(III) $x^{2h} = y^{2k+1}$ *Typus des Rückkehrpunktes* (Fig. 45).

Insofern man besonders auf das Reelle achtet, könnte man endlich noch *einen vierten Typus, den der Spitze zweiter Art*, hinzufügen, für welchen uns Gleichung (20) ein Beispiel gab. Derselbe würde allgemein dadurch charakterisirt sein, dass in der Reihenentwicklung für x einmal eine gerade Wurzel aus einer ungeraden Potenz zu ziehen ist, und dass in Folge besonderer Werthe der eingehenden Constanten das Vorzeichen dieser Wurzel ohne Einfluss auf das Vorzeichen von x bleibt. In diesem Falle werden die betreffenden Zweige an einer Seite der X-Axe in der besprochenen Weise imaginär. Es ist jedoch hervorzuheben, dass die von uns entwickelte Methode letzteren Fall

nur wegen des Verhaltens im Reellen (p. 336) vor anderen Fällen auszeichnet, die algebraisch durch ganz analoge Reihenentwicklungen gekennzeichnet sind. — Um auch die imaginären Vorkommnisse geometrisch anschaulich darzustellen, muss man sich, wie es in der Functionentheorie geschieht, der sogenannten Riemann'schen Fläche bedienen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Es sei besonders als ein Ergebniss der hier durchgeführten Untersuchung hervorgehoben, dass ein reeller Zweig einer algebraischen Curve an keiner Stelle aufhören kann, oder was dasselbe ist:

Von jedem Punkte einer algebraischen Curve aus gibt es auf der Curve eine gerade Anzahl von verschiedenen Fortschreitungsrichtungen: von denselben können nur mehrere einander unendlich nahe liegen (wie beim Rückkehrpunkte). —

Wir wollen die im Vorstehenden benutzte Methode zur Behandlung eines singulären Punktes, nach welcher wir den Punkt in den Anfangspunkt verlegen und nach Potenzen von x, y entwickeln, noch zur Ableitung eines vielfach angewandten, von Nöther*) streng bewiesenen, wichtigen Satzes benutzen.

Wir haben schon wiederholt von dem Satze Gebrauch gemacht, dass sich die Gleichung einer Curve $f = 0$, die durch die Schnittpunkte zweier Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hindurchgeht, in die Form:

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

bringen lässt, wo $A = 0$, $B = 0$ ebenfalls Gleichungen von Curven sind. Dies ist aber nur unbeschränkt gültig, so lange in den Schnittpunkten von φ und ψ keine dieser Curven vielfache Punkte besitzt. Andernfalls sind gewisse Bedingungen zu erfüllen, wenn obige Darstellung von f möglich sein soll; und diese Bedingungen wollen wir im Folgenden aufstellen. Wir untersuchen zu dem Zwecke das Verhalten einer Curve

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

in der Nähe eines Schnittpunktes P der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$, in dem die erstere einen q-fachen, die andere einen r-fachen Punkt haben möge, in dem also rq Schnittpunkte beider Curven vereinigt liegen; und zwar sei $r \geq q$ vorausgesetzt. Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo die verschiedenen Zweige der Curve φ, bez. ψ sich nicht unter einander berühren. Nehmen wir den Punkt P zum Anfangspunkte, so müssen jedenfalls alle Glieder 0ter, 1ter, 2ter, ..., $(q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von f verschwinden, also jedenfalls f einen q-fachen Punkt haben. Dies gibt zunächst das Verschwinden von

---

*) Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen: Göttinger Nachrichten, 1872, p. 490, oder Math. Annalen, Bd. 6, p. 352.

$$1 + 2 + 3 \ldots + q = \frac{q(q+1)}{2}$$

Constanten, was uns beiläufig zu dem Satze führt:

Soll ein bestimmter Punkt q-facher Punkt einer algebraischen Curve sein, so ist diese Forderung $\frac{q(q+1)}{2}$ linearen Bedingungen äquivalent, d. h. man kann für eine Curve n^{ter} Ordnung dann nur noch $\frac{n(n+3) - q(q+1)}{2}$ weitere Punkte willkürlich wählen.

In unserem Falle treten jedoch für $r > q$ noch weitere Bedingungen hinzu. Es verschwinden die Glieder q^{ter}, $(q+1)^{\text{ter}}, \ldots, (r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von ψ. Die $(q + i + 1)$ Coëfficienten der Terme $(q+i)^{\text{ter}}$ Ordnung in f $(i = 0, 1, \ldots, r - q - 1)$ sind daher nur abhängig von den Coëfficienten der Terme gleicher Dimension in dem Producte $A\varphi$. Letztere entstehen durch Multiplication

der Glieder		q^{ter}	Ord.	von	φ	mit	den	Gliedern	i^{ter}	Ord.	von	A,
„	„	$(q+1)^{\text{ter}}$	„	„	φ	„	„	„	$(i-1)^{\text{ter}}$	„	„	A,
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
„	„	$(q+i)^{\text{ter}}$	„	„	φ	„	„	„	0ter	„	„	A.

Es müssen sich also die $(q + i + 1)$ Coëfficienten von f linear durch

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (i+1) = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

willkürliche Grössen (Coëfficienten von A) ausdrücken lassen. Im Ganzen enthalten nun die Termen q^{ter}, $(q+1)^{\text{ter}} \ldots (r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von f

$$(q+1) + (q+2) + \ldots + r = \frac{(q+r+1)(r-q)}{2}$$

Coëfficienten, und diese sind demnach lineare homogene Functionen der

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (r-q) = \frac{(r-q+1)(r-q)}{2}$$

willkürlichen Coëfficienten der Glieder 0ter, $1^{\text{ter}}, \ldots, (r-q-1)^{\text{ter}}$ Dimension von A; d. h. es sind nur ebensoviele Coëfficienten von f willkürlich zu wählen; oder, was dasselbe ist, es müssen zwischen den Coëfficienten der Glieder q^{ter}, $(q+1)^{\text{ter}} \ldots (r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von f noch

$$\frac{(r-q)(r+q+1)}{2} - \frac{(r-q)(r-q+1)}{2} = (r-q)\,q \tag{23}$$

lineare homogene Gleichungen bestehen.

Aber auch eine Reihe von Gliedern höherer Ordnung in f wird noch durch die vielfachen Punkte von φ und ψ beeinflusst. Allgemein entstehen die Coëfficienten der Terme k^{ter} Ordnung von f durch Multiplication

von Gliedern q^{ter} Ord. von φ in Glieder $(k-q)^{\text{ter}}$ Ord. von A,
" " $(q+1)^{\text{ter}}$ " " φ " " $(k-q-1)^{\text{ter}}$ " " A,
. . . .
" " k^{ter} " " φ " " 0ter " " A,
" " r^{ter} " " ψ " " $(k-r)^{\text{ter}}$ " " B,
" " $(r+1)^{\text{ter}}$ " " ψ " " $(k-r-1)^{\text{ter}}$ " " B,
. . . .
" " k^{ter} " " ψ " " 0ter " " B.

Wir können hieraus die Zahl der willkürlichen Coëfficienten von A, B bestimmen, welche in den Gliedern der Function $A\varphi + B\psi$ bis inclusive zur k^{ten} Dimension vorkommen. Es sind dies

$$1+2+\ldots+(k-q+1)=\tfrac{1}{2}(k-q+2)(k-q+1) \text{ Coëff. von } A$$

und $$1+2+\ldots+(k-r+1)=\tfrac{1}{2}(k-r+2)(k-r+1) \quad \text{" " } B.$$

Im Ganzen enthält also $A\varphi + B\psi$ in den Termen bis zur k^{ten} Dimension inclusive

$$Q = \tfrac{1}{2}\left\{(k-q+2)(k-q+1)+(k-r+2)(k-r+1)\right\}$$

Parameter, während die Zahl der Parameter in den Termen gleicher Dimension von f, d. h. von der q^{ten} Dimension bis zur k^{ten}, ist

$$P = \tfrac{1}{2}(k+q+2)(k-q+1).$$

Vermehren wir nun k um 1, so wächst Q um

$$k-q+2+k-r+2$$

und zu P treten die $k+2$ Coëfficienten der binären Form $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung hinzu, d. h. P wächst um

$$k+2.$$

Sollen aber von der k'^{ten} Dimension ab alle Terme von f vollkommen willkürlich gewählt werden können, so muss der Zuwachs von Q bei wachsendem k mindestens eben so gross sein, als der von P; wir haben also die Bedingung:

$$k+2 \leqq k-q+2+k-r+2$$

oder $$k \geqq q+r-2.$$

Sobald k dieser Bedingung genügt, sind die Coëfficienten $(k+1)^{\text{ter}}$ Dimension in f von einander unabhängig; wir haben also

$$k' = k+1 = q+r-1$$

für k in P und Q einzusetzen. Alsdann müssen die P Coëfficienten von f, wo nun

$$P = \tfrac{1}{2}(r+2q+1)\,r,$$

lineare Functionen der Q Coëfficienten von $A\varphi + B\psi$ sein, wo

$$Q = \tfrac{1}{2}\{r(r+1) + q(q+1)\},$$

d. h. zwischen den Coëfficienten von f müssen

$$P - Q = rq - \tfrac{1}{2} q(q+1)$$

lineare Gleichungen bestehen, unter denen dann die in (23) angegebenen $q(r-q)$ Gleichungen enthalten sind. Da nun ausserdem $\frac{1}{2} q(q+1)$ Bedingungen durch den q-fachen Punkt von f in P gefordert sind, so haben wir folgenden Satz bewiesen:

Wenn zwei Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in einem ihrer Schnittpunkte P bez. einen q-fachen und r-fachen Punkt haben $(r > q)$, und wenn eine andere durch die Schnittpunkte von φ und ψ gehende Curve in der Form

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

darstellbar sein soll, so muss diese Curve in P einen q-fachen Punkt haben, und, wenn letzterer Anfangspunkt ist, müssen ausserdem die Coëfficienten der Glieder von f bis exclusive zur $(r+q-1)^{ten}$ Dimension $rq - \frac{1}{2} q(q+1)$ linearen homogenen Bedingungsgleichungen genügen.

Ein Theil dieser Bedingungen ist jedenfalls identisch erfüllt, wenn f einen m-fachen Punkt $(m > q)$, gleichzeitig A einen $(m-q)$-fachen und für $m > r$ auch B einen $(m-r)$-fachen Punkt in P hat; d. h. wenn die betreffenden Glieder niederster Dimension in A und B selbst fehlen; für die Terme m^{ter} bis $(r+q-2)^{ter}$ Dimension bleiben dagegen die übrigen Relationen bestehen. Man kann dieselben auffassen als Bedingungen für die Lage der verschiedenen durch P gehenden Zweige von f zu denen von φ und ψ. Ist also $m = r + q - 1$, so bestehen für die Gruppirung dieser Zweige keine Bedingungen weiter Es ergibt sich dann der wegen späterer Anwendungen wichtige Satz:

*Eine Curve $f = 0$, welche in einem Punkte P einen $(r+q-1)$-fachen Punkt hat, und welche durch die Schnittpunkte zweier Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ geht, wo φ einen q-fachen, ψ einen r-fachen Punkt in P hat, kann **immer** in der Form*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0$$

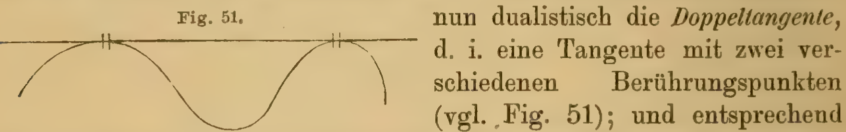
dargestellt werden, wo $A = 0$ in P einen $(r-1)$-fachen, $B = 0$ daselbst einen $(q-1)$-fachen Punkt hat.

III. Dualistisches. — Die Plücker'schen Formeln.

Neben den singulären Punkten müssen wir, entsprechend dem Dualitätsprincipe, auch singuläre Tangenten berücksichtigen. Nach dem genannten Principe nämlich müssen wir uns jede Curve auf zwei verschiedene Arten entstanden denken: durch einen sich bewegenden

Punkt beschrieben und durch eine sich bewegende Gerade umhüllt.*) Der beschreibende Punkt bestimmt in jedem Intervalle eine Richtung, und diese einem unendlich kleinen Fortrücken entsprechende Richtung ist die Tangente der beschriebenen Curve in dem Punkte. Ebenso bestimmt die umhüllende Gerade durch jede unendlich kleine Lagenänderung einen Punkt, denn eine solche kann immer als Drehung um einen bestimmten Punkt aufgefasst werden; und dies ist der Berührungspunkt der betrachteten Geraden. Wir erhalten also dieselbe Curve, wenn wir die Drehung der Geraden immer als eine Function des Fortschreitens eines ihrer Punkte ansehen. In dieser gegenseitigen Abhängigkeit beider Bewegungen können aber Besonderheiten vorkommen, und diese sind es, welche zu den *singulären* Punkten und Tangenten Veranlassung geben. Es tritt dies ein entweder, wenn das beschreibende oder umhüllende Element ein und dieselbe Lage zweimal erreicht, oder wenn das eine der beiden Elemente den Sinn seiner Bewegung ändert, während das andere continuirlich weitergeht. Für den ersten Fall haben wir im *Doppelpunkte* ein bekanntes Beispiel, für den zweiten im *Wendepunkte*.**) Dem Doppelpunkte entspricht nun dualistisch die *Doppeltangente*, d. i. eine Tangente mit zwei verschiedenen Berührungspunkten (vgl. Fig. 51); und entsprechend

Fig. 51.



den verschiedenen Arten *vielfacher Punkte* unterscheidet man ebenso viele verschiedene Arten *vielfacher Tangenten*. Es ist aber wohl zu beachten, dass eine Doppeltangente nicht als Singularität aufgefasst werden darf, insofern man sich die Curve nur als Ort von Punkten denkt, und ebensowenig darf ein Doppelpunkt als Singularität gelten, wenn man die Curve als Liniengebilde betrachtet. Wenn nun bei einem Doppelelemente zunächst eine Unbestimmtheit für die Fortschreitungsrichtung, d. h. für die Wahl des benachbarten Elements, vorliegt, so tritt doch keine Discontinuität in der Bewegung des Punktes oder der Tangente ein, insofern man sich dem Doppelelemente auf einem bestimmten Zweige nähert und so die Curve in ihrer Entstehung auffasst. Anders ist dies beim Wendepunkte, indem hier die Singularität in der Beziehung zwischen Punkt und Tangente besteht, während es sich nur um einen einzigen Curvenzweig handelt; und dualistisch entsprechend ist es beim Rückkehrpunkte. Denn man sieht sofort an einer Zeichnung, dass hier der Punkt seine Fortschreitungsrichtung ändert, während die Tangente mit demselben Drehsinne weiter fortrückt. Wir werden Letzteres übrigens auch noch

*) Vgl. im Folgenden Plücker: Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 200 ff.

**) Vgl. die ausführlichere Erörterung auf p. 310.

algebraisch nachweisen, und diese Entwicklung gilt dann ebenfalls für imaginäre Singularitäten.

Durch *gleichzeitige* Untersuchung dieser beiderlei Singularitäten gelingt es nun leicht den scheinbaren Widerspruch zu lösen, welchem wir früher begegneten, als es galt, von der Liniencoordinatengleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve zu dieser ursprünglichen Punktgleichung zurückzukehren. Wir werden nämlich erkennen, dass es eine Curve von höherer als der zweiten Ordnung, welche weder vielfache Punkte noch vielfache Tangenten besitzt, überall nicht gibt, *dass vielmehr jede Curve höherer Ordnung ohne vielfache Punkte eine bestimmte Zahl von Doppel- oder vielfachen Tangenten haben muss, sowie jede Curve ohne vielfache Tangenten eine bestimmte Zahl von Doppel- oder vielfachen Punkten.* Fügen wir dann die Bemerkung hinzu, dass die Zahl $n(n-1)$ für die Klasse einer Curve beim Auftreten vielfacher Punkte gewisse Reductionen erleidet, so wird klar, dass dualistisch entsprechend die Ordnung einer mit Doppeltangenten versehenen Curve aus ihrer Klasse k nicht unmittelbar durch die Zahl $k(k-1)$ zu bestimmen ist; und damit ist dann jener scheinbare Widerspruch beseitigt. Aehnliches gilt für Wendetangenten und Rückkehrpunkte.

Die letzterwähnte Bemerkung über die Abhängigkeit der Klasse von der Zahl der Doppel- und Rückkehrpunkte folgt aus den oben bewiesenen Sätzen über das Verhalten der ersten Polaren in diesen Punkten (vgl. p. 322), von denen wir zunächst nur einfache Doppel- und Rückkehrpunkte als vorhanden annehmen wollen.

Die Klasse einer Curve war bestimmt durch die Zahl der Schnittpunkte der ersten Polare eines beliebigen Punktes mit ihr. In einen Doppelpunkt fallen aber für jeden Pol zwei, in einen Rückkehrpunkt drei dieser Schnittpunkte zusammen; und diese sind nicht mehr als *eigentliche* Berührungspunkte der vom Pole ausgehenden Tangenten zu zählen. *Jeder Doppelpunkt reducirt daher die Klasse um 2, jeder Rückkehrpunkt um 3 Einheiten, d. h. es ist:*

(1) $$k = n(n-1) - 2d - 3r,$$

wenn d die Zahl der Doppel-, r die der Rückkehrpunkte der vorliegenden Curve angibt. So weit es sich um reelle Punkte handelt, kann man die Nothwendigkeit dieser Reductionen auch in folgender Weise einsehen. Man betrachte eine Curve, die zwar keinen Doppelpunkt besitzt, von der zwei Zweige aber nahe an einander vorbeigehen, so dass aus ihr mittelst einer kleinen Deformation eine Curve mit Doppelpunkt entsteht. Es ist dann klar, wie die beiden von einem Punkte y an diese Zweige gelegten Tangenten (u und v in Fig. 52), in die Verbindungslinie von y mit dem

Fig. 52.



Doppelpunkte zusammenfallen, sobald besagte Deformation ausgeführt wird, so dass diese Verbindungslinie als uneigentliche Tangente in der That zweifach zählt. Dass dann letztere beim Rückkehrpunkt dreifach zu rechnen ist, erkennt man unmittelbar aus unseren früheren Betrachtungen über die Entstehung des Rückkehrpunktes aus einem Doppelpunkte mit Schleife (p. 323).

Die Gleichung (1) ist die erste einer Reihe von Relationen, denen die für die Curve charakteristischen Zahlen genügen, und welche nach ihrem Entdecker*) die Plücker'*schen Formeln* genannt werden.

Eine zweite Gleichung der Art bestimmt die Zahl der Wendepunkte in ihrer Abhängigkeit von d und r. Dieselbe ist bekanntlich gleich der Zahl der Schnittpunkte der Grundcurve mit ihrer Hesse'schen. Wir wissen aber (vgl. p. 325), dass in einem Doppelpunkte der Grundcurve 6, in einem Rückkehrpunkte 8 dieser Schnittpunkte vereinigt liegen. *Jeder Doppelpunkt einer Curve reducirt daher die Zahl w ihrer Wendepunkte um 6, jeder Rückkehrpunkt um 8 Einheiten, d. h. es ist:***)

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r \tag{2}$$

Es ist jedoch sehr wohl möglich, dass die Curve in einem Doppelpunkte ausserdem noch Wendepunkte hat, wie dies z. B. bei der bekannten Figur der Lemniscate eintritt. Solche Vorkommnisse geben zwar zu weiteren Schnittpunkten der Hesse'schen mit der Grundcurve im Doppelpunkte, aber nicht zu weiteren Reductionen Veranlassung.

Aus den Formeln (1) und (2) ergeben sich andere durch das Princip der Dualität. Nach demselben entsprechen sich wechselseitig Ordnung und Klasse; ferner Doppelpunkt und Doppeltangente; wir haben also n durch k, d durch t zu ersetzen, wenn t die Zahl der Doppeltangenten bedeutet. Einer Wendetangente, d. h. einer die Curve in drei successiven Punkten treffenden Geraden entspricht dualistisch ein Punkt, in welchem sich drei successive Tangenten schneiden; und zwar ist dies ein Rückkehrpunkt; d. h. die Zahlen w und r entsprechen sich in obigen Formeln dualistisch. Zum Beweise vergleichen wir das Verhalten der Tangenten in der Nähe einer Wendetangente mit dem der Punkte in der Nähe eines Rückkehrpunktes. Beginnen wir mit dem

---

*) Plücker: Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes. Crelle's Journal, Bd. 12, 1834; vgl. ferner dessen System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 289 und: Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 207 ff.

**) Aus Fig. 52 erkennt man leicht, dass ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten immer *zwei* reelle Wendepunkte absorbirt; dieselben sind in der Figur bezeichnet. Ebenso werden nach Fig. 53 durch eine Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten *zwei* reelle Spitzen absorbirt.

letzteren und verlegen denselben in den Anfangspunkt, so ist die Gleichung der Curve von der Form (p. 322):

$$f = x^2 z^{n-2} + y^3 z^{n-3} + \dots = 0.$$

Die Coordinaten der Tangente eines dem Anfangspunkte unendlich benachbarten Punktes x, y, z sind daher unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung der Kleinheit:

$$\varrho u = \frac{\partial f}{\partial x} = 2\, x z^{n-2}$$

$$\varrho v = \frac{\partial f}{\partial y} = 3\, y^2 z^{n-3}$$

$$\varrho w = \frac{\partial f}{\partial z} = (n-2)\, x^2 z^{n-3} + (n-3)\, y^3 z^{n-4}.$$

Mit Hülfe der Gleichung $x^2 z + y^3 = 0$ folgt hieraus die Bedingung:

$$4\, v^3 - 27\, u^2 w = 0,$$

der die Tangenten der Curve in der Nähe des Rückkehrpunktes genügen: eine Curve dritter Klasse, welche die Aufeinanderfolge der Tangenten in der Nähe dieses Punktes darstellt. Sehen wir von dem Zahlenfactor $\frac{4}{27}$ ab, so *ist also die Curve in der Nähe des Rückkehrpunktes,*

aufgefasst als Punktgebilde von dem Typus: $x^2 z + y^3 = 0,$

" " *Liniengebilde* " " " : $u^2 w + v^3 = 0,$

wo nun $x = 0$, $y = 0$ die Coordinaten des Rückkehrpunktes, $v = 0$, $w = 0$ die seiner Tangente sind. Die letztere Gleichung ist aber das dualistische Gegenstück der für den Wendepunkt charakteristischen Form (vgl. p. 328):

$$x z^2 + y^3 = 0.$$

Denn wir haben w durch x, u durch z zu ersetzen, weil die Coordinaten der Rückkehrtangente in der ersten Gleichung $v = 0$, $w = 0$, in der zweiten die des Wendepunktes $x = 0$, $y = 0$ sind. Zu demselben Resultate gelangt man natürlich, vom Wendepunkte ausgehend. Es ist dann die Gleichung der Curve in der Nähe des Wendepunktes:

$$x z^2 + y^3 = 0;$$

und also sind die Coordinaten der Wendetangente:

$$\varrho u = z^2, \quad \varrho v = 3\, y^2, \quad \varrho w = 2\, x z.$$

Dieselben genügen der Bedingung:

$$4\, v^3 - 27\, u w^2;$$

und ersetzen wir wieder u durch z, w durch x, so haben wir den Typus des Rückkehrpunktes: *Die Gleichung der Curve in der Nähe des Wendepunktes ist daher,*

aufgefasst als Punktgebilde, von dem Typus $xz^2 + y^3 = 0$,
„ „ *Liniengebilde,* „ „ „ $uw^2 + v^3 = 0$.

In Bezug auf das Unendlichkleine verhält sich daher der Rückkehrpunkt ($w = 0$), *wie die Wendetangente* ($x = 0$), *und der Wendepunkt wie die Rückkehrtangente.*

Wir fassen diese Resultate in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammen, in welcher zwei neben einander stehende Singularitäten sich dualistisch entsprechen:

Punktcoordinaten.	*Liniencoordinaten.*
Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten.	Doppeltangente mit zwei reellen Berührungspunkten.
Rückkehrpunkt.	Wendetangente.
Doppelpunkt mit zwei imaginären Tangenten (isolirter Punkt).	Doppeltangente mit zwei imaginären Berührungspunkten (isolirte Tangente).
Wendepunkt.	Rückkehrtangente.

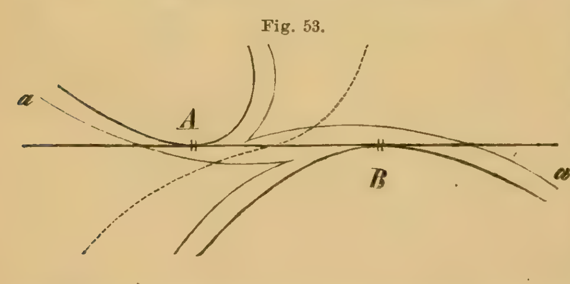
Zufolge dieser Ueberlegung gibt nun die dualistische Uebertragung der Gleichungen (1) und (2) die folgenden beiden Relationen:

$$n = k(k-1) - 2t - 3w \tag{3}$$

$$r = 3k(k-2) - 6t - 8w. \tag{4}$$

Den Inhalt der Gleichung (3) kann man sich, wie bei Gleichung (1), auch direct geometrisch veranschaulichen, wenigstens soweit es auf das Reelle ankommt; und zwar geschieht dies, indem man von einer Curve ausgeht, die nur noch ein Wenig deformirt zu werden braucht, um eine Doppeltangente zu erhalten. Es laufen dann zwei Zweige der Curve eine Strecke AB dicht neben einander her, wie in Fig. 53, um dann bei Ausführung der Deformation in die Doppeltangente zusammenzufallen. Die beiden Schnittpunkte einer beliebigen Geraden (u) mit erwähnten Curvenzweigen werden dabei auf die Doppeltangente verlegt, und sind somit als uneigentliche Schnittpunkte von der Zahl $k(k-1)$ abzuziehen. In der That ist ja ein Schnittpunkt von u mit der Curve dadurch definirt, dass von ihm aus zwei zusammenfallende Tangenten an die Curve gehen; Letzteres ist aber für jeden Punkt einer Doppeltangente der Fall. Lässt man ferner bei der Curve mit Doppeltangente in Fig. 53 die beiden Berührungspunkte derselben allmählich

Fig. 53.



zusammenrücken, so erkennt man, dass noch ein dritter Schnittpunkt von u in die Doppeltangente fällt, während diese selbst zur Wendetangente wird. (Man kann dabei etwa die mit a bezeichneten Zweige ganz in die Doppeltangente fallen lassen, so dass die in Fig. 53 punktirte Curve entsteht.)

Die 4 Plücker'schen Formeln (1), (2), (3), (4) zeigen, dass wirklich jede Curve gewisse der behandelten Singularitäten besitzt, wie es oben behauptet wurde. Ferner gibt uns die Gleichung (3) die Ordnung der Curve in Function ihrer Klasse; die verlangte Reduction ist also durch das Auftreten von Doppeltangenten und Wendetangenten bei jeder allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung bedingt und geleistet. Wende- und Rückkehrpunkte können nur gleichzeitig fortfallen für

$$k = n, \quad d = t = \frac{n(n-2)}{2},$$

also für eine sehr specielle Art von Curven gerader Ordnung; Doppel-Punkte und -Tangenten nur für

$$k = n, \quad r = w = \frac{k(k-2)}{3},$$

also, abgesehen von Curven zweiter Ordnung bei einer besondern Art von Curven der Ordnung $3h$ oder $3h + 2$. Beides zugleich dagegen kann für $n > 2$ nicht eintreten.

Die vier Gleichungen, welche zwischen *den drei Paaren regelmässiger Singularitäten*, d. i. den Zahlen nk, dt, rw bestehen, sind jedoch nicht von einander unabhängig. Vielmehr ist eine die Folge der drei übrigen; denn aus (1) und (3) folgt ebenso, wie aus (2) und (4) die dualistisch nicht mehr zu verändernde Gleichung:

$$(5) \qquad 3(k-n) = w - r.$$

Durch drei der sechs Singularitäten sind daher die drei übrigen völlig bestimmt. Ist z. B. eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte gegeben, so hat man:

$$\begin{aligned} k &= n(n-1) \\ w &= 3n(n-2) \\ t &= \tfrac{1}{2} n(n-2)(n^2-9). \end{aligned}$$

Die $3n(n-2)$ Wendepunkte haben wir früher durch eine sie ausschneidende Curve von der Ordnung $3n(n-2)$ bestimmt. Ganz ähnlich können wir auch die Zahl t direct ableiten, indem wir eine Curve von der Ordnung $(n-2)(n^2-9)$ angeben, welche durch die $n(n-2)(n^2-9)$ Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgeht. Die Möglichkeit dieser Bestimmungsweise ist keineswegs selbstverständlich; denn wir werden später sehen, dass von den Schnittpunkten zweier Curven immer eine gewisse Anzahl durch die übrigen

bestimmt wird, so dass es nicht möglich ist, ein jedes Punktsystem auf einer algebraischen Curve ohne Auftreten weiterer Schnittpunkte mittelst einer andern Curve auszuschneiden.*)

Sei y der Berührungspunkt einer Tangente und x ein beliebiger Punkt derselben, so ist:

$$a_y^n = 0 \quad \text{und} \quad a_y^{n-1} a_x = 0.$$

Aus der Gleichung n^{ten} Grades

$$(\mu a_y + \lambda a_x)^n = 0,$$

welche die übrigen $n - 2$ Schnittpunkte der Tangente bestimmt, sondert sich dann ein Factor λ^2 ab. Die übrig bleibende Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades muss eine Doppelwurzel haben, wenn die Linie $\overline{xy}$ Doppeltangente sein soll. Den Punkt x können wir nun insbesondere als Schnittpunkt der Tangente von y mit einer willkürlichen Geraden u_1, u_2, u_3 definiren, so dass wir die x durch die Unterdeterminanten aus den u_i und den Grössen $a_y^{n-1} a_i = b_y^{n-1} b_i$ zu ersetzen haben. Die Forderung, dass y Berührungspunkt einer Doppeltangente sei, ist dann gegeben durch das Verschwinden der Discriminante der Gleichung:

$$[\mu a_y + \lambda (abu) b_y^{n-1}]^n = 0. \tag{6}$$

Wenn es gelingt, die Discriminante unabhängig von den u_i darzustellen, so gibt ihr Verschwinden eine Curve der verlangten Art. Dies ist aber in der That immer möglich, denn aus der Discriminante $F(y, u)$ lässt sich ein Factor u_y^α immer absondern. Setzen wir nämlich:

$$\lambda = \varrho v_y,$$

so folgt wegen der Identität

$$(abu) v_y = (avu) b_y + (abv) u_y - (bvu) a_y$$

und wegen $b_y^n = 0$ aus (6):

$$[(\mu - \varrho (bvu) b_y^{n-1}) a_y + \varrho u_y (abv) b_y^{n-1}]^n = 0$$

oder

$$[\mu' a_y + \lambda' (abv) b_y^{n-1}]^n = 0, \tag{7}$$

wenn man setzt:

$$\mu' = \mu - \varrho (bvu) b_y^{n-1} = \mu - \lambda \frac{(bvu) b_y^{n-1}}{v_y}$$

$$\lambda' = \qquad \varrho u_y \qquad = \qquad \lambda \frac{u_y}{v_y}.$$

---

*) Man kann auch mittelst des Uebertragungsprincips immer ein System von Curven angeben, das die Doppeltangenten zu gemeinsamen Tangenten hat, sobald man die Bedingung für das Auftreten zweier Doppelwurzeln in einer binären Form n^{ter} Ordnung hat. Vgl. die Anmerk. auf p. 280.

Die letzteren Gleichungen geben eine lineare Substitution für die binäre Veränderliche $\frac{\lambda}{\mu}$ mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{(v b u)\, b_y^{n-1}}{v_y} \\ 0 & \frac{u_y}{v_y} \end{vmatrix} = \frac{u_y}{v_y}.$$

Bei der linearen Substitution kann sich die fragliche Discriminante nur um eine Potenz dieser Determinante ändern; ferner ist der Ausdruck (7) von derselben Form, wie (6): es sind nur die u durch die v ersetzt. Wir haben daher

$$F(y, u) = \left(\frac{u_y}{v_y}\right)^\alpha . F(y, v)$$

oder

$$\frac{F(y, u)}{u_y^\alpha} = \frac{F(y, v)}{v_y^\alpha},$$

d. h. *die Discriminante ist von den willkürlichen Grössen u_i völlig unabhängig.* Sondert man daher den Factor u_y so oft ab, dass der Rest die u_i nicht mehr enthält, so wird letzterer eine Curve darstellen, deren Ordnung zu bestimmen ist. Dies geschieht mittelst der Regel:

Wenn in einer Gleichung

$$a_0 \mu^m + m a_1 \mu^{m-1} \lambda + \ldots + m\, a_{m-1} \mu \lambda^{m-1} + a_m \lambda^m = 0$$

die Coëfficienten a_i homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, und die Zahlen für den Grad dieser Functionen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ eine arithmetische Reihe bilden: so ist die Discriminante vom Grade $(m - 1)(\alpha_0 + \alpha_m)$ in x_1, x_2, x_3.

Wir beweisen dies in folgender Weise. Der Grad der Discriminante $F(a_0, a_1 \ldots a_m)$ ist derselbe in Bezug auf die x, wie der Grad, auf welchen der Ausdruck

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m})$$

in Bezug auf t ansteigt. Bilden nun die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ eine arithmetische Reihe mit der Differenz β, so dass

$$\alpha_i = \alpha_0 + i\beta,$$

so hat man, da F vom Grade $2(m - 1)$ in den a_i ist:

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m}) = t^{2(m-1)\alpha_0} F(a_0, a_1 t^\beta, a_2 t^{2\beta}, \ldots a_m t^{m\beta}).$$

Hier steht aber rechts die Discriminante einer Gleichung m^{ten} Grades in den Veränderlichen λ', μ', aus welcher die gegebene Gleichung in λ, μ durch die lineare Substitution:

$$\lambda' = t^\beta \lambda$$
$$\mu' = \mu$$

hervorgeht. Durch die Substitution ändert sich die Discriminante um die $m(m-1)^{\text{te}}$ Potenz der Substitutionsdeterminante t^β (vgl. p. 195), d. h. wir haben:

$$F(a_0, a_1 t^\beta, a_2 t^{2\beta}, \ldots, a_m t^{m\beta}) = t^{m(m-1)\beta} \cdot F(a_0, a_1, \ldots a_m),$$

und daraus:

$$F\left(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m}\right) = t^{(m-1)(2\alpha_0 + m\beta)} \cdot F\left(a_0, a_1, \ldots a_m\right),$$

oder da $2\alpha_0 + m\beta = \alpha_0 + \alpha_m$ ist:

$$F\left(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots a_m t^{\alpha_m}\right) = t^{(m-1)(\alpha_0 + \alpha_m)} \cdot F\left(a_0, a_1, \ldots a_m\right).$$

Hier enthält $F(a_0, a_1 \ldots a_m)$ die Grösse t gar nicht; der links stehende Ausdruck ist daher vom Grade $(m-1)(\alpha_0 + \alpha_m)$ in t; und also auch unsere Discriminante von ebenso hohem Grade in x_1, x_2, x_3 w. z. b. w.

In unserem Falle nun ist $m = n - 2$ zu setzen, und die Coëfficienten der gegebenen Gleichung sind bez.

vom Grade $(n-2), (n-3), \ldots \quad 1, 0$ in den y_i

„ „ $\quad 2, \quad 3, \ldots (n-1), n$ „ „ x_i.

Ferner sind die x_i wieder vom Grade $n-1$ in den y_i und linear in den u_i; im Ganzen ist daher nach dem eben bewiesenen Satze $F(y, u)$ vom Grade

$$(n-3)(n-2) + (n-3)(n+2)(n-1) = (n-3)(n^2 + 2n - 4)$$

in den y_i und vom Grade $(n-3)(n+2)$ in den u_i. Es muss sich daher aus $F(y, u)$ ein Factor $u_y{}^{(n-3)(n+2)}$ absondern lassen, so dass der Rest vom Grade

$$(n-3)(n^2 + 2n - 4) - (n-3)(n+2) = (n-2)(n^2 - 9)$$

in den y ist. Die Gleichung $F(y, u) = 0$ stellt dann eine Curve dar, welche die gegebene Curve n^{ter} Ordnung in den Berührungspunkten der Doppeltangenten schneidet. Da nun auf jeder dieser Tangenten zwei Berührungspunkte liegen, so haben wir den zu erweisenden Satz: *Die Zahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung ist im Allgemeinen gleich $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$.**)

---

*) Eine die Berührungspunkte der Doppeltangenten ausschneidende Curve wurde zuerst von Cayley angegeben: Crelle's Journal, Bd. 34, p. 37. Für die Darstellung im Texte vgl. einen Aufsatz von Jakobi ib. Bd. 40, p. 37 und von Clebsch ib. Bd. 63, p. 186. Die wirkliche Absonderung der überflüssigen Factoren bei Curven 4. Ordnung gab Hesse, ib. Bd. 36, p. 156, Bd. 40, p. 260 und Bd. 41, p. 292. — Eine andere Methode zur Bestimmung dieser Curven rührt von Salmon her (Quaterly Journal of mathematics, vol. 3 und Higher plane curves, chap. IX); dieselbe wurde bewiesen von Cayley: Philosophical Transactions, 1859, p. 193 und 1861, p. 357. — Vgl. auch die auf den Principien der symbolischen Rechnung beruhende Darstellung von Dersch: Math. Annalen, Bd. 7, p. 497.

Die Reduction, welche diese Zahl zufolge der Plücker'schen Formeln durch das Auftreten von Doppel- und Rückkehrpunkten erleidet, können wir leicht aus unsern obigen Gleichungen bestimmen; man findet die folgende Formel:*)

$$(8) \quad t = \tfrac{1}{2} n (n-2)(n^2-9) - (2d+3r)[n(n-1)-6] + 2d(d-1) + \tfrac{9}{2} r (r-1) + 6dr.$$

Die Plücker'schen Formeln lassen sich in besonders einfacher Gestalt schreiben, wenn wir neben n, k, d, r, t, w noch eine siebente, sich selbst dualistisch entsprechende Singularität einführen: das *Geschlecht der Curve.***) Dasselbe (p) ist definirt durch

$$(9) \quad \begin{aligned} p &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w. \end{aligned}$$

Auf die eigentliche Bedeutung dieser Zahl werden wir erst später bei der Theorie der eindeutigen Transformationen geführt werden; wir benutzen dieselben hier nur, um *die vier Plückerschen Formeln in der folgenden einfachsten Form* darzustellen, welche sich auch dem Gedächtnisse am leichtesten einprägen dürfte:

$$(10) \quad \begin{aligned} 2p - 2 &= k + r - 2n \\ &= n + w - 2k \\ &= n(n-3) - 2(d+r) \\ &= k(k-3) - 2(t+w). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben nur die nothwendigen Relationen, welchen die Singularitäten einer algebraischen Curve unter allen Umständen genügen müssen. *Es ist jedoch bisher nicht bewiesen worden, dass umgekehrt jedes System ganzer Zahlen, das den* Plücker'*schen Formeln genügt, wirklich bei einer Curve auftreten kann.* Man ist im Allgemeinen nur in der Lage, gewisse obere Grenzen für d, r, t, w anzugeben, welche diese Zahlen nicht überschreiten dürfen; und zwar gilt der Satz:

Es muss immer $p \geq 0$ sein, wenn die Curve nicht in niedrigere Curven zerfallen soll, d. h.

---

*) Man kann sich die Bedeutung dieser einzelnen Reductionen auch direct geometrisch veranschaulichen; vgl. darüber Plücker: Theorie der algebraischen Curven, p. 210.

**) Der Begriff des Geschlechts einer algebraischen Function wurde von Riemann eingeführt: Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54, für die Curventheorie verwerthet besonders von Clebsch (zuerst ib. Bd. 63, p. 189 und Bd. 64,). Vgl. die sechste Abtheilung dieser Vorlesungen.

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geqq d + r$$

und

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} \geqq t + w\,.$$

Wäre nämlich $p < 0$, also etwa

$$d + r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

(oder grösser), so könnte man eine (eigentliche oder zerfallende) Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch diese Doppel- und Rückkehrpunkte und durch

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = 2n - 3$$

andere Punkte der Curve n^{ter} Ordnung legen. Diese Curve würde mit der gegebenen

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\right) + 2n - 3 = n(n-1) + 1$$

Schnittpunkte haben, also einen mehr, als möglich ist, wenn nicht Theile der Curven zusammenfallen, und also die Curve n^{ter} Ordnung zerfallen soll; damit ist obiger Satz bewiesen. Für den Fall $p = 0$, d. h. für

$$d + r = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

haben wir insbesondere

$$w = 3(n-2) - 2r,$$

und somit auch eine obere Grenze für die Zahl der Rückkehrpunkte, denn w darf niemals negativ werden: *Unter den* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *Doppel- und Rückkehrpunkten einer Curve vom Geschlechte Null können höchstens* $\frac{3}{2}(n-2)$ *Rückkehrpunkte vorhanden sein.*

Wenden wir nunmehr die gewonnenen Resultate auf die einfachsten Curven an, so erhalten wir für Kegelschnitte zunächst nichts Neues. Es ist hier

$$d = r = w = t = 0,$$

und

$$k = n = 2;$$

dagegen $k = 0$, für $n = 2$, $d = 1$, d. h. das Linienpaar ist von der Klasse Null, wie es sein muss (p. 309). Entsprechend hat man beim Punktepaare $k = 2$, $t = 1$, $n = 0$.

Bei Curven dritter Ordnung oder dritter Klasse ist im Allgemeinen $p = 1$, und daher im Besonderen nur *ein* Doppel- oder Rückkehrpunkt, bez. *eine* Doppel- oder Wendetangente möglich. Für die möglichen

Singularitäten bei *Curven dritter Ordnung* erhalten wir somit aus den Plücker'schen Formeln die folgende Tabelle:

$$n = 3$$

d	r	k	w	p
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0

und entsprechend für *Curven dritter Klasse*:

$$k = 3$$

t	w	n	r	p
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0.

Bei *Curven vierter Ordnung* treten noch Doppeltangenten hinzu. Ferner ist im Allgemeinen $p = 3$; es können also drei Doppelpunkte vorkommen, und da $\frac{3}{2}(n - 2) = 3$ ist, auch drei Rückkehrpunkte. Wir haben demnach die folgende Tabelle:

$$n = 4$$

d	r	k	w	t	p
0	0	12	24	28	3
1	0	10	18	16	2
0	1	9	16	10	2
2	0	8	12	8	1
1	1	7	10	4	1
0	2	6	8	1	1
3	0	6	6	4	0
2	1	5	4	2	0
1	2	4	2	1	0
0	3	3	0	1	0.

Die vorletzte Curve dieser Tabelle entspricht sich selbst dualistisch; die letzte Curve ist identisch mit der vorletzten in der Tabelle für $k = 3$. Die letzte Curve dieser Tabelle entspricht sich ebenfalls selbst dualistisch. Wie die Erfahrung gelehrt hat, existiren die hier aufgezählten Curven dritter und vierter Ordnung auch sämmtlich.

Wir haben bisher uns auf die Berücksichtigung einzelner Doppelpunkte etc. beschränkt. Die aufgestellten Formeln haben aber allgemeine Gültigkeit, denn man kann höhere vielfache Punkte in ihrem Einflusse auf Klasse der Curve und Zahl der Wendepunkte

immer durch eine gewisse Anzahl niederer Singularitäten ersetzen. Dies ist zunächst evident bei einem r-fachen Punkte mit lauter getrennt verlaufenden Zweigen. Denn in einem solchen hat jede erste Polare einen $(r-1)$-fachen Punkt, dessen Zweige die der Grundcurve nicht berühren, und es fallen daher $r(r-1)$ der vom Pole ausgehenden Tangenten in seine Verbindungslinie mit dem r-fachen Punkte zusammen. Ebenso viel beträgt die Erniedrigung der Klasse k, d. h. wir haben $d = \frac{r(r-1)}{2}$ zu setzen: *Der r-fache Punkt ist äquivalent mit $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkten*, wie wir es früher schon in anderer Weise gezeigt haben (p. 329). Dasselbe gilt auch für die Zahl der Wendepunkte; denn man überzeugt sich leicht, dass die Hesse'sche Curve in dem r-fachen Punkte ebenfalls einen r-fachen Punkt hat und die Zweige der Grundcurve sämmtlich berührt.

In ähnlicher Weise hat man auch complicirtere Singularitäten aufzulösen; man wird zu dem Zwecke den betreffenden Punkt in einen Eckpunkt des Coordinatendreiecks legen und dann die Cramer'sche Regel auf denselben anwenden (vgl. p. 330 ff.). Es ist dabei jedoch zu beachten, dass eine Singularität durch gleichzeitiges Auftreten vielfacher Tangenten in einem vielfachen Punkte entstehen kann; und dadurch wird dann ihre Untersuchung erschwert. Cayley hat zur Behandlung solcher Fälle Regeln angegeben*), nach denen es gelingt, mittelst Reihenentwicklungen den Einfluss der Singularität auf die Klasse zu bestimmen; es fehlt jedoch bisher an einer vollständigen Darstellung dieser Verhältnisse.

Die Beweise für die Plücker'schen Formeln beruhen wesentlich auf den Sätzen über das Verhalten der Polaren und der Hesse'schen Curve in den Doppel- und Rückkehrpunkten der Grundcurve. Diese Sätze haben wir gelegentlich bewiesen und beim Beweise eine specielle Lage des Coordinatendreiecks benutzt. Die symbolischen Methoden geben jedoch ein Mittel, um diese Hülfssätze auch leicht direct ohne Verlegung des Coordinatensystems abzuleiten, so dass ihr projectivischer Charakter auch äusserlich hervortritt; und wir wollen hierauf um so lieber eingehen, als uns darin ein passendes Beispiel für solche symbolische Rechnungen vorliegt.

Es sei die Gleichung der Grundcurve:

$$(1) \qquad 0 = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots,$$

und y ein Doppelpunkt derselben, so dass:

*) Cayley: On the higher singularities of plane curves, Quaterly Journal, vol. 7; und: Note sur les singularités des courbes planes, Crelle's Journal, Bd. 64, p. 369. — Vgl. auch den Schluss dieser Abtheilung der Vorlesungen.

(2) $$a_y^{n-1} a_1 = 0, \quad a_y^{n-1} a_2 = 0, \quad a_y^{n-1} a_3 = 0.$$

Durch diese Gleichungen ist unmittelbar ausgesprochen, dass die erste Polare eines *jeden* Punktes durch den Doppelpunkt geht. Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare des letzteren:

(3) $$a_y^{n-2} a_x^2 = 0$$

stellt dann das Product der beiden Tangenten in y dar. In Liniencoordinaten gibt dieselbe daher doppelt zählend die Gleichung ihres Schnittpunktes (vgl. p. 106), d. h. wir können setzen:

(4) $$(a b u)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = \varrho \, . \, u_y^2 .$$

Dieser Ausdruck verschwindet wegen (2) jedenfalls, wenn man setzt:

$$u_i u_k = c_i c_k c_y^{n-3} c_x ,$$

und zwar unabhängig von den Werthen der x_i. Wir haben daher die drei Gleichungen:

(5) $$\varrho c_y^{n-1} c_i = (a b c)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-3} c_i = 0,$$

und diese sagen aus, dass *die* Hesse'*sche Curve im Punkte y einen Doppelpunkt hat.*

Das Tangentenpaar der Hesse'schen Curve im Doppelpunkte ist gegeben durch:

$$(n-3) . (a b c)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-4} c_x^2 + 2(n-2) . (a b c)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x = 0.$$

Das erste Glied des links stehenden Ausdrucks entsteht (bis auf den Factor $n-3$) aus der linken Seite der Gleichung (4), wenn man darin

$$u_i u_k = c_i c_k c_y^{n-4} c_x^2$$

setzt. Durch diese Substitution wird aber auf der rechten Seite von (4):

$$u_y^2 = c_y^{n-2} c_x^2 ;$$

und also gibt das erste Glied unseres Ausdrucks, gleich Null gesetzt, das Tangentenpaar der Grundcurve: wir werden zeigen, dass dies auch mit dem zweiten Gliede der Fall ist, nämlich mit:

$$U = (a b c)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x .$$

Multipliciren wir diesen Term mit u_y, wo die u_i ganz willkürliche Grössen sind, so ist identisch (nach III, p. 283):

$$U . u_y = a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x (a b c) \left\{ (b c u) a_y - (a c u) b_y + (a b u) c_y \right\} .$$

Hier verschwindet das erste Glied wegen (2); die beiden andern sind identisch, da das eine aus dem andern durch Vertauschung von b und c hervorgeht; mithin ist:

$$U \,.\, u_y = 2\, a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x c_x\, (abc)\, (abu),$$
$$= a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x\, (abc) \left\{(abu)\, c_x - (bcu)\, a_x\right\}$$

oder nach der Identität III, p. 283:

$$U \,.\, u_y = a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x\, (abc) \left\{(acu)\, b_x - (abc)\, u_x\right\}.$$

Der zweite Term verschwindet nach (5), und der erste hat nach (4) den Werth:

$$U \,.\, u_y = -\, \varrho\, b_y^{n-2} b_x^2 \,.\, u_y\,,$$

denn er entsteht bis auf das Vorzeichen aus

$$(abu)\, (abv)\, a_y^{n-2} b_y^{n-2} = (acu)\, (acv)\, a_y^{n-2} c_y^{n-2} = \varrho\, u_y \,.\, v_y\,,$$

wenn man $v_i = b_y^{n-3} b_x^2 b_i$ setzt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen: *die* Hesse'*sche Curve berührt die beiden Zweige der Grundcurve im Doppelpunkte.* Dass die Tangente einer beliebigen ersten Polarcurve harmonisch zu dem Tangentenpaare des Doppelpunktes und zu der Verbindungslinie des letzteren mit dem betreffenden Pole (z) ist (p. 322), folgt daraus, dass diese Tangente:

$$a_y^{n-2} a_z a_x = 0 \tag{6}$$

zufolge der Form ihrer Gleichung mit der Polare des Punktes z in Bezug auf das Linienpaar $a_y^{n-2} a_x^2 = 0$ zusammenfällt.

Hat die Grundcurve im Punkte y einen Rückkehrpunkt, so wird die quadratische Polare von y das vollständige Quadrat eines linearen Ausdrucks, d. h. es ist:

$$a_y^{n-2} a_x^2 = v_x^2, \tag{7}$$

wo v_i die Coordinaten der Rückkehrtangente bedeuten. Die Gleichung der Tangente der ersten Polare eines Punktes z in y (6) ist dann identisch mit

$$v_x \,.\, v_z = 0;$$

also: *die erste Polare eines beliebigen Punktes berührt die Rückkehrtangente im Rückkehrpunkte.*

Aber in letzterem hat auch die $(n-3)^{\text{te}}$ Polare von y:

$$a_y^{n-3} a_x^3 = 0$$

Rückkehrpunkt und Rückkehrtangente mit der gegebenen Curve gemein. Nach dem eben bewiesenen Satze berührt also die Polare eines Punktes in Bezug auf diese Curve dritter Ordnung:

$$a_y^{n-3} a_z a_x^2 = 0$$

die Rückkehrtangente v im Rückkehrpunkte. Folglich wird die Gleichung dieses Kegelschnittes in Liniencoordinaten:

$$a_y^{n-3} b_y^{n-3} (abu)^2\, a_z b_z = 0$$

erfüllt, wenn man setzt:

$$u_i u_k = v_i v_k = c_y^{n-2} c_i c_k,$$

und zwar unabhängig von den z_i. Es ist daher die Gleichung:

$$(8) \qquad (abc)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-3} c_y^{n-2} a_z b_z = 0^{*)}$$

identisch erfüllt. Dies ist aber die Gleichung der quadratischen Polare von y in Bezug auf die Hesse'sche Curve; denn das in derselben sonst noch auftretende Glied

$$a_y^{n-4} b_y^{n-2} c_y^{n-2} (abc)^2 a_z^2$$

geht aus dem wegen (7) verschwindenden Ausdrucke $(bcu)^2 b_y^{n-2} c_y^{n-2}$ für $u_i u_k = a_i a_k a_y^{n-4} a_x^2$ hervor, und ist demnach ebenfalls identisch Null. Aus (8) folgt also: *Die* Hesse'*sche Curve hat im Rückkehrpunkte der Grundcurve einen dreifachen Punkt.*

Die Bestimmung der 3 Tangenten im dreifachen Punkte werden wir leicht erledigen, wenn wir zuvor die entsprechenden Verhältnisse bei Curven dritter Ordnung betrachtet haben. Hat eine solche einen Rückkehrpunkt y mit der Rückkehrtangente v, und ist ξ ein Punkt der letzteren, so geht die Gleichung (7) über in:

$$a_y a_x^2 = v_x^2 = (xy\xi)^2.$$

Es sei nun

$$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x,$$

so wird, wenn die u_i beliebige Grössen bedeuten:

$$\begin{aligned}\Delta u_y &= (abc)\, a_x b_x c_x \left\{(abu)\, c_y - (acu)\, b_y + (bcu)\, a_y\right\} \\ &= 3\,(abc)\,(abu)\, a_x b_x c_x c_y = 3\,(abv)\,(abu)\, a_x b_x \,.\, v_x \\ &= 3\,(a_y b_\xi - b_y a_\xi)\,(abu)\, a_x b_x \,.\, v_x \\ &= 6\, a_y b_\xi\, (abu)\, a_x b_x \,.\, v_x = 6\,(vbu)\, b_x b_\xi \,.\, v_x^2.\end{aligned}$$

Da wir nun die u_i so gewählt annehmen können, dass der Factor $(vbu)\, b_x b_\xi$ nicht identisch Null ist, so folgt: *Die* Hesse'*sche Curve einer Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt besteht aus drei geraden Linien, von welchen zwei mit der Rückkehrtangente zusammenfallen* (vgl. p. 327).

Bei Curven n^{ter} Ordnung sind uns die drei Tangenten der

---

*) Das Verschwinden dieses Ausdruckes, der mit P bezeichnet sei, erkennt man auch in folgender Weise. Es sei ξ ein Punkt der Rückkehrtangente ($v_\xi = 0$), dann ist nach (7):

$$a_y^{n-2} a_x^2 = (x\xi y)^2,$$

und ferner:

$$a_y^{n-2} a_x a_\xi = v_x v_\xi = 0; \quad a_y^{n-1} a_x = 0.$$

Hieraus folgt wieder, dass identisch:

$$P = (a_\xi b_y - b_\xi a_y)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-3} a_z b_z = a_y^{n-3} b_y^{n-3} a_z b_z \left(a_y^2 b_\xi^2 - 2 a_\xi b_\xi a_y b_y + b_y^2 a_\xi^2\right) = 0.$$

Hesse'schen Curve dargestellt durch die cubische Polare von y in Bezug auf letztere, d. h. durch die Gleichung:

(9) $$(n-2)\, a_y^{n-3} b_y^{n-3} c_y^{n-3} (abc)^2 a_x b_x c_x + 2(n-3)\, a_y^{n-4} b_y^{n-3} c_y^{n-2} (abc)^2 a_x^2 b_x = 0;$$

denn das Glied

$$(abc)^2\, a_y^{n-3} b_y^{n-2} c_y^{n-2} a_x^3$$

verschwindet wegen (7) identisch. Wir untersuchen nun die beiden Glieder in (9) einzeln: Das erste, für sich gleich Null gesetzt, gibt die Hesse'sche Curve der Curve dritter Ordnung

$$a_y^{n-3} a_x^3 = 0,$$

welche in y auch einen Rückkehrpunkt mit der Rückkehrtangente v hat; es enthält daher nach dem soeben bewiesenen Satze den Factor v_x^2. Dasselbe gilt aber auch für das zweite Glied auf der linken Seite von (9). Bezeichnen wir dasselbe nämlich, abgesehen von dem Factor $2(n-3)$ durch Q, so ist nach (7):

$$Q = a_y^{n-4} b_y^{n-3} c_y^{n-2} (abc)^2\, a_x^2 b_x = a_y^{n-4} b_y^{n-3} (abv)^2\, a_x^2 b_x.$$

Ist nun wieder ξ ein Punkt der Rückkehrtangente, also $v_\xi = 0$, so wird ferner:

$$\begin{aligned} Q &= a_y^{n-4} b_y^{n-3} (a_y b_\xi - b_y a_\xi)^2\, a_x^2 b_x \\ &= a_y^{n-2} a_x^2 \,.\, b_y^{n-3} b_\xi^2 b_x + a_y^{n-4} a_x^2 a_\xi^2 \,.\, b_y^{n-1} b_x \\ &\quad - 2 a_y^{n-3} a_x^2 a_\xi \,.\, b_y^{n-2} b_x b_\xi, \end{aligned}$$

oder wegen (2) und (7):

$$Q = v_x^2 \,.\, b_y^{n-3} b_\xi^2 b_x - 2 v_x v_\xi \,.\, a_y^{n-3} a_x^2 a_\xi$$

und endlich wegen $v_\xi = 0$:

$$Q = v_x^2 \,.\, b_y^{n-3} b_\xi^2 b_x.$$

Es enthält also in der That der Ausdruck (9) den Factor v_x^2, und somit haben wir den Satz: *Hat eine Curve einen Rückkehrpunkt, so hat in ihm die* Hesse*'sche Curve derartig einen dreifachen Punkt, dass zwei Tangenten derselben in ihm mit der Rückkehrtangente der gegebenen Curve zusammenfallen.*

In der Umformung, welche wir mit Q vorgenommen haben, liegt ein geometrischer Satz. Es ist nämlich

$$Q \equiv a_y^{n-4} b_y^{n-3} (abv)^2\, a_x^2 b_x = 0$$

die Gleichung der ersten Polare von y in Bezug auf die Curve:

(10) $$a_y^{n-4} b_y^{n-4} (abv)^2\, a_x^2 b_x^2 = 0.$$

Die letztere hat daher ebenso wie Q in y einen dreifachen Punkt. In (10) haben wir aber gleichzeitig die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_y^{n-4} a_x^2 a_z^2 = 0$$

in Liniencoordinaten, d. h. der quadratischen Polare von x in Bezug auf die Curve:

(11) $$a_y^{n-1} a_z^4 = 0,$$

eine Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt in y. Die Gleichung (10) gibt also den Ort der Punkte x, deren quadratische Polaren in Bezug auf (11) eine Linie mit den Coordinaten v_i berühren. *Hat also eine Curve vierter Ordnung einen Rückkehrpunkt, so liegen die Punkte, deren zweite Polaren die Rückkehrtangente berühren, auf einer andern Curve vierter Ordnung. Die letztere hat im Rückkehrpunkte einen dreifachen Punkt, und zwei ihrer Tangenten in diesem fallen mit der Rückkehrtangente der gegebenen Curve zusammen.*

IV. Ueber einige covariante Curven.

Es wurde schon früher bemerkt (p. 316), dass man in symbolischer Form sofort unbegrenzt viele Covarianten hinschreiben kann, deren Bedeutung dann eben mittelst der Polarentheorie zu erschliessen ist. Von solchen Covarianten sind jedoch allgemein bisher nur wenige untersucht, nämlich diejenigen, welche durch die einfachsten geometrischen Forderungen bedingt werden; und das Studium der entsprechenden Curven soll uns zunächst beschäftigen. Wir werden dabei ein erstes Beispiel für eine *eindeutige, nicht lineare Beziehung zwischen zwei Curven* kennen lernen; und die erst später hervortretende ausserordentliche Wichtigkeit solcher Beziehungen wird ein längeres Verweilen bei diesem Gegenstande rechtfertigen. Wir werden ferner Gelegenheit haben, von den soeben entwickelten Plücker'schen Formeln wiederholt Gebrauch zu machen.

Wenn beregte Gattung von Covarianten allgemein durch die Forderung charakterisirt war, dass die r^{te} Polare eines Punktes eine bestimmte Invarianteneigenschaft habe, so stellen wir insbesondere die Bedingung, dass die erste Polare eines Punktes x in Bezug auf die Grundcurve

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0$$

einen Doppelpunkt besitze. Wir erhalten bekanntlich (p. 318) als Ort dieser Doppelpunkte die Hesse'sche Curve von der Ordnung $3(n-2)$ durch Elimination der y_i (Coordinaten des Poles) aus den 3 Gleichungen $\left(f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_k}\right)$:

(1) $$\begin{aligned} a_x^{n-2} a_y a_1 &= \Sigma f_{1k} y_k = 0 \\ a_x^{n-2} a_y a_2 &= \Sigma f_{2k} y_k = 0 \\ a_x^{n-2} a_y a_3 &= \Sigma f_{3k} y_k = 0. \end{aligned}$$

Eine zweite Curve wird alsdann von dem Pole y durchlaufen: *die*

Steiner'*sche Curve der Grundcurve*; eine dritte von den Verbindungslinien eines Poles y (Punktes der Steiner'schen Curve) mit dem Doppelpunkte seiner ersten Polare (Punktes der Hesse'schen Curve) umhüllt: *die* Cayley'*sche Curve der Grundcurve*.*) Eine vierte Curve endlich wird von den Tangenten der ersten Polaren in ihren Doppelpunkten umhüllt.**) Wir werden unsere Betrachtungen jedoch auf die drei zuerst erwähnten Curven beschränken. Ferner wollen wir voraussetzen, dass die Coëfficienten der Grundcurve sämmtlich von einander unabhängig sind.

Die Hesse'sche Curve besitzt — so nimmt man an — im Allgemeinen weder Doppel- noch Rückkehrpunkte. Ihre Gleichung nämlich ist:

$$\Delta = (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 0,$$

und für einen Doppelpunkt y derselben müssen also die 3 Gleichungen (vgl. (7) p. 313) bestehen:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_i} = 3\,(abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-3} c_i = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen würde man durch Elimination der y die Discriminante von Δ erhalten. Dieselbe enthält jedenfalls die Discriminante von f als Factor; denn die Hesse'sche Curve hat immer gleichzeitig mit der Grundcurve einen Doppelpunkt (p. 355). Ihr zweiter Factor wird durch eine andere Invariante von f, bez. durch das Product mehrerer solcher, gebildet werden. In Folge des Verschwindens von Invarianten der Grundcurve kann daher die Hesse'sche Curve vielfache Punkte erhalten. So werden wir z. B. sehen, dass dieselbe für eine Curve 3ter Ordnung in drei Gerade zerfällt, sobald eine bestimmte (in der Regel mit S bezeichnete) Invariante der letzteren verschwindet. Es könnte jedoch auch sein, dass

---

*) Von Cayley zuerst für Curven 3. Ordnung untersucht: A memoir on curves of the third order, Philosophical Transactions, vol. 147, part. 2, 1857. — Die Singularitäten derselben gab Steiner ohne Beweis in Crelle's Journal, Bd. 47. Für die Steiner'sche Curve leitete Cremona die betreffenden Zahlen ab (Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven). Die unten folgenden analytischen Beweise erbrachte Clebsch: Ueber einige von Steiner behandelte Curven; Crelle's Journal, Bd. 64. Steiner bezeichnet die später nach ihm benannte Curve als *Kerncurve*.

**) Aus später zu erwähnenden allgemeineren Untersuchungen von Zeuthen über einfach unendliche Curvensysteme (vgl. Abschnitt VI dieser Abtheilung) ergibt sich für die Ordnung p dieser Curve:

$$2\,p = 2\,.\,3\,(n-2) + 12\,(n-2)\,(n-3) = 6\,(n-2)\,(2\,n-5).$$

die Discriminante der Hesse'schen Curve für $n > 3$ einen identisch verschwindenden Factor erhält, wenngleich dies erfahrungsmässig für $n = 3$ noch nicht der Fall ist; und dann würde sie Doppelpunkte besitzen, ohne dass für die Grundcurve eine Invariantenrelation besteht. Wir wollen jedoch im Folgenden, wenngleich dafür bisher ein Beweis nicht erbracht ist, wie es gewöhnlich geschieht, annehmen, dass *die* Hesse'*sche Curve keinen Doppelpunkt hat, wenn die Coëfficienten der Gleichung der Grundcurve von einander unabhängig sind.*

Für die Singularitäten der Hesse'schen Curve (die durch gestrichene Buchstaben bezeichnet seien) ergeben sich sonach aus den Plücker-schen Formeln die folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned}
n' &= 3(n-2), \quad d' = 0, \quad r' = 0, \\
k' &= n'(n'-1) &&= 3(n-2)(3n-7), \\
w' &= 3n'(n'-2) &&= 9(n-2)(3n-8), \\
t' &= \tfrac{1}{2} n'(n'-2)(n'^2-9) &&= \tfrac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8) \\
p' &= \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) &&= \tfrac{1}{2}(3n-7)(3n-8).
\end{aligned}$$

Die Gleichung der Steiner'schen Curve wird durch Elimination der x aus den Gleichungen (1) erhalten; sie ist daher nach dem Satze (p. 313), dass der Grad der Resultante in den Coëfficienten einer jeden Gleichung gleich dem Producte der Ordnungen ist, zu welchen die Variabeln in den beiden andern Gleichungen vorkommen (also hier gleich $(n-2)^2$), vom Grade $3(n-2)^2$ in den y, d. h. *die Ordnung der* Steiner'*schen Curve ist gleich* $3(n-2)^2$.

Um ihre Klasse zu bestimmen, bemerken wir, dass die Coordinaten u_i einer Tangente derselben aus den Formeln

$$(2) \qquad \begin{aligned}
u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 &= 0 \\
u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3 &= 0
\end{aligned}$$

gefunden werden; denn die Tangente ist die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte der Curve mit den Coordinaten y_i und $y_i + dy_i$. Der Punkt $y + dy$ muss ebenso wie y den Gleichungen (1) genügen, wenn man in denselben $x_i + dx_i$ statt x_i schreibt. Wir haben also noch die drei Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned}
f_{11} dy_1 + f_{12} dy_2 + f_{13} dy_3 + df_{11} y_1 + df_{12} y_2 + df_{13} y_3 &= 0 \\
f_{21} dy_1 + f_{22} dy_2 + f_{23} dy_3 + df_{21} y_1 + df_{22} y_2 + df_{23} y_3 &= 0 \\
f_{31} dy_1 + f_{32} dy_2 + f_{33} dy_3 + df_{31} y_1 + df_{32} y_2 + df_{33} y_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Multipliciren wir nun die Gleichungen (1) einmal mit x_1, x_2, x_3, das andere Mal mit dx_1, dx_2, dx_3, und addiren jedes Mal, so kommt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 &= 0, \\ df_1 y_1 + df_2 y_2 + df_3 y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ferner geben die Gleichungen (3), mit x_1, x_2, x_3 multiplicirt und addirt, unter Berücksichtigung von (4) das Resultat:

$$(5)\qquad f_1 dy_1 + f_2 dy_2 + f_3 dy_3 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen (2), so findet man:

$$(6)\qquad \mu u_1 = f_1, \quad \mu u_2 = f_2, \quad \mu u_3 = f_3;$$

und dadurch ist jedem Punkte der Hesse'schen eine Tangente der Steiner'schen Curve zugeordnet. Eliminiren wir hieraus und aus der Gleichung

$$\Delta = 0$$

die x, so resultirt eine Gleichung in den u: die Gleichung der Steiner'schen Curve in Liniencoordinaten. Die Klasse derselben ist durch die Zahl der Tangenten bestimmt, welche durch einen beliebigen Punkt ξ gehen, d. h. der Gleichung $u_\xi = 0$ oder:

$$f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 + f_3 \xi_3 = 0$$

genügen. Diese Gleichung stellt aber eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, welche mit der Hesse'schen Curve zusammen diejenigen $3(n-2)(n-1)$ Punkte bestimmt, deren entsprechende Tangenten der Steiner'schen Curve durch den Punkt ξ gehen. Damit ist auch die Zahl der letzteren gegeben: *Die* Steiner*'sche Curve ist von der Klasse* $3(n-1)(n-2)$.

Wir wenden uns zunächst zur Bestimmung von Ordnung und Klasse der Cayley'schen Curve. Ein Punkt derselben ist definirt als Schnittpunkt von zwei benachbarten Tangenten; um die Ordnung zu finden, müssen wir also fragen: wie oft kommt es vor, dass sich zwei unendlich benachbarte Tangenten auf einer beliebigen Geraden v schneiden? Es seien z_i die Coordinaten eines Punktes der Curve; dann ist die Tangente in ihm Verbindungslinie eines Poles y mit dem Doppelpunkte x seiner ersten Polare, und also die benachbarte Tangente Verbindungslinie zweier Punkte $x + dx$, $y + dy$, wenn x und $x + dx$ benachbarte Punkte der Hesse'schen Curve sind. Wir haben somit:

$$(7)\qquad z_i = \mu x_i + \lambda y_i$$

und auch:

$$z_i = (\mu + d\mu)(x_i + dx_i) + (\lambda + d\lambda)(y_i + dy_i);$$

und daraus folgt:

$$(8)\qquad x_i d\mu + \mu dx_i + y_i d\lambda + \lambda dy_i = 0.$$

Soll z ferner auf einer bestimmten Geraden v liegen ($v_z = 0$), so ist nach (7):

$$\mu v_x + \lambda v_y = 0.$$

Daher kann mam setzen:

$$\lambda = \varrho v_x, \quad \mu = - \varrho v_y,$$

und dadurch geht (8) über in:

$$(9) \qquad x_i d\mu + y_i d\lambda + \varrho (v_x dy_i - v_y dx_i) = 0.$$

Setzen wir aus diesen Gleichungen die Werthe der dy_i in die auch hier bestehenden Gleichungen (3) ein, so finden wir unter Berücksichtigung von (1):

$$(10) \quad \varrho v_x (y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3}) + \varrho v_y \Sigma f_{ik} dx_k - f_i d\mu = 0.$$

Aus diesen Gleichungen können wir die Differentiale der x_i nach einer passenden Umformung derselben eliminiren und erhalten dann eine Gleichung, welche zwischen je zwei entsprechenden Punkten x und y der Hesse'schen und Steiner'schen Curve bestehen muss, damit der Berührungspunkt ihrer Verbindungslinie mit der Cayley'-schen Curve auf der Geraden v liege. Bezeichnen wir nämlich durch f_{ikh} die dritten Differentialquotienten von f:

$$f_{ikh} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} = a_x^{n-3} a_i a_k a_h,$$

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = (n-2) \Sigma\Sigma f_{ikh} y_k dx_h,$$

und setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\varphi_{ik} = (n-2) \left\{ y_1 f_{1ik} + y_2 f_{2ik} + y_3 f_{3ik} \right\},$$

so geht der Ausdruck links über in:

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = \varphi_{i1} dx_1 + \varphi_{i2} dx_2 + \varphi_{i3} dx_3.$$

Substitutiren wir dies in die Gleichung (10), so kommt:

$$\varrho v_x \Sigma \varphi_{ik} dx_k + \Sigma (\varrho v_y dx_k - x_k d\mu) f_{ik} = 0.$$

Diese Gleichungen multipliciren wir nun mit v_y und fügen Glieder $- d\mu \Sigma \varphi_{ik} x_k$ hinzu. Die letztere Operation ist ohne Einfluss, denn wir haben nach dem Euler'schen Satze und nach (1):

$$\varphi_{i1} x_1 + \varphi_{i2} x_2 + \varphi_{i3} x_3 = (n-2) \left\{ f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3 \right\}$$
$$= 0.$$

Unsere Gleichungen werden dadurch endlich:

$$v_y \,.\, \Sigma p_k f_{ik} + v_x \Sigma p_k \varphi_{ik} = 0,$$

wo $p_k = \varrho dx_k - x_k d\mu$ gesetzt ist; und die Elimination der p_k, und somit auch die der dx_k gibt das Resultat:

$$(11)\quad \begin{vmatrix} v_y f_{11} + v_x \varphi_{11} & v_y f_{21} + v_x \varphi_{21} & v_y f_{31} + v_x \varphi_{31} \\ v_y f_{21} + v_x \varphi_{21} & v_y f_{22} + v_x \varphi_{22} & v_y f_{32} + v_x \varphi_{32} \\ v_y f_{31} + v_x \varphi_{31} & v_y f_{32} + v_x \varphi_{32} & v_y f_{33} + v_x \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Determinante ist homogen vom dritten Grade in v_x und v_y, also von der Form:

$$v_x^3 P + v_x^2 v_y Q + v_x v_y^2 R + v_y^3 S .$$

Hier ist aber S die aus den f_{ik} gebildete Determinante, und also gleich Null wegen $\Delta = 0$; ferner bedeutet P die Determinante der φ_{ik}, und diese verschwindet ebenfalls wegen

$$\varphi_{i1} x_1 + \varphi_{i2} x_2 + \varphi_{i3} x_3 = 0 .$$

Daher ist der Ausdruck (11) durch $v_x v_y$ theilbar, und nach Fortlassung dieses Factors bleibt eine Gleichung von der Form

$$\Sigma \Sigma A_{ik} y_i y_k = 0 ,$$

wo die A_{ik} Functionen von der Ordnung $3n - 7$ in den x bedeuten. Inzwischen werden in Folge von (1) die Producte $y_i y_k$ den Unterdeterminanten F_{ik} von Δ proportional*), und man kann also (11) schliesslich ersetzen durch die Gleichung

$$\Sigma \Sigma A_{ik} F_{ik} = 0 ,$$

welche nur noch von den x abhängt. Sie stellt, da die F_{ik} die x in der $(2n - 4)^{\text{ten}}$ Dimension enthalten, eine Curve von der Ordnung $3n - 7 + 2n - 4 = 5n - 11$ dar, welche auf der Hesse'schen Curve diejenigen Punkte x ausschneidet, deren Verbindungslinien mit den entsprechenden Polen y die Cayley'sche Curve in ihren Schnittpunkten mit der Linie v berühren, d. h. *die Ordnung der* Cayley'*schen Curve ist gleich* $3(n-2)(5n-11)$.

Einfacher gestaltet sich hier die Bestimmung der Klasse. Soll die als Verbindungslinie zweier einander zugehörigen Punkte x und y definirte Tangente der Curve durch einen bestimmten Punkt ξ gehen, so muss man haben:

$$y_i = \mu x_i + \lambda \xi_i .$$

Dies in die Gleichungen (1) eingesetzt, gibt:

$$(12)\qquad \mu f_i + \lambda \varphi_i = 0 ,$$

wenn:

$$\varphi_i = f_{i1} \xi_1 + f_{i2} \xi_2 + f_{i3} \xi_3 .$$

Man findet also die entsprechenden Werthe der x aus den Gleichungen:

*) Man hat nämlich aus (1) nach Sätzen der Kegelschnitttheorie:

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = \varrho \cdot u_y^2 .$$

$$f_2\varphi_3 - \varphi_2 f_3 = 0,$$
(13) $$f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1 = 0,$$
$$f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 = 0.$$

Die Zahl der gemeinsamen Lösungen der ersten beiden Gleichungen ist gleich $(2n-3)^2$. Aber davon sind die $(n-1)(n-2)$ Lösungen der Gleichungen $f_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$ auszuschliessen, für welche nur die ersten beiden Gleichungen erfüllt sind, nicht aber die letzte; und ferner haben wir die offenbar unbrauchbare Lösung $x_i = \xi_i$ abzusondern. Es bleiben also nur $(2n-3)^2 - (n-1)(n-2) - 1 = 3(n-1)(n-2)$ gemeinsame Punkte der Curven (13). Einem jeden derselben entspricht eine Tangente der Cayley'schen Curve durch den Punkt ξ; *also ist die Klasse der* Cayley'*schen Curve gleich* $3(n-1)(n-2)$.

Die Bestimmung der weiteren charakteristischen Zahlen für die Steiner'sche Curve, insbesondere der Zahl ihrer Wendetangenten kann man an die Gleichungen (6) anknüpfen, vermöge deren eine Tangente u derselben einem Punkte x der Hesse'schen Curve durch die Relationen

$$\mu u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

zugeordnet ist. Hieraus folgt nämlich zunächst: *Die* Steiner'*sche Curve wird von den linearen Polaren der Punkte der* Hesse'*schen Curve umhüllt; und zwar ist der Berührungspunkt einer solchen Polare immer der dem Pole x der* Hesse'*schen Curve entsprechende Punkt y der Steinerschen Curve.* Letzteres folgt daraus, dass wegen (1) für y immer die Gleichungen (4) bestehen:

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0,$$
$$df_1 y_1 + df_2 y_2 + df_3 y_3 = 0$$

und also y immer Schnittpunkt von zwei successiven Tangenten u und $u + du$ ist. Man kann nun überhaupt nach Ordnung und Klasse einer Curve $\Phi = 0$ fragen, die von den linearen Polaren der Punkte einer Curve m^{ter} Ordnung

(14) $$\varphi = 0$$

in Bezug auf die Grundcurve $f = 0$ (n^{ter} Ordnung) umhüllt wird, wobei dann die Curve m^{ter} Ordnung an Stelle der Hesse'schen Curve in den bisherigen Untersuchungen tritt. Die Klasse ist bestimmt durch die Anzahl der Tangenten durch einen festen Punkt ξ, also durch die Zahl der Schnittpunkte der Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

(15) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$

mit $\varphi = 0$, und somit ist dieselbe gleich $m(n-1)$. Zur Bestimmung der Ordnung müssen wir den Punkt ξ auf einer beliebigen Geraden v

so wählen, dass zwei der durch ihn gehenden Tangenten, und somit zwei Schnittpunkte der Curven (14) und (15) einander unendlich nahe rücken; entspricht doch jedem dieser Schnittpunkte eine jener Tangenten. Hieraus folgt zunächst:

Die ersten Polaren der Punkte einer Curve, welche von den linearen Polaren einer anderen Curve φ umhüllt wird, berühren die letztere Curve.

Zur Erreichung unseres Zweckes haben wir sonach die Bedingung dafür aufzustellen, dass die Curven (14) und (15) sich berühren, oder wenigstens den Grad dieser Bedingung in den Coëfficienten von (15), und somit in den ξ anzugeben. Wir erweitern diese Aufgabe dahin, dass *überhaupt der Grad der „Tactinvariante“ (d. i. der Berührungsbedingung) zweier Curven m^{ter} und μ^{ter} Ordnung in den Coëfficienten ihrer Gleichungen bestimmt werden soll.* — Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bez. diese Curven, und dieselben berühren sich im Punkte x, so müssen, wenn v eine beliebige Gerade und ξ ihr Schnittpunkt mit der gemeinsamen Tangente von φ und ψ in x ist, folgende Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$
$$v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0.$$

Eliminirt man aus ihnen die ξ_i, so folgt:

$$(16) \qquad V = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung von der Ordnung $m + \mu - 2$, welche im Allgemeinen den Ort der Punkte darstellt, deren lineare Polaren sich auf der Linie v schneiden; und diese Curve geht also unabhängig von den v durch den Berührungspunkt. Nehmen wir dagegen die x constant, die v veränderlich, so gibt (16) die Gleichung des Schnittpunktes der beiden linearen Polaren von x. Dieser Schnittpunkt fällt aber mit dem Pole x zusammen, wenn letzterer ein gemeinsamer Punkt von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ist. Die Elimination der x aus den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ und aus (16) gibt also das Product der Schnittpunkte von φ und ψ. Doch ist dasselbe noch mit einem Factor behaftet, denn die Gleichung würde hier vom Grade $m\mu$ in den Coëfficienten von V, vom Grade $\mu(m + \mu - 2)$ in denen von φ und vom Grade $m(m + \mu - 2)$ in denen von ψ, also im Ganzen bez. vom Grade $\mu(2m + \mu - 2)$ und $m(2\mu + m - 2)$ in den Coëfficienten von φ und ψ werden, während diese Zahlen doch nach früheren Ueber-

legungen (vgl. p. 282) nur bez. gleich μ und m sein dürfen. Der hinzutretende Factor ist demnach vom Grade $\mu(2m+\mu-3)$ und $m(2\mu+m-3)$ in den Coëfficienten von φ und ψ. Da nun die Gleichung (16) und also auch unsere Resultante unabhängig von den v verschwindet, wenn x ein Berührungspunkt von φ und ψ ist, so gibt der besprochene Factor, gleich Null gesetzt, eben die Bedingung der Berührung und wir haben den Satz:

*Die Bedingung der Berührung (Tactinvariante) zweier Curven von der m^{ten} und μ^{ten} Ordnung ist von dem Grade $\mu(2m+\mu-3)$ in den Coëfficienten der ersten und vom Grade $m(2\mu+m-3)$ in denen der zweiten Curve.**)

In unserm Falle haben wir eine Curve m^{ter} Ordnung (14) und eine $(n-1)^{ter}$ Ordnung (15); ihre Tactinvariante ist daher in den Coëfficienten der letzteren, und somit auch in den ξ (worauf es uns hier allein ankommt) vom Grade $m(2n+m-5)$. Die Invariante gleich Null gesetzt gibt aber unmittelbar den Ort der Punkte ξ, deren erste Polaren die Curve φ berühren, d. h. die Curve $\Phi=0$ in Punktcoordinaten, d. h. *die Ordnung der von den linearen Polaren der Punkte von $\varphi=0$ umhüllten Curve ist gleich $m(2n+m-5)$.*

Ersetzen wir nun wieder $\varphi=0$ durch die Hesse'sche Curve und also m durch $3(n-2)$, so würden wir die Ordnung der Steiner'schen Curve gleich $3(n-2)(5n-11)$ finden, während dieselbe doch thatsächlich gleich $3(n-2)^2$ ist. Dies rührt daher, dass von den Tangenten, die von ξ an $\Phi=0$ zu legen sind, auch für jeden Punkt einer Wendetangente von Φ zwei *successive***) zusammenfallen. Bei der Steiner'schen Curve treten daher Wendetangenten auf, (was im Allgemeinen bei einer als Liniengebilde gegebenen Curve $\Phi=0$ nicht der Fall sein wird); und sonach folgt:

Der Ort der Punkte, deren erste Polaren die Hesse'*sche Curve berühren, zerfällt in die* Steiner'*sche Curve von der Ordnung $3(n-2)^2$ und in eine andere Curve von der Ordnung $3(n-2)(5n-11)-3(n-2)^2=3(n-2)(4n-9)$, das Product der Wendetangenten der* Steiner'*schen Curve.* Für die ersten Polaren der Punkte dieser Wendetangenten ist die Berührung eine eigentliche, für die der Punkte der Steiner'schen Curve hingegen eine uneigentliche, insofern die letzteren auf der Hesse'schen Curve einen Doppelpunkt haben. Der zuletzt ausgesprochene Satz gibt uns die Zahl der Wendetangenten der Steiner'schen Curve, nämlich:

$$3(n-2)(4n-9),$$

*) Vgl. Salmon: Higher plane curves, chap. III. — Als Beispiel vgl. die Tactinvariante zweier Kegelschnitte auf p. 298 dieses Bandes.

**) Für den Punkt einer Doppeltangente fallen zwar auch zwei dieser Tangenten zusammen; dieselben sind aber nicht successiv.

und somit können wir die übrigen Singularitäten vermöge der Plücker'schen Formeln berechnen.

Diese Bestimmung gelingt jedoch auch auf anderem Wege, wenn wir einen erst später zu beweisenden Satz benutzen wollen, welcher uns zugleich die Wichtigkeit der Zahl p, des Geschlechtes der Grundcurve, erkennen lässt. Es ist dies der folgende:

Wenn zwei algebraische Curven so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte der einen Curve nur ein Punkt der andern entspricht, so ist das Geschlecht für beide Curven dasselbe.

Zwischen der Hesse'schen und Steiner'schen Curve besteht nämlich eine Beziehung der Art: einem beliebigen Punkte der letzteren entspricht *ein* Punkt der ersteren: der Doppelpunkt seiner ersten Polare, und ebenso ist die umgekehrte Beziehung eindeutig. Ebenso sind aber auch die Hesse'sche und die Steiner'sche Curve eindeutig auf die Cayley'sche Curve bezogen: Einem beliebigen Punkte der ersteren entspricht *eine* Tangente und somit *ein* Punkt der letzteren, und umgekehrt. Das Geschlecht der Cayley'schen und Steiner'schen Curve ist daher gleich dem Geschlechte der Hesse'schen Curve*), gleich $\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$; und aus Geschlecht, Ordnung und Klasse können wir für jede der Curven die übrigen Singularitäten nach den Plücker'schen Formeln berechnen. Die Ausführung der Rechnung liefert uns folgende Tabelle, in der wir die Zahlen für die Hesse'sche Curve zum Vergleiche noch einmal mittheilen:

	Hesse'sche Curve	Steiner'sche Curve	Cayley'sche Curve
p	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$
n	$3(n-2)$	$3(n-2)^2$	$3(n-2)(5n-11)$
k	$3(n-2)(3n-7)$	$3(n-1)(n-2)$	$3(n-1)(n-2)$
d	0	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$	$\frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$
r	0	$12(n-2)(n-3)$	$18(n-2)(2n-5)$
t	$\frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$	$\frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$
w	$9(n-2)(3n-8)$	$3(n-2)(4n-9)$	0

Die Doppelpunkte der Curve von Steiner hat man sich, wie später bei Behandlung der allgemeinen eindeutigen Transformationen**) noch eingehend gezeigt werden wird, dadurch entstanden zu denken, dass

*) Dieser Satz, und somit auch die folgenden Zahlen, sind für die Cayley'sche Curve bei $n=3$ nicht gültig; denn hier fällt die Steiner'sche Curve mit der Hesse'schen zusammen, und einer Tangente der Cayley'schen Curve entsprechen dann zwei Punkte der Hesse'schen.

**) Die dort gegebenen Formeln lassen auch leicht erkennen, wie sich vorstehende Tabelle modificirt, wenn die Grundcurve Doppel- und Rückkehr-Punkte besitzt.

zwei getrennt liegenden Punkten x der Hesse'schen Curve ein und derselbe Punkt y der Steiner'schen Curve entspricht, der dann eben ein Doppelpunkt der letzteren wird; und umgekehrt entsprechen einem solchen Doppelpunkte zwei getrennt liegende Punkte der Hesse'schen Curve. *Es gibt daher* $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ *erste Polaren mit zwei Doppelpunkten, und die zugehörigen Pole sind die Doppelpunkte der Steiner'schen Curve.* Die beiden Tangenten in den letzteren sind nach Früherem die linearen Polaren der beiden zugehörigen Punkte der Hesse'schen Curve.

Hat dagegen die erste Polare von y in x eine Spitze, was ebenfalls die Erfüllung von zwei Bedingungen erfordert und also für eine bestimmte Zahl von Punkten möglich ist, so haben wir, wenn α_1, α_2, α_3 die Coordinaten der Rückkehrtangente sind, die sechs Gleichungen:

$$f_{1ik}y_1 + f_{2ik}y_2 + f_{3ik}y_3 = \alpha_i\alpha_k,$$

oder nach der oben eingeführten Bezeichnung:

$$\varphi_{ik} = (n-2)\,.\,\alpha_i\alpha_k, \tag{17}$$

wo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Wir werden nun zeigen, dass in diesem Falle die Steiner'sche Curve im zugehörigen Pole y ebenfalls eine Spitze hat, d. h. (vgl. p. 344) dass drei successive Tangenten derselben durch den Punkt y gehen. Aus den Gleichungen nämlich:

$$\mu u_i = f_i$$

$$d\mu u_i + \mu du_i = (n-1)\,\Sigma f_{ik}dx_k$$

finden wir weiter:

$$d^2\mu u_i + 2\,d\mu\,du_i + \mu d^2 u_i = (n-1)(n-2)\,\Sigma\Sigma f_{ikh}dx_k dx_h \\ + (n-1)\,\Sigma f_{ik}d^2x_k,$$

und wenn wir die letzten drei Gleichungen bez. mit y_1, y_2, y_3 multipliciren und addiren, so erhalten wir, da immer (vgl. (4))

$$\Sigma u_i y_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma du_i y_i = 0, \tag{18}$$

unter Berücksichtigung von (1):

$$\mu\,.\,\Sigma d^2 u_i y_i = (n-1)(n-2)\,\Sigma\Sigma\Sigma f_{ikh} y_i dx_k dx_h \\ = (n-1)\,\Sigma\Sigma\,\varphi_{kh}\,dx_k\,dx_h.$$

Im Falle einer Spitze ist daher wegen (17):

$$\mu\,\Sigma d^2 u_i y_i = (n-1)(n-2)(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3)^2; \tag{19}$$

und dieser Ausdruck verschwindet. Multipliciren wir nämlich die drei Gleichungen (10) bez. mit y_1, y_2, y_3 und addiren, so erhalten wir:

$$\varrho v_x \, . \, \Sigma\Sigma d f_{ik} y_i y_k = \Sigma f_i y_i d\mu - \varrho v_y \Sigma\Sigma f_{ik} d x_k y_i \, ,$$

wo y, $y + dy$ zwei Punkte der Steiner'schen, x und $x + dx$ die entsprechenden Punkte der Hesse'schen Curve sind, deren bez. Verbindungslinien sich auf der Linie v schneiden. Hier verschwinden aber die rechts stehenden Ausdrücke wegen (18), und es folgt, da v_y im Allgemeinen nicht Null ist:

(20) $$\Sigma\Sigma d f_{ik} y_i y_k = a_y^2 a_y^{n-3} a_{dx} = 0 \, ,$$

wo $a_{dx} = a_1 d x_1 + a_2 d x_2 + a_3 d x_3$. Diese Gleichung gibt zunächst den Satz:

Hat die erste Polare von y in x einen Doppelpunkt, so berührt die Tangente der zweiten Polare von y in x die Hesse'*sche Curve;* oder nach einem früheren Satze aus der Polarentheorie: *Die Tangente der* Hesse'*schen Curve in einem Punkte x ist die vierte harmonische Gerade zu der Verbindungslinie von x mit dem zugehörigen Pole y und zu den Tangenten der ersten Polare von y im Doppelpunkte x.*

Im Falle der Spitze ist nun aber wegen (17):

$$y_1 d f_{i1} + y_2 d f_{i2} + y_3 d f_{i3} = \alpha_i \alpha_{dx} \, ,$$

und daher:

$$\Sigma\Sigma d f_{ik} y_i y_k = \alpha_y \alpha_{dx} \, ,$$

also wegen (20) $\alpha_{dx} = 0$ oder $\alpha_y = 0$. Letzteres kann aber nicht eintreten; denn nach (17) ist

$$\alpha_y \alpha_z = a_y^2 a_x^{n-3} a_z \, ,$$

und dieser Ausdruck würde dann auch Null, und zwar unabhängig von den z, d. h. es müsste die zweite Polare von y in x einen Doppelpunkt haben, während sie doch als erste Polare von y in Bezug auf $a_y a_x^{n-1} = 0$ nur einfach durch den Rückkehrpunkt dieser Curve (in ihm die Rückkehrtangente berührend) hindurchgehen darf (vgl. p. 322). Es bestehen somit für den Pol y nach (19) in der That gleichzeitig die drei Gleichungen:

$$\Sigma u_i y_i = 0, \quad \Sigma d u_i y_i = 0, \quad \Sigma d^2 u_i y_i = 0 \, .$$

Die Gleichung $\alpha_{dx} = 0$ sagt zugleich aus, dass auch der Punkt $x + dx$ gleichzeitig auf der Hesse'schen Curve und auf der Rückkehrtangente α liegt, wir haben also mit Rücksicht auf die Zahlen der Tabelle den Satz:

Es gibt $12\,(n-2)\,(n-3)$ *erste Polaren, welche einen Rückkehrpunkt haben; die zugehörigen Pole sind die Spitzen der* Steiner'*schen Curve**), *und die Rückkehrtangenten der Polaren berühren die* Hesse'*sche Curve im zugehörigen Rückkehrpunkte.* Das Letztere folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Bemerkung.

---

*) Dieser Satz wurde von Clebsch für Curven 4. Ordnung (Borchardt's Journal, Bd. 59) und von Cremona (a. a. O.) allgemein bewiesen.

Wir erwähnen ferner noch die folgenden von Steiner angegebenen Beziehungen zwischen den hier betrachteten Curven:

Wie die Hesse'*sche Curve durch die Wendepunkte der Grundcurve geht, so berührt die* Steiner'*sche Curve sämmtliche Wendetangenten derselben.*

Dies folgt unmittelbar daraus, dass die letztere Curve überhaupt von den linearen Polaren der ersteren umhüllt wird, denn für die Wendepunkte sind dies eben die Wendetangenten.

Ferner: *Zwei Pole, deren Polaren einander berühren, liegen immer auf einer Tangente der* Steiner'*schen Curve; und zwar berühren sich die Polaren aller auf einer solchen Tangente gelegenen Pole in einem Punkte, dem Doppelpunkte x, welchen die Polare des Berührungspunktes y der Tangente enthält; die gemeinsame Tangente aller Polaren ist aber die Verbindungslinie von x und y, also Tangente der* Cayley'*schen Curve.*

Sollen nämlich z, t zwei Punkte sein, deren Polaren

$$\Sigma f_i z_i = 0, \quad \Sigma f_i t_i = 0$$

sich in x berühren, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$z_1 f_{1k} + z_2 f_{2k} + z_3 f_{3k} = \mu\,(t_1 f_{1k} + t_2 f_{2k} + t_3 f_{3k})_i\,. \tag{21}$$

Setzt man also

$$y_i = z_i - \mu t_i,$$

so hat man die Gleichungen (1) vor sich; die Verbingungslinie von z und t enthält aber den Punkt y der Steiner'schen Curve und ist Tangente in diesem Punkte, da die Gleichung der Tangente in y (vgl. (6)):

$$f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 = 0$$

für $X = z$ und $X = t$ erfüllt ist. Endlich ist die Gleichung der gemeinsamen Tangente der Polaren im Berührungspunkte x:

$$X_1 \Sigma f_{1k} z_k + X_2 \Sigma f_{2k} z_k + X_3 \Sigma f_{3k} z_k = 0\,.$$

Da diese Gleichung für $X = x$ und $X = y$ erfüllt ist, so stellt sie die Verbindungslinie des Poles mit dem zugehörigen Doppelpunkte der Polare dar. —

In ähnlicher Weise, wie wir hier durch die Forderung, dass die ersten Polaren gewisse Singularitäten haben, auf covariante Curven geführt werden, kann man auch von Polaren beliebiger Ordnung ausgehen und covariante Gebilde erzeugen, die dann ebenso wie die hier behandelten Curven gewisse Singularitäten zeigen werden; doch sind die so entstehenden Curven noch nicht eingehender untersucht. — Wir wollen schliesslich nicht unerwähnt lassen, dass die von uns auf analytischem Wege gefundenen Resultate sich auch mit Hülfe des

Chasles'schen Correspondenzprincips (p. 204) ableiten lassen, ein Princip, für dessen Anwendbarkeit wir sogleich noch mehrere Beispiele kennen lernen werden; aber durch die algebraische Untersuchung sind wir gleichzeitig in das Wesen derartiger Beziehungen zwischen Curven tiefer eingedrungen.

V. Ueber Systeme von Curven.

Nachdem wir gewisse allgemeine, an eine einzelne algebraische Curve sich anknüpfende Betrachtungen, soweit es die bisherige Ausbildung der Theorie erlaubt, näher verfolgt haben, entsteht zunächst die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zweier Curven, die im Allgemeinen von verschiedener Ordnung sein mögen, d. h. nach den *simultanen* Functionalinvarianten von zwei ternären algebraischen Formen. Es lassen sich hier jedoch bisher nur wenige Fragen allgemein erörtern.

Eine simultane Invariante zweier Curven der m^{ten} und n^{ten} Ordnung ist jedenfalls durch die schon früher erwähnte (p. 366) *Tactinvariante* gegeben, deren Verschwinden aussagt, dass sich die beiden Curven berühren: sie ist vom Grade $n(2m+n-3)$ in den Coëfficienten der Curve m^{ter} und vom Grade $m(2n+m-3)$ in denen der Curve n^{ter} Ordnung; auch haben wir diese Invariante für zwei Kegelschnitte wirklich aufgestellt (p. 298).

Zu simultanen Covarianten wird man z. B. durch die Forderung geführt, dass die Polaren einer gewissen Ordnung der einen Curve zu der andern Curve in einer bestimmten Invariantenrelation stehen, also etwa wieder in der Relation der Berührung. Nimmt man z. B. eine Curve n^{ter} und eine 1ter Ordnung:

$$a_x^n = 0 \quad \text{und} \quad u_x = 0,$$

so gibt die Forderung, dass die konischen (d. i. $(n-2)^{\text{ten}}$) Polaren eines Punktes die Linie u berühren, die schon früher erwähnte (p. 317) Curve von der Ordnung $2(n-2)$:

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Ebenso erhält man, wenn die cubischen Polaren die Linie u berühren sollen, die Gleichung $4(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (vgl. p. 278):

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-3} = 0.$$

Ist ferner eine Curve n^{ter} Ordnung und ein Kegelschnitt gegeben:

$$a_x^n = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_x^2 = 0,$$

so kann man die Bedingung stellen, dass für die beiden Kegelschnitte

$$a_y^{n-2} a_x^2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_x^2 = 0$$

eine der beiden simultanen Invarianten (A_{112} oder A_{122} nach unserer früheren Bezeichnung) verschwinde; man erhält dann bez. die beiden Curven:

$$(a\alpha\beta)^2 a_y^{n-2} = 0$$

und

$$(ab\alpha)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = 0;$$

und daraus folgen wegen der geometrischen Bedeutung der Gleichungen $A_{112} = 0$, $A_{122} = 0$ (vgl. p. 295) die beiden Sätze:

Der Ort eines Punktes, dessen konische Polare unendlich viele Polardreiecke besitzt, die einem gegebenen Kegelschnitte eingeschrieben sind, ist eine Curve der Ordnung $(n-2)$; und:

Der Ort eines Punktes, dessen konische Polare in ein einem gegebenen Kegelschnitte zugehöriges Polardreieck (und somit in unendlich viele) eingeschrieben ist, ist eine Curve der Ordnung $2(n-2)$.

Wenn man nun weiter den in solcher Weise entstandenen covarianten Curven bestimmte Invarianteneigenschaften auferlegt, wird man wieder zu simultanen Invarianten der beiden gegebenen Curven geführt. So ist z. B. für $n = 4$ die eben aufgestellte Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ein Kegelschnitt:

$$(a\alpha\beta)^2 a_x^2 = 0,$$

und jenachdem, dass derselbe zerfallen, oder zu dem gegebenen Kegelschnitte in den angeführten Invariantenrelationen stehen soll, erhält man bez. die folgenden invarianten Bedingungen:

$$A = (a\alpha\beta)^2 (b\gamma\delta)^3 (c\varepsilon\zeta)^2 (abc)^2 = 0$$
$$B = (a\alpha\beta)^2 (a\gamma\delta)^2 = 0,$$
$$C = (a\alpha\beta)^2 (b\gamma\delta)^2 (ab\varepsilon)^2 = 0,$$

wo die Symbole β, γ, δ, ε, ζ sämmtlich mit α gleichbedeutend sind. Diese sehr willkürlich gewählten Beispiele werden hinreichen, um eine Vorstellung von der Mannigfaltigkeit der auftretenden Bildungen zu geben.

Sind die beiden betrachteten Curven ($f = 0$, $\varphi = 0$) von gleicher Ordnung, welche dann durch n bezeichnet sei, so gibt es unendlich viele Curven n^{ter} Ordnung, welche durch ihre n^2 Schnittpunkte*) hindurchgehen und den „*Büschel*"

$$f + \lambda\varphi = 0$$

bilden; und zwar geht durch jeden Punkt der Ebene noch eine Curve

*) Es steht dies nicht im Widerspruche damit, dass eine Curve n^{ter} Ordnung schon durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte bestimmt ist, indem die n^2 Punkte nicht von einander unabhängig sind; vgl. den Abschnitt VII dieser Abtheilung.

des Büschels. Wie in einem Kegelschnittbüschel im Allgemeinen drei Linienpaare, d. h. drei Curven mit Doppelpunkt vorkommen, so werden sich unter den Curven des Büschels $f + \lambda\varphi = 0$ eine bestimmte Anzahl mit Doppelpunkten befinden; denn diese Forderung gibt eine Bedingung für die Coëfficienten der Curve $f + \lambda\varphi$, also eine Gleichung für λ: das Verschwinden der Discriminante. Letztere ist aber für eine Curve n^{ter} Ordnung vom Grade $3(n-1)^2$ in den Coëfficienten, und also in unserm Falle in λ: *Es gibt daher in einem Büschel von Curven n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $3(n-1)^2$ Curven mit Doppelpunkt.* Diese Zahl kann jedoch dadurch verringert werden, dass die Curven f und φ sich berühren, dass in dem Büschel eine Curve mit Rückkehrpunkt vorkommt, dass alle Curven einen gemeinsamen Doppelpunkt haben und durch ähnliche Vorkommnisse.*) In solchen Fällen bezeichnet $3(n-1)^2$ die Zahl der eigentlichen Lösungen zusammen mit den uneigentlichen, wenn von letzteren jede in richtiger Vielfachheit gezählt wird.

In derselben Weise kann man überhaupt verlangen, dass für eine Curve des Büschels eine bestimmte Invariante verschwinde; *es wird dann immer μ Curven des Büschels der Art geben, wenn die Invariante vom μ^{ten} Grade in den Coëfficienten der Curve n^{ter} Ordnung ist.* Man kann weiter auch den Büschel zu einer beliebig gegebenen Curve m^{ter} Ordnung in Beziehung setzen; es wird dann eine bestimmte Zahl von Curven geben, für welche eine simultane Invariante mit der Curve m^{ter} Ordnung verschwindet. Wegen der oben für den Grad der Tactinvariante angegebenen Zahlen *gibt es z. B. in einem Büschel n^{ter} Ordnung $m(2n + m - 3)$ Curven, welche eine gegebene Curve m^{ter} Ordnung berühren.* Hat letztere Curve jedoch Doppelpunkte, so sind unter diesen $m(2n + m - 3)$ berührenden Curven des Büschels auch diejenigen mit enthalten, welche durch diese Doppelpunkte hindurchgehen; denn dann liegen im Doppelpunkte ebenfalls zwei Schnittpunkte vereinigt. Jede solche Curve absorbirt aber *zwei* eigentlich berührende Curven des Büschels. Man erkennt dies geometrisch genau ebenso, wie bei den Plücker'schen Formeln den Satz, dass jeder Doppelpunkt einer Curve die Klasse derselben um zwei Einheiten erniedrigt; d. h. indem man die feste Curve m^{ter} Ordnung erst allmählich in eine Curve mit Doppelpunkt degeneriren lässt, und dann beachtet, dass an den beiden kurz zuvor entstehenden Wölbungen jedenfalls zwei Berührungspunkte liegen, welche nachher in den Doppelpunkt zusammenfallen (vgl. Fig. 52 auf p. 343). Lässt man schliesslich die Schleife eines Doppelpunktes sich immer mehr zusammenziehen, so wird in der Grenze, ebenso wie bei der Bestimmung der Klasse (p. 323), noch

*) Vgl. hierüber Cremona's Einleitung in die Theorie ebener Curven.

ein weiterer Berührungspunkt mit dem entstehenden Rückkehrpunkte sich vereinigen. *Die Zahl der Curven n^{ter} Ordnung eines Büschels, welche eine Curve m^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten „eigentlich" berühren, ist daher*

$$= m(2n + m - 3) - 2d - 3r,$$

oder wenn wir das Geschlecht $p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - d - r$ einführen (p. 351):

$$= 2(mn + p - 1) - r;$$

eine Zahl, welche wir später auf anderem Wege durch allgemeinere Betrachtungen ableiten werden.*)

An die Betrachtung der Curvenbüschel knüpft sich eine einfache geometrische Erzeugungsweise einer algebraischen Curve mittelst Curven niedrigerer Ordnung, die als Verallgemeinerung der Erzeugungsweise eines Kegelschnittes aus zwei projectivischen Strahlbüscheln angesehen werden kann. Statt der letzteren nehmen wir nämlich zwei beliebige Curvenbüschel, bez. von der Ordnung m und n:

$$(1) \qquad F + \lambda\Phi = 0 \quad \text{und} \quad f + \mu\varphi = 0$$

und beziehen dieselben so auf einander, dass jeder Curve des einen Büschels *eine* des andern entspricht, und umgekehrt, dass also zwischen ihren Parametern λ, μ eine lineare Gleichung:

$$(2) \qquad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

besteht; der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Curven der beiden „projectivisch auf einander bezogenen" Büschel ist dann eine Curve der $(m+n)^{ten}$ Ordnung, deren Gleichung sich durch Elimination von λ, μ aus den drei Gleichungen (1) und (2) ergibt. Nimmt man die projectivische Beziehung — was immer erlaubt ist — insbesondere in der einfachen Form an, dass sich je zwei Curven mit demselben Parameter λ in den Büscheln (1) entsprechen, so ist die resultirende Curve gegeben durch:

$$F\varphi - \Phi f = 0,$$

also in der That von der Ordnung $m + n$; und man erkennt, dass diese Curve durch sämmtliche Basispunkte der beiden Büschel hindurchgeht. Die projectivische Beziehung der Büschel auf einander kann man sich geometrisch in folgender Weise vermittelt denken. Setzen wir

$$F = a_x^m, \quad \Phi = a_x'^m,$$
$$f = \alpha_x^n, \quad \varphi = \alpha_x'^n,$$

*) Vgl. den unten folgenden Abschnitt VIII über das erweiterte Correspondenzprincip.

und sei y ein Basispunkt des ersteren, z ein solcher des andern Büschels, so bilden die Tangenten aller Curven der beiden Büschel in diesen Grundpunkten zwei Strahlbüschel, gegeben durch:

$$a_y^{m-1} a_x + \lambda a'^{m-1}_y a'_x = 0,$$
$$\alpha_z^{n-1} \alpha_x + \lambda \alpha'^{n-1}_z \alpha'_x = 0,$$

Diese Strahlbüschel sind dann auch einander projectivisch; und man kann nun umgekehrt die verlangte Zuordnung der Curvenbüschel herstellen, indem man zwei solche Tangentenbüschel projectivisch auf einander bezieht, denn jeder Tangente entspricht nur eine Curve des betreffenden Büschels.

Es liegt hier zunächst die Frage nahe, ob die so erzeugte Curve die allgemeinste ihrer Art ist, und ob jede algebraische Curve in der Weise erzeugt werden kann. Wir werden später in der Lage sein, diese Frage in der That bejahend zu beantworten, indem wir zeigen, dass man auf jeder Curve zwei Systeme von Punkten bestimmen kann, die als Grundpunkte zweier projectivischen Curvenbüschel zur Erzeugung der gegebenen Curve benutzt werden können. Dies vorausgesetzt, haben wir den Satz:

*Jede algebraische Curve n^{ter} Ordnung kann durch die Schnittpunkte entsprechender Curven zweier projectivischen Büschel der m^{ten} und $(n-m)^{ten}$ Ordnung erzeugt werden, deren Basispunkte auf der Curve n^{ter} Ordnung liegen**); und zwar wird diese Curve die allgemeinste ihrer Art sein, wenn zwischen den beiden erzeugenden Curvenbüscheln keine Relationen bestehen. Fällt dagegen z. B. ein Grundpunkt des einen Büschels mit einem des andern zusammen, so wird die erzeugte Curve in ihm einen Doppelpunkt haben; und zwar ist sofort ersichtlich, dass die Tangenten im Doppelpunkte eben die beiden Doppelstrahlen der in ihm vereinigt liegenden projectivischen Tangentenbüschel sind. So entsteht eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt aus einem Kegelschnittbüschel und einem ihm projectivischen Strahlbüschel, dessen Scheitel in einem der vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels liegt, und eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten aus zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln, mit drei gemeinsamen Basispunkten. —

Wir gehen zur gleichzeitigen Betrachtung *dreier Curven* über. Von den simultanen Functionalinvarianten, zu denen dieselben Ver-

---

*) Der Satz wurde für Curven 3. Ordnung gegeben von Chasles: Comptes rendus, t. XLI, 1853; allgemein von Jonquières: Essai sur la génération des courbes géométriques, Mémoires presentées par divers savants à l'académie des sciences, t. XVI, 1858. Es sind in diesem Aufsatze besonders viele sich an den Satz knüpfende Constructionsaufgaben behandelt. — Für Curven 3. Ordnung vgl. die folgende Abtheilung dieser Vorlesungen.

anlassung geben, ist bisher besonders eine untersucht, welche wir hier allein berücksichtigen: die Jakobi'sche Curve der drei vorliegenden Curven. Sind letztere gegeben durch die Gleichungen:

$$\varphi = a_x^m = 0\,,\quad \psi = a_x'^{m'} = 0\,,\quad \chi = a_x''^{m''} = 0\,,$$

so ist sie dargestellt durch das Verschwinden der Functionaldeterminante, d. h. durch:

$$\frac{1}{m\,m'\,m''}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x_1} & \frac{\partial\chi}{\partial x_2} & \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \end{vmatrix} (a\,a'\,a'')\, a_x^{m-1} a_x'^{m'-1} a_x''^{m''-1} = 0\,.$$

Die Jakobi'*sche Curve ist also von der Ordnung* $m + m' + m'' - 3$ *und ist, wie man sofort übersieht, der Ort der Punkte, deren lineare Polaren in Bezug auf die drei gegebenen Curven sich in einem Punkte schneiden.**)

Für diese Curve gilt insbesondere der Satz, *dass sie durch einen gemeinsamen Punkt der drei Curven ebenfalls hindurchgeht.* Multiplicirt man nämlich die ersten beiden Verticalreihen der Functionaldeterminante bez. mit x_1, x_2 und addirt sie zu der mit x_3 multiplicirten dritten Verticalreihe, so treten in letzterer die Terme $m\varphi$, $m'\psi$, $m''\chi$ auf; und die Determinante verschwindet also gleichzeitig mit ihnen. In diesem Falle tritt ferner noch eine Besonderheit ein — und dieselbe ist für spätere Anwendungen wichtig — wenn zwei der vorliegenden Curven von gleicher Ordnung sind; alsdann gilt der Satz:

Die Jacobi'*sche Curve dreier Curven* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ *berührt in einem gemeinsamen Punkte derselben die Curve* $\chi = 0$, *sobald* φ, ψ *von gleicher Ordnung sind, und hat, wenn* χ *einen solchen gemeinsamen Punkt zum Doppelpunkte hat, diesen ebenfalls zum Doppelpunkte, und zwar der Art, dass ihre Tangenten in ihm mit denen von* $\chi = 0$ *übereinstimmen.***)

Zum Beweise vergleichen wir die Differentialquotienten von χ nach den Coordinaten des betrachteten Punktes mit denen der Functionaldeterminante ($m = m'$, $m'' + 2m' - 3 = \mu$):

$$\Delta_x^\mu = (a\,a'\,a'')\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1} a_x''^{m''-1}\,.$$

---

*) Es sei bemerkt, dass wie bei den Kegelschnitten der Satz gilt: *Wenn die Functionaldeterminante dreier Formen gleicher Ordnung identisch verschwindet, so gehören die entsprechenden drei Curven demselben Büschel an.* Der Beweis ist ebenso wie bei den quadratischen Formen zu führen; man hat nur auf p. 304 die betreffenden Gleichungen alle mit den symbolischen Factoren $a_x^{m-2} a_x'^{m-2} a_x''^{m-2}$ zu multipliciren.

**) Vgl. Hesse, Crelle's Journal, Bd. 41, p. 286 und Clebsch: Curven, deren Coordinaten ellipt. Funct. eines Parameters sind, ib. Bd. 64.

Nun ist

$$\mu \Delta_x^{\mu-1} \Delta_z = (a a' a'')\, a_x^{m'-2} a_x'^{m'-2} a_x''^{m''-2} \{(m''-1)\, a_x a_x' a_z'' + (m'-1)\, a_x'' a_x a_z' + (m'-1)\, a_x' a_x'' a_z\},$$

oder, wenn wir mit u_x multipliciren, wo die u_i vollkommen willkürlich sind (nur $u_x >$ oder < 0), und die Identität

$$(3) \qquad (a a' a'')\, u_x = (a a' u)\, a_x'' - (a a'' u)\, a_x' + (a' a'' u)\, a_x$$

benutzen, indem die in φ, ψ, χ multiplicirten Terme ausfallen:

$$(4) \quad \mu \Delta_x^{\mu-1} \Delta_z \,.\, u_x = (m''-1)\, a_x''^{m''-1} a_z'' \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1} + (m'-1)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1} a_x''^{m''-1} \{(a'' a u)\, a_z' + (a' a'' u)\, a_z\}.$$

Hier reducirt sich aber der letzte Term wegen $\Delta = 0$ auf den ersten, denn es ist identisch:

$$(5) \qquad (a'' a u)\, a_z' + (a' a'' u)\, a_z = (a a' a'')\, u_z - (a a' u)\, a_z'';$$

und also wird:

$$\mu \Delta_x^{\mu-1} \Delta_z \,.\, u_x = (m''-m')\, a_x''^{m''-1} a_z'' \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1},$$

d. h., da der Factor $(a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1}$ wegen der Willkürlichkeit der u immer als von Null verschieden angenommen werden darf: die Tangente von Δ in x fällt mit der von χ zusammen, w. z. b. w.

Ist aber x ein Doppelpunkt von $\chi = 0$, so verschwindet die rechte Seite unabhängig von z, also auch die linke, d. h. $\Delta = 0$ hat in x gleichfalls einen Doppelpunkt. Die Tangenten desselben werden wegen des Verschwindens von $a_x''^{m''-1} a_z''$ durch Nullsetzen des folgenden Ausdrucks gegeben, wo C ein Zahlenfactor ist:

$$\mu(\mu-1)\, \Delta_x^{\mu-2} \Delta_z^2 . u_x = C a_x''^{m''-2} a_z''^2 \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-1} a_x'^{m'-1},$$

d. h. die Tangenten des Doppelpunktes von Δ fallen mit denen des Doppelpunktes von χ zusammen.

Der somit bewiesene Satz lässt sich für den Fall verallgemeinern, dass der gemeinsame Punkt x für die Curven φ und ψ ein $(r-1)$-facher, für χ dagegen ein r-facher ist; wobei wir zunächst voraussetzen, dass die Tangenten der verschiedenen Curven in x von einander getrennt verlaufen. In dem Falle verschwinden die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ im Punkte x $(r-2)$-fach, $\frac{\partial \chi}{\partial x_i}$ aber $(r-1)$-fach. Die aus ihnen zusammengesetzte Determinante Δ wird daher Null von der Ordnung

$$2(r-2) + r - 1 = 3r - 5.$$

Die Curve $\Delta = 0$ hat also mindestens einen $(3r-5)$-fachen Punkt in x. Zur weiteren Untersuchung des letzteren bemerken wir, dass

die $(\mu - s)^{\text{te}}$ Polare von x in Bezug auf $\Delta = 0$ durch das Verschwinden des folgenden Ausdrucks gegeben ist:

$$(6) \qquad \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - s + 1) \,.\, \Delta_x^{\mu - s} \Delta_z^s$$

$$= (a a' a'') \sum_{i=0}^{i=s} \sum_{k=0}^{k=s} \sum_{l=0}^{l=s}{}_{i+k+l=s} m_i' m_k' m_l'' a_x^{m' - i - 1} a_x'^{m' - k - 1} a_x''^{m' - l - 1} a_z^i a_z'^k a_z''^l,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$m_i' = (m' - 1)(m' - 2) \ldots (m' - i)$$

und m_l'' entsprechend definirt sein soll. Wenn nun zufolge unserer obigen Annahmen unabhängig von den z die Gleichungen bestehen:

$$(7) \quad a_x^{m' - r + 2} a_z^{r - 2} = 0, \quad a_x'^{m' - r + 2} a_z'^{r - 2} = 0, \quad a_x''^{m'' - r + 1} a_z''^{r - 1} = 0,$$

so fallen in obiger dreifachen Summe alle Glieder fort, welche einen der symbolischen Factoren $a_x^{m' - r + 2}$, $a_x'^{m' - r + 2}$, $a_x''^{m'' - r + 1}$ oder, was dasselbe ist, einen der Factoren $a_z^{r - 3}$, $a_z'^{r - 3}$, $a_z''^{r - 2}$ enthalten; es bleiben also nur Glieder, die in Factoren

$$a_z^{r - 2}, \quad a_z'^{r - 2}, \quad a_z''^{r - 1}$$

oder in höhere Potenzen von a_z, a_z', a_z'' multiplicirt sind. Für $s = 3r - 5$ ist aber wegen der Relation $i + k + l = s$ die höchste Potenz von a_z'', welche vorkommen kann, eben die $(r - 1)^{\text{te}}$, indem:

$$r - 1 = 3r - 5 - 2(r - 2).$$

Unsere Summe reducirt sich also abgesehen von einem Zahlenfactor auf das eine Glied

$$(a a' a'') \,.\, a_x^{m' - r + 1} a_x'^{m' - r + 1} a_x''^{m'' - r} a_z^{r - 2} a_z'^{r - 2} a_z''^{r - 1}.$$

Multipliciren wir dieses mit u_x und wenden wieder die Identität (3) an, so wird es eine lineare Combination der verschwindenden Ausdrücke (7), also ebenfalls Null: *$\Delta = 0$ hat in x einen $(3r - 4)$-fachen Punkt.*

Wir untersuchen weiter die Tangenten von Δ in diesem Punkte; d. h. wir bilden die Summe (6) für $s = 3r - 4$. Es fallen in ihr wieder alle in $a_z^{r - 3}$, $a_z'^{r - 3}$, $a_z''^{r - 2}$ multiplicirten Glieder fort, und wegen $i + k + l = 3r - 4$ ist die höchste Potenz, zu welcher a_z'' vorkommen darf, gleich

$$3r - 4 - 2(r - 2) = r,$$

während die niedrigste gleich $r - 1$ ist. Sonach bleiben in jener Summe ein Glied

$$(8) \qquad (a a' a'') a_x^{m' - r + 1} a_x'^{m' - r + 1} a_x''^{m'' - r - 1} a_z^{r - 2} a_z'^{r - 2} a_z''^r$$

und zwei Glieder, deren Summe die symbolischen Factoren enthält:

(9) $$(a a' a'')\, a_z''^{\,r-1} a_z^{r-2} a_z'^{\,r-2} (a_z a_x' + a_x a_z').$$

Multipliciren wir diese Factoren mit u_x und wenden wieder die Identität (3) an, so werden sie gleich

$$a_x a_x' \left\{(a' a'' u)\, a_z - (a a'' u)\, a_z'\right\} a_z''^{\,r-1} a_z^{r-2} a_z'^{\,r-2},$$

und dies ist nach der Identität (5) gleich

$$a_x a_x' \left\{(a a' a'') \,.\, u_z - (a a' u)\, a_z''\right\} a_z''^{\,r-1} a_z^{r-2} a_z'^{\,r-2}.$$

Hier ist aber der erste Term das Glied, welches in der Entwicklung von $\Delta_x^{\mu-3r+5}\Delta_z^{3r-5}$ vorkommt, und daher Null; während der zweite Term den Factor $a_z''^{\,r}$ hat, wie das erste oben erwähnte Glied (8). Die Symbole a'' kommen aber in dem Klammerfactor $(a a' u)$ desselben nicht mehr vor, es enthält also auch den Factor $a_x''^{\,m''-r}$. Letzteren Factor können wir auch in dem Gliede (8) erkennen, wenn wir ebenfalls mit u_x multipliciren und die Identität (3) anwenden. Es bleibt dann wegen (7) gerade dasselbe Glied, auf welches wir die Summe (9) soeben reducirten; und demnach wird, wenn C einen Zahlenfactor bedeutet:

$$\Delta_x^{\mu-3r+4}\Delta_z^{3r-4} = C \,.\, a_x''^{\,m''-r} a_z''^{\,r} \,.\, (a a' u)\, a_x^{m'-r+1} a_x'^{\,m'-r+1} a_z^{r-2} a_z'^{\,r-2}.$$

Der Ausdruck links enthält also den Factor $a_x''^{\,m''-r} a_z''^{\,r}$, welcher das Product der r Tangenten von $\chi = 0$ in x bestimmt. Dies gibt den Satz:

Wenn zwei Curven gleicher Ordnung in einem gemeinsamen Punkte je einen $(r-1)$-fachen Punkt haben, und in demselben eine dritte Curve einen r-fachen Punkt besitzt (alle mit getrennten Tangenten), so hat die Jakobi'*sche Curve daselbst einen $(3r-4)$-fachen Punkt, von dessen Tangenten r mit den Tangenten jener dritten Curve in ihm zusammenfallen.*

Dieser Satz wird nicht modificirt, wenn von den Tangenten der Curve χ in x mehrere gruppenweise zusammenfallen. Haben dagegen etwa die Curven φ und ψ in x die $(r-1)$ Tangenten ihres vielfachen Punktes gemeinsam, so wird

$$a_x^{m'-r+1} a_z^{r-1} \text{ zu } a_x'^{\,m'-r+1} a_z'^{\,r-1}$$

proportional; und man erkennt, dass Δ einen $3(r-1)$-fachen Punkt erhält. Noch weitere Besonderheiten treten ein, wenn einzelne dieser gemeinsamen Tangenten von φ und ψ oder alle zugleich Tangenten des vielfachen Punktes von χ sind. —

Sind endlich alle drei Curven von gleicher Ordnung $(m = m' = m'')$, so kann man eine jede von ihnen durch irgend eine Curve des Systems

(10) $$\varkappa\varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0$$

ersetzen, ohne die Jakobi'sche Curve zu ändern. Man nennt letztere in diesem Falle auch die Hesse'sche Curve des Systems und dieses selbst ein *Curvennetz. Die* Jakobi'*sche Curve ist also eine Combinante desselben* (vgl. p. 303). Ein Netz ist analytisch dadurch charakterisirt, dass eine seiner Curven von zwei Parametern linear abhängt, also geometrisch dadurch, dass alle Curven desselben, welche durch einen bestimmten Punkt gehen, einen Büschel bilden; denn setzt man die Coordinaten dieses Punktes in (4) ein, so kann man einen der Parameter $\frac{\varkappa}{\mu}$, $\frac{\lambda}{\mu}$ durch den andern linear ausdrücken. Das einfachste Beispiel eines Netzes bilden somit alle Curven n^{ter} Ordnung, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ feste Punkte gehen. Ein anderes Beispiel liefert uns die Gesammtheit der zu einer gegebenen Curve ($a_x^n = 0$) gehörenden ersten Polaren:

$$a_x^{n-1} a_y = 0,$$

wo dann $\frac{y_1}{y_3}$ und $\frac{y_2}{y_3}$ als die beiden linear vorkommenden Parameter aufzufassen sind. Für dieses Netz fällt die Hesse'sche Curve mit der Hesse'schen Curve der Grundcurve zusammen, denn wir können erstere überhaupt auch durch folgenden Satz definiren:

Es gibt in einem Curvennetze unendlich viele Curven mit einem Doppelpunkte; der Ort der letzteren ist die Hesse'*sche oder* Jakobi'*sche Curve des Netzes.* Die Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus den drei Gleichungen, welche die Bedingungen für einen Doppelpunkt darstellen:

$$\varkappa a_x^{m-1} a_i + \lambda a_x'^{m-1} a_i' + \mu a_x''^{m-1} a_i'' = 0,$$

führt nämlich in der That auf die Functionaldeterminante von φ, ψ, χ.

Wir können für diese Curve endlich noch eine dritte Definition geben. Es wird unendlich oft vorkommen, dass sich zwei und somit unendlich viele Curven des Netzes in einem Punkte berühren; denn dies erfordert die Erfüllung *einer* Bedingung für die beiden willkürlichen Parameter. Seien nun $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei solche sich berührende Curven des Netzes, so geht, wie wir früher zeigten (vgl. p. 366), jede Curve

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo die v beliebige Werthe haben können, durch ihren Berührungspunkt. Dies ist aber, wenn wir

$$v_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$$

setzen, die Gleichung der Hesse'schen Curve unseres Netzes; und sonach folgt:

Die Hesse'*sche Curve eines Netzes ist der Ort der Punkte, in denen sich zwei Curven des Netzes berühren können.*

Für diese Curve gelten nun in Bezug auf ihr Verhalten gegen ausgezeichnete Punkte des Netzes ganz ähnliche Sätze, wie bei dem Netze der ersten Polaren für die singulären Punkte der Grundcurve. Wir erwähnen nur den folgenden: *In einem gemeinsamen Punkte aller Curven des Netzes hat die* Hesse'*sche Curve einen Doppelpunkt.**) Für $m' = m'' = m$ geht nämlich die Gleichung (4) über in

$$\mu \Delta_x^{\mu-1}\Delta_z . u_x = (m-1)\left\{(a a' u) a_z'' + (a' a'' u) a_z + (a'' a u) a_z'\right\} a_x^{m-1} a_x'^{m-1} a_x''^{m-1}$$
$$= (m-1)(a a' a'') a_x^{m-1} a_x'^{m-1} a_x''^{m-1} . u_z = (m-1)\Delta_x^{\mu} . u_z ;$$

der Ausdruck $\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z$ verschwindet also unabhängig von den z, da nach dem Früheren für den gemeinsamen Punkt $\Delta = 0$ ist, w. z. b. w.

Bestehen dagegen für den Punkt x die Gleichungen:

$$(10)\quad a_x^{m-r+1} a_z^{r-1} \equiv 0, \quad a_x'^{m-r+1} a_z'^{r-1} \equiv 0, \quad a_x''^{m-r+1} a_z''^{r-1} \equiv 0,$$

so hat die Jakobi'sche Curve in x jedenfalls einen $3(r-1)$-fachen Punkt, da die ersten Differentialquotienten von φ, ψ, χ jetzt noch je $(r-1)$-fach verschwinden, d. h. es ist

$$\Delta_x^{\mu-3r+4}\Delta_z^{3r-4} \equiv 0 .$$

Bildet man aber weiter den Ausdruck $\Delta_x^{\mu-3r+3}\Delta_z^{3r-3}$ nach Gleichung (6), so dürfen in den Gliedern der Summe die Factoren a_z, a_z', a_z'' wegen (10) nur je zur $(r-1)^{ten}$ oder höheren Potenz vorkommen; denn z. B. zu dem Factor von a_z^{r-2} würde noch a_x^{m-r+1} hinzutreten müssen. Die Summe enthält daher nur das eine Glied

$$(a a' a'') a_x^{m-r} a_x'^{m-r} a_x''^{m-r} a_z^{r-1} a_z'^{r-1} a_z''^{r-1} .$$

Multiplicirt man dieses aber mit u_x und benutzt die Identität (3), so sieht man, dass es verschwinden muss. Aus ganz denselben Gründen reducirt sich der Ausdruck $\Delta_x^{\mu-3r+2}\Delta_z^{3r-2}$, abgesehen von einem Zahlenfactor auf die Terme:

$$(a a' a'') a_x^{m-r-1} a_x'^{m-r-1} a_x''^{m-r-1} a_z^{r-1} a_z'^{r-1} a_z''^{r-1} .$$
$$. \left\{a_z a_x' a_x'' + a_x a_z' a_x'' + a_x a_x' a_z''\right\} ;$$

und wenn man wieder nach Multiplication mit u_x auf jedes Glied die Identitäten (3) und (5) anwendet, so kommt:

---

*) Vgl. weitere Sätze dieser Art, sowie überhaupt für die Theorie der Netze Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven, besonders den Anhang in der deutschen Ausgabe. Ueber die Zahl der Curven mit Rückkehrpunkt und mit 2 Doppelpunkten in einem allgemeinen Netze vgl. de Jonquières: Math. Annalen, Bd. 1, p. 424.

$$(a a' a'') \{ a_z a_x' a_x'' + a_x a_z' a_x'' + a_x a_x' a_z'' \} \cdot u_x$$
$$= a_x a_x' a_x'' \{ (a a' u) a_z'' - (a a'' u) a_z' + (a' a'' u) a_z \}$$
$$= a_x a_x' a_x'' (a a' a'') \cdot u_z \,.$$

Fügen wir endlich rechts wieder die anderen symbolischen Factoren hinzu, so erhalten wir das Glied der Entwicklung des verschwindenden Ausdrucks $\Delta_x^{\mu - 3r + 3} \Delta_z^{3r - 3}$, d. h. es ist auch $\Delta_x^{\mu - 3r + 2} \Delta_z^{3r - 2} = 0$.

Haben also alle Curven eines Netzes in einem festen Punkte einen r-fachen Punkt, so hat die Jakobi'*sche Curve daselbst einen* $(3r - 1)$-*fachen Punkt.*

Unserer ersten Auffassung zufolge erschien die Hesse'sche Curve als Ort der Punkte, deren lineare Polaren in Bezug auf alle Curven des Netzes sich in einem Punkte schneiden; diese Schnittpunkte werden eine andere Curve, *die* Steiner'*sche Curve des Netzes*, beschreiben, deren Gleichung sich durch Elimination der x aus den 3 Gleichungen

$$a_x^{m-1} a_z = 0\,, \quad a_x'^{m-1} a_z' = 0\,, \quad a_x''^{m-1} a_z'' = 0$$

ergibt; *die* Steiner'*sche Curve ist daher von der Ordnung* $3(m-1)^2$; sie ist ihrer Definition zufolge eindeutig auf die Hesse'sche Curve bezogen.

Eine dritte Curve endlich, *die* Cayley'*sche Curve des Netzes*, wird von den Verbindungslinien entsprechender Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Curve umhüllt; *sie ist von der Klasse* $3m(m-1)$. Es gilt nämlich überhaupt der Satz*):

Wenn zwei Curven der Ordnung m und m' eindeutig auf einander bezogen sind, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve von der Klasse $m + m'$.

Zum Beweise betrachten wir einen beliebigen Strahlbüschel. Jeder Strahl u desselben schneidet die eine Curve in m Punkten; einem jeden von diesen entspricht ein Punkt der andern Curve; die letzteren Punkte verbinden wir durch Linien v mit dem Scheitel des Büschels. Alsdann haben wir in diesem eine Correspondenz (vgl. p. 210) zwischen den Strahlen u und v der Art, dass jedem Strahle u m Strahlen v, und ebenso jedem Strahle v m' Strahlen u entsprechen. Nach dem Correspondenzprincipe von Chasles kommt es daher $(m + m')$-mal vor, dass zwei entsprechende Linien u und v zusammenfallen; d. h. durch einen beliebigen Punkt gehen $m + m'$ Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Curven, w. z. b. w.

Für die Singularitäten der Steiner'schen und Cayley'schen Curve gelten nun wieder analoge Sätze, wie für die entsprechenden

*) In ganz derselben Weise hätten wir die Klasse der Cayley'schen Curve einer Grundcurve $f = 0$ (p. 365) bestimmen können. — Die im Texte benutzte Anlage der Abzählung ist überhaupt bei derartigen Aufgaben sehr nützlich.

Verhältnisse bei dem Netze der ersten Polaren. Es ist diese Beziehung jedoch keineswegs der Art, dass jedes Curvennetz m^{ter} Ordnung als Polarensystem einer Curve $(m+1)^{ter}$ Ordnung aufgefasst werden kann. Drei beliebige Curven eines allgemeinen Netzes hängen nämlich zusammen von $\frac{3}{2}m(m+3)$ Constanten ab; drei beliebige Curven m^{ter} Ordnung eines Systems erster Polaren dagegen von den $\frac{(m+1)(m+4)}{2}$ Constanten der Grundcurve und den 6 Coordinaten ihrer drei Pole, zusammen also nur von $\frac{1}{2}(m+1)(m+4)+6$ Constanten. Beide Zahlen sind jedoch für $m=2$ einander gleich: *Ein Netz von Kegelschnitten kann daher nach dieser vorläufigen Abzählung immer als ein System von ersten Polaren einer Curve 3ter Ordnung angesehen werden.* In der später folgenden Theorie der Curven 3ter Ordnung werden wir hierauf noch näher eingehen.

Von den Netzen kann man weiter aufsteigen zur Untersuchung von Curvensystemen, die von 3, 4, ... Parametern abhängen, und somit bez. eine 3-fach, 4-fach, ... unendliche Mannigfaltigkeit repräsentiren; so kann man bei Curven n^{ter} Ordnung weiter gehen bis zu einem Systeme mit $\frac{1}{2}n(n+3)$ linear vorkommenden Parametern: ein System, welches dann die Gesammtheit *aller* Curven n^{ter} Ordnung umfasst. Der einfachste Typus für ein r-fach unendliches System wird dann immer durch die Gesammtheit der Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}n(n+3)-r$ gemeinsamen Punkten gegeben sein. Dualistisch entsprechend wird man ferner Curvensysteme untersuchen müssen, deren Liniencoordinatengleichung eine gewisse Anzahl von Parametern linear enthält. Es ist aber bemerkenswerth, dass einem r-fach unendlichen Systeme von Curven n^{ter} Ordnung immer ein bestimmtes $\left\{\frac{1}{2}n(n+3)-r-1\right\}$-fach unendliches System von Curven n^{ter} Klasse zugeordnet ist; und zwar geschieht dies in ähnlicher Weise, wie einer Linie u (d. i. einer Curve 1ter Ordnung, also $n=1$, $r=0$) vermöge der Bedingung

$$(11) \qquad u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

ein 1-fach unendliches System von Punkten x, als „mit ihr vereinigt gelegen" beigesellt ist. Zwei Curven

$$a_x{}^n = 0 \quad \text{und} \quad u_\alpha{}^n = 0$$

geben nämlich zu der simultanen, in den Coëfficienten beider linearen Invariante $a_\alpha{}^n$ Veranlassung. Fassen wir hierin die a als gegeben, die α als Parameter auf, *so wird der festen Curve $a_x{}^n=0$ durch die Gleichung*

$$a_\alpha{}^n = 0$$

ein $(\frac{1}{2}n(n+3)-1)$*-fach unendliches lineares System von Curven* n^{ter} *Klasse als „mit jener Curve vereinigt gelegen" zugeordnet.*)*

Ist allgemeiner ein lineares ∞^r-System gegeben durch die Gleichung:

$$\lambda_0 a_x{}^n + \lambda_1 a'_x{}^n + \ldots + \lambda_r a^{(r)}{}_x{}^n = 0,$$

so gibt es ein System von Curven n^{ter} Klasse $u_\alpha{}^n = 0$, dessen Individuen die $r+1$ Gleichungen

$$a_\alpha{}^n = 0, \quad a'_\alpha{}^n = 0, \ldots a^{(r)}{}_\alpha{}^n = 0$$

befriedigen, welches somit in der That noch von $\frac{1}{2}n(n+3)-r-1$ willkürlichen Parametern abhängig ist. *Dies System nennen wir mit jenem ersten in vereinigter Lage befindlich.**)* Umgekehrt ist natürlich in dieser Weise auch mit einem Systeme

$$\lambda_0 u_\alpha{}^n + \lambda_1 u_{\alpha'}{}^n + \ldots + \lambda_r u_{\alpha^{(r)}}{}^n = 0$$

vermöge der $r+1$ Gleichungen $a_{\alpha^{(i)}}{}^n = 0$ ein System von Curven $a_x{}^n = 0$ in vereinigter Lage. Sind insbesondere die $\alpha_k{}^{(i)}$ nicht Symbole von Formen $u_{\alpha^{(i)}}{}^n$, sondern Coordinaten wirklicher Punkte, so gehen die Curven des Systems $a_x{}^n = 0$ wirklich durch diese Punkte hindurch; in diesem Falle hat also unsere Bezeichnung eine unmittelbare geometrische Bedeutung. Eine solche kann man jedoch im Allgemeinen bisher nicht angeben; nur für Kegelschnitte ist die Bedeutung der Bedingung $a_\alpha{}^2 = 0$ bekannt (vgl. p. 295). Bei vereinigt gelegenen Kegelschnitten muss man streng unterscheiden, welcher in Punktcoordinaten, welcher in Liniencoordinaten gegeben vorausgesetzt wird, denn diese Curven sind von gleicher Ordnung und Klasse, und der Invariante A_{112} stellt sich sofort die andere A_{122} dualistisch entsprechend gegenüber (p. 289). Ist für $n=2$ ins-

*) Man kann die Coëfficienten einer Curve n^{ter} Ordnung als selbstständige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots$ (Coordinaten) in einer Mannigfaltigkeit (Raum) von $\frac{1}{2}n(n+3)$ Dimensionen auffassen; dann entspricht jedem Punkte dieser Mannigfaltigkeit eine Curve n^{ter} Ordnung und den mit ihr vereinigt gelegenen Curven n^{ter} Klasse die $(\frac{1}{2}n(n+3)-1)$-fach unendlich vielen Ebenen ($u_x = 0$), welche durch den Punkt hindurchgehen. Den linearen Mannigfaltigkeiten verschiedener Stufe, welche durch das Schneiden verschiedener Ebenen $u_x = 0$, $v_x = 0, \ldots$ oder durch das Verbinden verschiedener Punkte entstehen, entsprechen dann die Curven-Büschel, -Netze, ... unserer Ebene und die mit ihnen vereinigt gelegenen Gebilde.

**) Rosanes gebraucht a. a. O. dafür das Wort conjugirt (vgl. die Anmerk. auf p. 295); für entsprechende Untersuchungen bei binären Formen vgl. ferner dessen Aufsatz: Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle's Journal, Bd. 76.

besondere $r=2$, so liegt mit einem Kegelschnittnetze ein ebenfalls 2-fach unendliches System von Kegelschnitten *„ein Kegelschnittgewebe“* vereinigt; und beide Systeme stehen dann in mannigfachen interessanten Beziehungen zu einander. Wir werden hierauf noch bei den Curven dritter Ordnung zurückkommen. —

Die in einem Netze auftretenden Parameter können wir auch als Coordinaten eines Punktes der Ebene auffassen. Bezeichnen wir dieselben demgemäss mit y_1, y_2, y_3, so ordnet die Gleichung des Netzes:

$$\varphi y_1 + \psi y_2 + \chi y_3 = 0$$

jedem Punkte y eine Curve m^{ter} Ordnung und jedem Punkte x eine gerade Linie zu. Man kann dann entsprechend der Steiner'schen Curve einen Ort der Punkte y angeben, denen Curven mit Doppelpunkt entsprechen; und den Doppelpunkten derselben werden Curven mit zwei Doppelpunkten zugehören, ebenso wie in einem Netze von ersten Polaren (p. 369). Man kann ferner überhaupt Curvensysteme betrachten, die durch eine sowohl in den x als in den y homogene Gleichung von der Ordnung m, bez. n in den x und y:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$$

dargestellt werden. Es entspricht dann jedem Punkte x eine Curve n^{ter}, jedem Punkte y eine Curve m^{ter} Ordnung. Wir erwähnen nur einen auf sie bezüglichen Satz*), welcher als Erweiterung des Chasles'schen Correspondenzprincips (vgl. p. 210) für das ternäre Gebiet zu betrachten ist, und der für gewisse Abzählungen oft in ähnlicher Weise, wie jenes nützlich sein kann.

Sind nämlich zwei Curvensysteme der erwähnten Art gegeben:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}) = 0\,,$$

so entsprechen jedem Punkte x der Ebene $\alpha' = nn'$ Punkte y, die Schnittpunkte der beiden ihm durch $f=0$ und $\varphi=0$ zugeordneten Curven, und ebenso jedem Punkte y der Ebene $\alpha = mm'$ Punkte x: wir fragen nach solchen Punkten x, die mit einem der ihnen entsprechenden Punkte y zusammenfallen. Setzen wir demnach $x=y$ in den Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$, so erhalten wir die gesuchten Punkte *(Coincidenzpunkte)* als die Schnittpunkte der beiden Curven

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{x}) = 0, \quad \varphi(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{x}) = 0;$$

ihre Zahl ist also gleich

*) Vgl. Salmon's Geometry of three dimensions, second edition, 1865, p. 511, oder p. 556 im 2. Theile der 2. Auflage von Fiedler's Bearbeitung. Leipzig 1874.

$$(m+n)(m'+n') = mm' + nn' + mn' + nm'$$
$$= \alpha + \alpha' + \beta,$$

wenn $\beta = mn' + nm'$ gesetzt wird. Die Zahl β ist hier gleich der Ordnung der Curve, welche ein Punkt y beschreibt, wenn x auf einer Geraden fortrückt. Die Gleichung dieser Curve ergibt sich nämlich, wenn wir in $f = 0$, $\varphi = 0$

$$x_i' = z_i + \lambda t_i$$

setzen und λ eliminiren; das Eliminationsresultat ist aber dann gerade von der Ordnung $mn' + nm'$ in y. Von derselben Ordnung ist natürlich die Curve, welche x durchläuft, wenn y eine Gerade beschreibt.

Definirt man die Zahl β in dieser Weise geometrisch, so gilt unser Satz von der Zahl $\alpha + \alpha' + \beta$ auch noch, wenn die α bez. α' Punkte nicht als das vollständige Schnittpunktsystem zweier Curven darstellbar sind, was immer eintreten muss, sobald α und α' Primzahlen bedeuten. Wir können den Satz aber noch allgemeiner aussprechen, wenn wir annehmen, dass für *alle* Punkte einer bestimmten Curve eine Coincidenz eintrete. Wir fragen dann nach der Zahl der nicht auf jener „*Coincidenzcurve*" gelegenen Coincidenzpunkte der Correspondenz.*)

Es mögen also einem Punkte x α' Punkte y, einem Punkte y α Punkte x entsprechen; es sei ferner β die Ordnung der Curve, welche die zu x gehörigen Punkte y durchlaufen, wenn x eine Gerade beschreibt. Letztere Annahme können wir offenbar auch so aussprechen, dass auf einer beliebigen Geraden β Punktepaare existiren sollen, so dass immer der eine Punkt unter der Gruppe der dem andern entsprechenden Punkte ist. In dieser Form ist β symmetrisch von den Punktgruppen x und y abhängig; *β ist daher zugleich die Ordnung der Curve, welche die zu y gehörigen Punkte x beschreiben, wenn y auf einer Geraden fortrückt.* Endlich bezeichnen wir mit γ die Ordnung der „*Coincidenzcurve*", deren Punkte also sämmtlich Coincidenzpunkte sind, und mit δ die Klasse derjenigen Curve, deren Tangenten einen Punkt x der Coincidenzcurve mit dem ihm unendlich benachbarten, entsprechenden Punkte y verbinden.

Wir bestimmen nun zunächst die Ordnung einer Curve K_x, die von einem Punkte x durchlaufen wird, wenn seine Verbindungslinie mit einem der ihm zugeordneten α' Punkte y durch einen festen Punkt O gehen soll. Wir verbinden zu dem Zwecke O mit den Punkten x

*) Diese Ausdehnung des Satzes gab Zeuthen: Comptes rendus, Juni 1874. — Für den Fall, dass die Correspondenz durch zwei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ darstellbar ist, wird eine Coincidenzcurve dadurch entstehen, dass sich für $x = y$ von f und φ ein und derselbe Factor absondert.

einer beliebigen Geraden w durch Strahlen u. Jedem solchen Strahle u entsprechen dann α' Strahlen v, welche O mit den α' zu dem Schnittpunkte x von u und w gehörigen Punkten y verbinden. Jeder Linie v entsprechen dagegen β Strahlen u: die Verbindungslinien von O mit den Schnittpunkten der Linie w und der Curve von der Ordnung β, welche von den Punkten x beschrieben wird, wenn y den Strahl v durchläuft. Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe (p. 210) wird es nun $(\alpha + \beta)$-mal vorkommen, dass eine Linie u mit einer entsprechenden Linie v zusammenfällt. Von diesen Coincidenzstrahlen müssen wir jedoch γ ausschliessen: die Verbindungslinien von O mit den γ Schnittpunkt der Linie w und der Coincidenzcurve; denn jeder solchen Linie, aufgefasst als Strahl u, entspricht zufolge der Definition jener Coincidenzcurve ein unendlich benachbarter Strahl v. Es gibt auf w daher $\alpha' + \beta - \gamma$ Punkte, deren Verbindungslinien mit einem entsprechenden Punkte y durch O gehen, d. h. die gesuchte Ordnung der Curve K_x ist gleich $\alpha' + \beta - \gamma$. Ebenso ist der Ort der Punkte y, deren Verbindungslinien mit einem zugeordneten Punkte x durch O gehen, eine Curve K_y von der Ordnung $\alpha + \beta - \gamma$.

Wir nehmen ferner einen zweiten festen Punkt P und verbinden denselben mit den einander entsprechenden Punkten x und y, die paarweise auf einer durch O gehenden Geraden liegen, bez. durch Linien u' und v'. Jede Linie u' schneidet die zu O gehörige Curve K_x in $\alpha' + \beta - \gamma$ Punkten x; zu jedem der letzteren gehört ein Punkt y, dessen Verbindungslinie mit ihm durch O geht; also jeder Linie u' entsprechen $\alpha' + \beta - \gamma$ Linien v', und jeder Linie v' in analoger Weise $\alpha + \beta - \gamma$ Linien u'. Zwischen diesen Strahlen treten daher $\alpha + \alpha' + 2\beta - 2\gamma$ Coincidenzen ein. Von letzteren Coincidenzstrahlen entfallen aber $\beta - \gamma$ in die Verbindungslinie von O und P, denn diese enthält, wie jede beliebige Gerade, β Paare entsprechender Punkte x und y, von denen indess γ in die Schnittpunkte von w mit der Coincidenzcurve zusammenfallen. Die übrig bleibenden $\alpha + \alpha' + \beta - \gamma$ Coincidenzen geben zufolge unserer Construction die Verbindungslinien von P mit den Coincidenzpunkten der ursprünglichen Correspondenz in der Ebene. Unter ihnen sind aber noch die δ Verbindungslinien von P mit den δ Punkten der Coincidenzcurve enthalten, welche die ihnen zugehörigen Tangenten der oben definirten Klassencurve durch O schicken. Es gibt daher schliesslich $\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta$ isolirt liegende Punkte, welche mit einem der ihnen zugeordneten zusammenfallen. Wir haben also das Theorem:

Es sei in der Ebene eine „Correspondenz" gegeben, vermöge deren jedem Punkte x α' Punkte y und jedem Punkte y α Punkte x entsprechen; es sei der Ort der Punkte x oder y, welche den Punkten einer beliebigen Geraden entsprechen, von der Ordnung β; die Correspondenz habe eine

„Coincidenzcurve" von der Ordnung γ; die Enveloppe der Verbindungslinien der Punkte dieser Curve mit den ihnen unendlich benachbarten zugehörigen Punkten sei von der Klasse δ): Alsdann gibt es in der Ebene*

$$\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta$$

Punkte, in denen zwei entsprechende Punkte x und y zusammenfallen (Coincidenzpunkte).

Als eine Anwendung geben wir den Beweis für folgenden Satz: *Es gibt im Allgemeinen*

$$(n-1)^2 + (n-1)(n'-1) + (n'-1)^2$$

Punkte, deren lineare Polaren in Bezug auf eine Curve n^{ter} und eine Curve n'^{ter} Ordnung zusammenfallen.

Sind nämlich $f = a_x{}^n = 0$, $\varphi = a_x'{}^{n'} = 0$ die beiden Curven, so gehören zu der linearen Polare eines Punktes x in Bezug auf $f = 0$ $(n'-1)^2$ Punkte x', deren lineare Polare diese Gerade in Bezug auf $\varphi = 0$ ist; wir haben also $\alpha' = (n'-1)^2$ und ebenso $\alpha = (n-1)^2$. Zur Bestimmung von β bemerken wir, dass die lineare Polare eines Punktes x in Bezug auf $f = 0$ eine Curve $(n-1)^{ter}$ Klasse umhüllt, wenn x eine Gerade durchläuft (vgl. p. 365). Jede Tangente dieser Curve ist wieder $(n'-1)^{te}$ Polare von $(n-1)^2$ Punkten x' in Bezug auf $\varphi = 0$; und alle diese Punkte x' bilden dann eine Curve der Ordnung $(n-1)(n'-1)$. Letzteres folgt aus dem allgemeinen Satze:

Wenn eine Gerade eine Curve μ^{ter} Klasse $u_\alpha{}^\mu = 0$ umhüllt, so beschreiben ihre $(m-1)^2$ Pole in Bezug auf eine Curve $a_x{}^m = 0$ eine Curve der Ordnung $\mu(m-1)$. Erhält man doch die Gleichung der letzteren unmittelbar, wenn man in $u_\alpha{}^\mu = 0$ für u_i die Werthe $a_i a_x{}^{m-1}$ einsetzt.

Wir haben also in unserm Falle $\beta = (n-1)(n'-1)$ zu nehmen; und somit ist (da $\gamma = \delta = 0$) in der That die Zahl der gesuchten Punkte gleich:

$$\alpha + \alpha' + \beta = (n-1)^2 + (n-1)(n'-1) + (n'-1)^2.$$

In diesem Falle hätten wir die gefundene Zahl auch leicht direct algebraisch ableiten können. Setzen wir nämlich $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, so müssen für die Coincidenzpunkte x folgende Gleichungen bestehen:

$$f_1 : f_2 : f_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

oder:

$$f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 = 0$$
$$f_2\varphi_3 - \varphi_2 f_3 = 0$$
$$f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1 = 0$$

*) Wenn für die Beziehung der beiden benachbarten Curven γ^{ter} Ordnung keine besonderen Ausnahmepunkte vorhanden sind, so ist $\delta = 2\gamma$, vgl. p. 383.

Die ersten beiden sind je von der Ordnung $n-1+n'-1$, haben also $(n-1+n'-1)^2$ gemeinsame Lösungen. Hierunter sind aber auch die $(n-1)(n'-1)$ Schnittpunkte von $\varphi_2=0$, $f_2=0$, durch welche die Curve $f_3\varphi_1-\varphi_3 f_1=0$ nicht hindurchgeht. Die Zahl der *gemeinsamen* Lösungen aller *drei* Gleichungen ist daher

$$=(n-1+n'-1)^2-(n-1)(n'-1)=(n-1)^2+(n'-1)^2+(n-1)(n'-1),$$

wie wir oben fanden.*)

Für den Fall $n=n'$ sind die resultirenden $3(n-1)^2$ Coincidenzpunkte identisch mit den in dem Büschel $f+\lambda\varphi=0$ auftretenden Doppelpunkten, denn die Bedingungen für einen solchen:

$$f_i+\lambda\varphi_i=0$$

lassen sich nach Elimination von λ eben in der Form schreiben:

$$f_1:f_2:f_3=\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3.$$

VI. Fortsetzung. — Die Methode der Charakteristiken.

Ausführlicher sind in neuerer Zeit solche Systeme von Curven untersucht, die noch von *einem* willkürlichen Parameter abhängen; und diese Betrachtungen haben insbesondere für die richtige Auffassung der Ausartungen algebraischer Curven zu wichtigen Resultaten geführt. Wir müssen uns jedoch im Folgenden darauf beschränken, die hierbei zu verfolgenden Gesichtspunkte zu kennzeichnen; nur bei den Kegelschnittsystemen werden wir etwas länger verweilen. Wir betreten hiermit ein Gebiet der Geometrie, das in neuerer Zeit sich zu einer immer vollständigeren Disciplin erhoben hat und demgemäss wohl auch als die „Geometrie der Anzahl" bezeichnet wird. —

Ein solches System von einfach unendlich vielen Curven lässt sich in folgender Form algebraisch darstellen: Die Coëfficienten der beweglichen Curve der Schaar ($f=0$) sind algebraische, nicht nothwendig rationale Functionen *eines* Parameters λ. Ist diese Abhängigkeit eine irrationale, so kann man die Coëfficienten immer, wie die Theorie der algebraischen Functionen lehrt, *rational* durch *zwei* Parameter darstellen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht, oder wenn wir noch einen Homogeneitätsfactor einführen, als ganze homogene Functionen gewisser Ordnung von λ_1, λ_2, λ_3, wo zwischen λ_1, λ_2, λ_3 eine homogene Gleichung besteht.

Für das Curvensystem sind nun besonders zwei Zahlen wichtig: *die Charakteristiken des Systems*, nämlich

---

*) Vgl. über solche Systeme von Gleichungen: Salmon-Fiedler: Raumgeometrie, Bd. 2, p. 519 ff. in der 2. Auflage, 1874.

μ, die Zahl der Curven des Systemes, welche durch einen beliebigen festen Punkt gehen, und

ν, die Zahl der Curven des Systems, welche eine beliebige feste Gerade berühren*);

und zwar reichen diese Zahlen für Kegelschnittsysteme aus, während bei höheren Curven noch andere Zahlen hinzutreten (vgl. unten).

Die Zahl μ stimmt, wenn die Coëfficienten der beweglichen Curve rationale Functionen eines Parameters sind, mit der Dimension überein, zu der letzterer in der Gleichung $f = 0$ des Systems in Punktcoordinaten vorkommt. Die Zahl ν wird alsdann im Allgemeinen die Dimension angeben, zu welcher dieser Parameter in die Gleichung $\varphi = 0$ des Systems in Liniencoordinaten eingeht, also bei Curven n^{ter} Ordnung gleich $2\mu(n-1)$ sein, da φ vom Grade $2(n-1)$ in den Coëfficienten von f ist.**) Es kann jedoch eintreten — und wir setzen im Folgenden solche Vorkommnisse im Allgemeinen voraus —, dass in dem Systeme Curven enthalten sind, die eine jede beliebige Gerade berühren, indem nämlich eine der Curven n^{ter} Ordnung z. B. in eine $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und eine doppelt zählende Gerade zerfällt, oder überhaupt einen mehrfach zählenden Zweig enthält. Alle solche Curven, welche der Gleichung $\varphi = 0$ identisch genügen, würden unter der Zahl $2\mu(n-1)$ mit einbegriffen sein, während wir unter der Zahl ν nur die *eigentlich* berührenden Curven verstehen wollen. Ebenso soll μ nur die Zahl der in eigentlichem Sinne durch einen Punkt gehenden Curven angeben, ohne Berücksichtigung derjenigen, die etwa einen doppelt zählenden Punkt enthalten und so in gewissem Sinne durch jeden Punkt hindurchgehen: Curven, die dann freilich nur durch die Liniencoordinatengleichung vollständig darstellbar sind.

Eben diese Vorkommnisse machen es für die algebraischen Untersuchungen nothwendig, immer gleichzeitig die beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ im Auge zu haben. Bei der geometrischen Betrachtung erscheinen diese *„singulären Curven“* mit mehrfach zählenden Zweigen, wenn man eine allgemeine Curve allmählich degeneriren lässt.***) Geht man dabei von der Punktauffassung aus, lässt also z. B.

---

*) Diese Charakteristiken wurden von Chasles zuerst eingeführt, welchem überhaupt die Entstehung der *Charakteristikentheorie* zu verdanken ist. Letztere wurde ferner durch de Jonquières, Cayley, Salmon, Zeuthen gefördert. Vgl. besonders die zusammenfassende Arbeit von Cayley: On the curves, wich satisfy given conditions, Philos. Transactions, London 1868, vol. 158; ferner Salmon's Higher plane curves und Cremona's Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven. Einen vollständigeren Literaturnachweis findet man bei Cayley a. a. O. und bei Painvin: Bulletin des sciences math. t. 3, p. 155.

**) Auf diese Annahmen beziehen sich die ersten Untersuchungen von de Jonquières.

***) Vgl. Beispiele hiefür auf p. 343 und p. 346.

zu den etwa schon vorhandenen Doppelpunkten noch einen weiteren hinzutreten, oder einen Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen, so stellt sich bei der Linienauffassung diese Reduction dadurch dar, dass sich von der Curve ein einzelner auf ihr liegender Punkt, eventuell mehrfach zählend, absondert. Einen solchen Punkt, in dem die betreffende Curve als von jeder durch ihn gehenden anderen Curve berührt anzusehen ist*), nennen wir einen *Klassenscheitel (sommet* nach Chasles). Ebenso werden sich einzelne, eventuell mehrfach zählende Gerade absondern können, die bei der Linienauffassung allein unberücksichtigt bleiben würden; wir bezeichnen sie als *Ordnungsstrahlen.* Diese Auseinandersetzungen zeigen, dass es zur Bestimmung der Zahlen μ, ν für ein System vor allen Dingen nothwendig ist, die singulären Curven des Systems vollständig zu kennen; und in Bestimmung der letzteren, besonders der Vielfachheit etwa auftretender Ordnungsstrahlen und Klassenscheitel, liegt meist die Hauptschwierigkeit.

Wir erläutern diese Verhältnisse zunächst an den *Kegelschnittsystemen.* In einem solchen sind folgende singuläre Curven möglich:

1) bei der Punktauffassung:

Linienpaar, dessen Doppelpunkt dann ein Klassenscheitel ist, und
Doppellinie, selbst ein Ordnungsstrahl, auf dem dann zwei getrennt liegende oder zusammenfallende Klassenscheitel liegen;

2) bei der Linienauffassung:

Punktepaar, deren Verbindungslinie Ordnungsstrahl ist,
Doppelpunkt, selbst ein Klassenscheitel, durch den zwei getrennte oder zusammenfallende Ordnungsstrahlen gehen.

Wir bestimmen zunächst die Zahl

λ der vorkommenden Doppellinien
π „ „ „ Doppelpunkte.

Durch jeden Punkt einer beliebigen Geraden gehen μ Curven des Systems, von denen jede die Gerade noch in einem Punkte y schneidet; ebenso sind jedem Punkte y μ Punkte x auf der Geraden zugeordnet; wir haben also 2μ Coincidenzen. Diese entstehen entweder durch Berührung der Geraden mit einem eigentlichen Kegelschnitte, oder durch den Schnitt mit einer Doppellinie; es gibt aber ν eigentlich berührende Kegelschnitte, und also haben wir:

$$\lambda = 2\mu - \nu \qquad (1)$$
$$\pi = 2\nu - \mu .$$

*) Ein Klassenscheitel braucht nicht in einem einzelnen vielfachen Punkte zu liegen, wie in dem Beispiel, er kann auch auf einem vielfach zählenden Zweige der Curve beliebig liegen (vgl. p. 417, Anmk.).

Vermöge dieser Gleichungen kann man die Charakteristiken μ, ν eines Systems, wenn dies nicht direct gelingt, mittelst der Zahlen λ, π bestimmen, sobald man letztere kennt; und auf diese Bestimmungen beziehen sich besonders die Untersuchungen von Zeuthen. Dieselben sind noch einfach für die durch die sogenannten *Elementarbedingungen* gegebenen Systeme, d. h. wenn verlangt wird, dass die Kegelschnitte durch vier Punkte gehen sollen, oder durch drei Punkte gehen und eine Gerade berühren, etc.: Systeme, die wir kurz durch die Symbole

(::), (∴|), (..||), (.|||), (||||)

bezeichnen wollen. Wir stellen in der folgenden Tabelle die sich hier weiterhin für μ, ν, λ, π ergebenden Werthe zusammen:

(2)

<table>
<tr><th></th><th>μ</th><th>ν</th><th>λ</th><th>π</th></tr>
<tr><td>(::)</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>(∴|)</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>6</td></tr>
<tr><td>(..||)</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(.|||)</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>(||||)</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

Die Systeme (::) und (||||) sind schon in der Kegelschnitttheorie eingehend behandelt.

In Betreff der analytischen Darstellung des Systems (∴|) bemerken wir Folgendes. Die drei festen Punkte nehmen wir zu Ecken des Coordinatendreiecks; die Gleichung eines durch sie gehenden Kegelschnittes ist dann

$$a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2 = 0 .$$

Sind ferner u_i die Coordinaten der festen Tangente, so haben wir noch die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Entwicklung der Determinante gibt aber gerade das Product der vier Werthe, welche der Ausdruck

$$\sqrt{a_{23} u_1} \pm \sqrt{a_{31} u_2} \pm \sqrt{a_{12} u_3}$$

je nach Benutzung der Vorzeichen annimmt. Setzen wir also:

$$a_{23} u_1 = \lambda_1^2, \quad a_{31} u_2 = \lambda_2^2, \quad a_{12} u_3 = \lambda_3^2,$$

so ist die *Gleichung des Systems* (∴|):

(3) $$\frac{\lambda_1^2}{u_1} x_2 x_3 + \frac{\lambda_2^2}{u_2} x_3 x_1 + \frac{\lambda_3^2}{u_3} x_1 x_2 = 0,$$

wo:

(4) $$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Da hier λ_1, λ_2, λ_3 quadratisch vorkommen, ist $\mu = 2$.

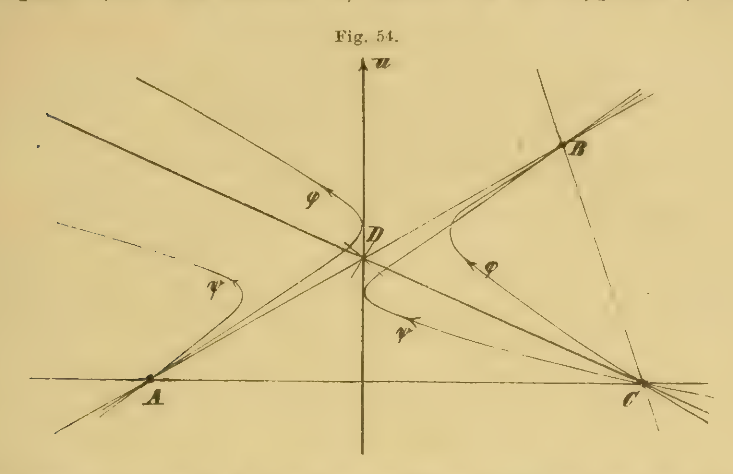
In dem Systeme sind drei Linienpaare enthalten, gegeben durch das Verschwinden der Determinante. Da diese $\left(\frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{u_1^2 u_2^2 u_3^2}\right)$ aber ein vollständiges Quadrat ist, so zählt jedes Paar doppelt, ebenso also auch jeder der drei Scheitel; daher die Zahl $\pi = 6$ in der Tabelle. Diese Scheitel sind die Schnittpunkte der drei Dreiecksseiten mit der festen Geraden; jede Seite wird durch die Verbindungslinie des auf ihr liegenden Scheitels mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks zu einer Curve des Systems ergänzt. Doppellinien sind nicht vorhanden, es ist daher $\nu = 4$ und $\lambda = 0$; in der That sondert sich bei Bildung der Liniencoordinatengleichung kein Factor ab.

Von dem Umstande, dass die drei Linienpaare als Kegelschnitte des Systems doppelt zu zählen sind, kann man sich auch in folgender Weise rein geometrisch Rechenschaft geben. Wir verfolgen zunächst, wie in einem linearen Curvensysteme ein Kegelschnitt allmählich in ein Linienpaar oder Punktepaar übergeht. In einem Büschel müssen wir uns ein Linienpaar offenbar dadurch entstanden denken, dass in dem einen Winkelraume desselben die Zweige einer Hyperbel sich immer enger an die Gestalt des Linienpaares anlegen, um dann, in stetiger Fortsetzung ihrer Bewegung, nach Erreichung dieser Grenzlage, sich in dem andern Winkelraume wieder von demselben zu entfernen. Das Linienpaar wird dabei offenbar nur einmal durchlaufen: es zählt nur einfach. Entsprechend ist es beim Punktepaare in einer Kegelschnittschaar mit vier gemeinsamen Tangenten (z. B. einem confocalen Systeme): eine Ellipse zieht sich immer mehr um die Punkte des Paares zusammen, bis sie schliesslich die zwischen den Punkten liegende Strecke ihrer Verbindungslinie doppelt überdeckt, wo sie dann als Liniengebilde eben durch die beiden Punkte (Klassenscheitel) dargestellt ist. Gehen wir zu der nächst benachbarten Curve weiter, so ist dieselbe eine Hyperbel, welche sich an die beiden von den zwei Punkten aus sich in's Unendliche erstreckenden Zweige der Geraden eng anlegt und so diesen Theil der Linie doppelt überdeckt. Beim Fortschreiten zu weiteren Curven werden dann die Zweige der Hyperbeln immer steiler gegen jene Doppellinie. Das Punktepaar ist offenbar wieder einfach zu zählen; es bildet eine einfache Durchgangslage der Curven des Systems.

Anders ist dies bei dem uns vorliegenden Systeme $(\ldots|)$, wie in Fig. 54 schematisch veranschaulicht ist. Es sind hier A, B, C die

drei festen Punkte, u ist die feste Tangente. Einem der bezeichneten Linienpaare (mit dem Scheitel D) nähert sich die Hyperbel φ, deren

Fig. 54.



einer Zweig die Linie u berührt, während der andere ihr von der andern Seite her unendlich nahe kommt. Nachdem das Linienpaar erreicht ist, tritt die Hyperbel mit ihren Zweigen nicht bez. in die benachbarten Winkelräume über, sondern geht zurück, indem sie die Lage der Curve ψ in der Figur annimmt: sie verhält sich in dem Curvensysteme gewissermassen wie ein Rückkehrpunkt auf einer algebraischen Curve und muss daher, wie dieser, *doppelt* gezählt werden. —

Zur Darstellung des sich selbst dualistischen Systems (..||) nehmen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden als Ecke $u_1 = 0$ des Coordinatendreiecks, die Verbindungslinie der beiden Punkte als Seite $x_1 = 0$. Die übrigen Elemente des Dreiecks bestimmen wir so, dass die beiden gegebenen Punkte harmonisch zu den Punkten $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, und gleichzeitig die gegebenen Geraden harmonisch zu $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sind. Die Gleichung des Kegelschnittes hat dann die Form:

$$a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + 2\, a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0,$$

wo $a_{22} : a_{33} = c$ eine Constante ist. Ebenso muss in der Liniencoordinatengleichung

$$\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11} a_{33} - a_{13}^2} = c'$$

constant sein, und das Glied mit $u_2 u_3$ fehlen, was die Bedingung gibt:

$$a_{12} \cdot a_{13} = 0.$$

Jede der Annahmen $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ genügt also den gestellten Forderungen, und wir haben den Satz:

*Das Kegelschnittsystem mit zwei festen Punkten und zwei festen Tangenten ist reducibel, d. h. zerfällt in zwei völlig getrennte Systeme.**)

Setzen wir nun z. B. $a_{12} = 0$ und

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22} = c\,a_{33}, \quad \lambda_3 = a_{13},$$

so wird die *Gleichung des einen Systems:*

$$(5) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{c}\lambda_2 (c x_2^2 + x_3^2) + 2\lambda_3 x_1 x_3 = 0,$$

wo die Bedingung besteht:

$$(6) \qquad \lambda_1 \lambda_2 (c - c') + c c' \lambda_3^2 = 0.$$

Durch jeden Punkt gehen also noch zwei Kegelschnitte; ebenso im Systeme $a_{13} = 0$; es ist hier also $\mu = 4$, und wegen der Dualität auch $\nu = 4$. Daraus folgt ferner wegen (1): $\lambda = \pi = 4$. In der That für zerfallende Kegelschnitte muss die Discriminante

$$\lambda_1 \lambda_2^2 + c\lambda_3^2 \lambda_2$$

verschwinden. Die beiden Gleichungen

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 - c\lambda_3^2 = 0$$

führen aber wegen der Bedingungsgleichung zu demselben Resultate:

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3^2 = 0.$$

Es gibt daher in jedem der beiden Systeme nur eine Doppellinie ($x_1^2 = 0$) als singuläre Curve, die Verbindungslinie der beiden Punkte; und dieselbe zählt in jedem Systeme (wegen $\lambda_3^2 = 0$) doppelt, im Ganzen also vierfach ($\lambda = 4$). Ebenso gibt es einen vierfach zählenden Scheitel ($\pi = 4$): den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden.

Von der Vielfachheit der singulären Curven können wir uns durch eine ähnliche geometrische Ueberlegung Rechenschaft geben, wie bei dem Systeme (...|). In Fig. 55a, und 56a sind je zwei Kegelschnitte der beiden Systeme, in die das System (..||) zerfällt, kurz vor und kurz nach der Grenzlage dargestellt, welche durch die Doppellinie $\overline{AB}$ angezeigt ist. Die beiden Systeme unterscheiden sich, wie man sieht, dadurch, dass in dem einen je zwei Curven sich

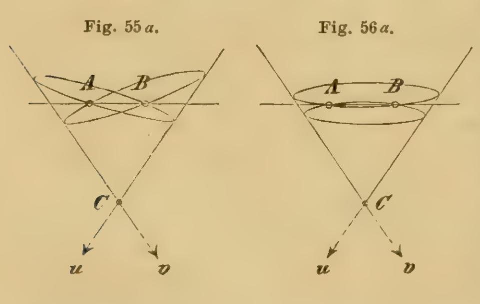
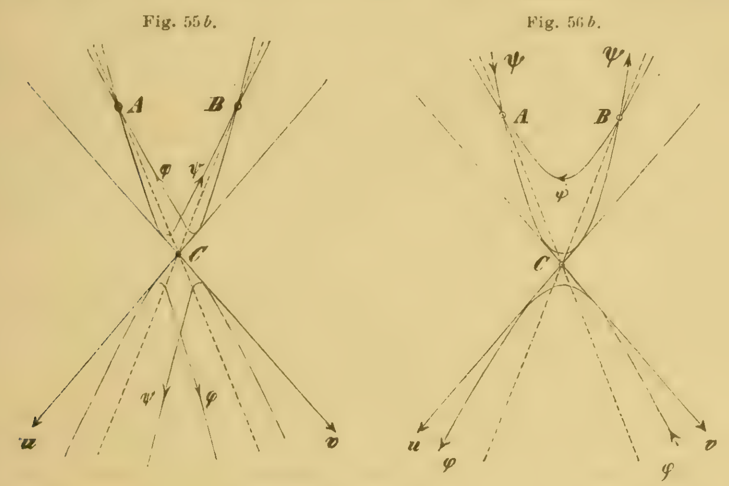


Fig. 55a. Fig. 56a.

*) Dies ist evident, wenn man die beiden festen Punkte in die Kreispunkte fallen lässt. Die Kreise des einen Systems liegen dann in dem einen Winkelraume zwischen den beiden festen Tangenten, die des andern in dem andern Winkelraume.

immer, in dem andern nicht immer in vier reellen Punkten schneiden. Durch den Umstand, dass die unendlich flach gewordene Ellipse sich nicht wieder in der oben (p. 394) geschilderten Weise zu einer Hyperbel erweitert, sondern sogleich in eine benachbarte Ellipse übergeht, ohne dass also die unendlichen Aeste der Doppellinie von einer unendlich flachen Hyperbel überdeckt würden, ist es hier angezeigt, dass die Doppellinie zweifach zählen muss; sie verhält sich eben wie ein Rückkehrpunkt einer algebraischen Curve. Ganz dualistisch entsprechend geschieht in den beiden Systemen die allmählige Annäherung an den Schnittpunkt C der beiden gegebenen Geraden u, v, was aus Fig. 55_b und 56_b ersichtlich sein wird. Die Tangenten der Hyperbeln



in den Punkten A, B nähern sich immer mehr den Linien AC, BC, dem entsprechend, dass in ersteren Figuren die Berührungspunkte der Ellipsen immer mehr an die Schnittpunkte der Doppellinie mit u und v heranrücken.*) —

Die von uns eingeführten Charakteristiken μ, ν, statt deren man wegen der linearen Gleichungen (1) auch λ, π anwenden kann, werden nun von fundamentaler Bedeutung durch einen von Chasles zuerst durch Induction gefundenen Satz. Nach diesem ist die Zahl der Kegelschnitte eines Systems (μ, ν), welche noch einer fünften Bedingung genügen, immer von der Form

$$\alpha\mu + \beta\nu,$$

wo die Zahlen α, β von dem Kegelschnittsysteme vollständig unabhängig sind, sich vielmehr allein aus der Natur der hinzutretenden

*) Durch unsere geometrische Ueberlegung ist eigentlich nur entschieden, ob die Vielfachheit der betreffenden Curve durch eine gerade oder ungerade Zahl gegeben wird.

Bedingung bestimmen. Man nennt letztere Zahlen daher die *Charakteristiken der Bedingung.* *) Wir beweisen den wichtigen Satz in folgender Weise.

Für die Coëfficienten a_{ik} der Punktgleichung eines Kegelschnittes seien die vier Bedingungsgleichungen

$$(7) \qquad \Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0$$

gegeben, welche den Kegelschnitt in invariante Beziehungen zu festen Punkten, Linien oder Curven setzen. Dadurch ist dann ein Kegelschnittsystem unserer Art festgelegt. Wir nehmen an, dass diese vier Gleichungen zusammen mit einer fünften, welche in den Coëfficienten des veränderlichen Kegelschnittes linear ist, für diese Coëfficienten μ verschiedene Werthe zulassen. Alsdann ist μ die eine Charakteristik des Systems, denn die Forderung, dass der Kegelschnitt einen bestimmten Punkt enthalte, gibt eben eine lineare Gleichung für die a_{ik}. **) In Folge dieser Annahme ist nach einem bekannten Satze der Algebra μ von dem Grade der Gleichungen $\Pi_i = 0$ in den a_{ik} abhängig, und zwar ist, wenn q_i den Grad von Π_i bezeichnet:

$$\mu = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 .$$

Tritt nun zu den Gleichungen (7) statt der linearen eine Gleichung $\Pi_5 = 0$ vom Grade q_5 in den a_{ik}, so wird die Zahl der gemeinsamen Lösungen aller 5 Gleichungen gleich

$$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 = \mu \cdot q_5 .$$

Unter diesen μq_5 Kegelschnitten des Systems sind aber möglicher Weise noch zerfallende enthalten, welche die Bedingung $\Pi_5 = 0$ identisch erfüllen, während wir nur nach der Zahl der eigentlichen Kegelschnitte fragen, die den gestellten Bedingungen genügen. Jedenfalls ist darunter nicht jedes Linienpaar; denn alsdann müsste Π_5 den Factor $(abc)^2$ $(= \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33})$ enthalten; und wir wollen Π_5 als irreducibel voraussetzen. Für eine Doppellinie dagegen verschwindet bekanntlich die linke Seite der Liniencoordinatengleichung $F = (abu)^2 = u_\alpha^2$ unabhängig von den u; es wird daher *jede* in unserm Systeme enthaltene Doppellinie der Bedingung $\Pi_5 = 0$ genügen, sobald die Coëfficienten a_{ik} in Π_5 sich theilweise der Art zu Coëfficienten α_{ik} der Liniencoordinatengleichung vereinigen lassen, dass die letzteren homogen in Π_5 vorkommen. Es wird dann jede der λ Doppellinien β-mal

*) Vorausgesetzt wird dabei, dass die hinzutretende Bedingung in gewisser Weise von den das System bestimmenden Bedingungen unabhängig sei (vgl. p. 400).

**) Es kommt also nur darauf an, dass diese Gleichung linear ist. Man kann daher im Folgenden die Bedingung, dass ein Kegelschnitt durch einen Punkt gehe, z. B. durch die andere ersetzen, dass er mit einem festen Kegelschnitte $u_\alpha^2 = 0$ in vereinigter Lage (p. 385) sei.

als eine Lösung unseres Problems zu zählen sein, wenn wir mit β den Grad bezeichnen, zu welchem Π_5 die α_{ik} enthält. Bezeichnen wir ferner mit α den Grad, zu welchem die Coëfficienten a_{ik} ausserdem noch in Π_5 eingehen (d. h. ausser in den α_{ik}), wo dann*)

$$q_5 = \alpha + 2\beta,$$

so wird die Zahl der eigentlichen Lösungen gleich

$$q_5\mu - \beta\lambda = \alpha\mu + \beta(2\mu - \lambda),$$

oder wegen der Gleichungen (1):

$$= \alpha\mu + \beta\nu, \text{ q. e. d.}$$

Bei dieser Betrachtung ist zunächst vorausgesetzt, dass die Bedingungen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$, $\Pi_4 = 0$ nicht alle durch jede beliebige Doppellinie erfüllt werden. Dies würde eintreten, wenn Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 selbst auch homogen in den α_{ik} sind. Alsdann werden einer fünften linearen Bedingung unendlich viele Doppellinien genügen; aber unser Resultat bleibt auch dann gültig, wenn wir unter μ die Zahl der *eigentlichen* Kegelschnitte verstehen, welche einer hinzutretenden linearen Bedingung genügen. Wird letztere durch eine Bedingung vom Grade $q_5 = \alpha + 2\beta$ ersetzt, so ist die Zahl der eigentlichen Lösungen zunächst wieder gleich $q_5\mu$ (und davon ist noch die Zahl $\beta\lambda$ abzuziehen). Den Beweis hierfür erbringen wir durch einen Satz, der zugleich eine andere Verallgemeinerung unserer Betrachtung zur Folge hat; derselbe lautet:

Wenn ein System von Gleichungen (zwischen einer beliebigen Zahl von Unbekannten) zusammen mit einer linearen Gleichung μ Lösungen zulässt, so hat dasselbe zusammen mit einer Gleichung q^{ten} Grades μq Lösungen; und zwar gilt dies auch, wenn es ausserdem einfach unendlich viele Lösungen gibt, welche jene lineare Gleichung und die Gleichungen des gegebenen Systems identisch befriedigen.

Zum Beweise denken wir uns aus dem gegebenen Gleichungssysteme die Unbekannten als Functionen φ_i ϱ^{ten} Grades dreier homogen vorkommenden Parameter r, s, t berechnet, zwischen denen noch eine algebraische Gleichung σ^{ter} Ordnung besteht:

$$\Phi(r, s, t) = 0.$$

Führen wir die Parameter dann in eine hinzutretende lineare Gleichung ein, so geht letztere in eine Gleichung $\Psi = 0$ von der ϱ^{ten} Ordnung über, gibt also mit $\Phi = 0$ zusammen $\varrho\sigma$ Lösungen. Sollen aber einfach unendlich viele Lösungen möglich sein, so müssen

*) Diese Bedeutung der Zahlen α, β gab Clebsch bei Gelegenheit eines im Uebrigen etwas anders angelegten Beweises für den Chasles'schen Satz: Math. Annalen, Bd. 6, p. 1.

die Functionen Φ und Ψ einen Factor, sagen wir τ^{ter} Ordnung, gemein haben; und soll dies für *jede* lineare Combination Ψ der φ_i eintreten, so muss dieser Factor in jeder der Functionen φ_i enthalten sein. Derselbe Factor wird sich daher von jeder Gleichung q^{ten} Grades, welche an Stelle der linearen tritt, q-fach absondern. Eine solche hat folglich zusammen mit $\Phi = 0$

$$q\,(\varrho - \tau)\,(\sigma - \tau) = q\,.\,\mu$$

Lösungen, wo nun in der That $\mu = (\varrho - \tau)\,(\sigma - \tau)$ die Zahl der eigentlichen Lösungen von $\Phi = 0$ mit einer linearen Gleichung $\Psi = 0$ bedeutet. — Diesen Satz hat man nur an Stelle des andern über die Zahl der gemeinsamen Lösungen von 5 Gleichungen zu benutzen; alsdann behält obiger Beweis im Uebrigen seine Gültigkeit. Zugleich erkennt man aber, dass der Chasles'sche Satz auch für ein Kegelschnittsystem gilt, welches nicht durch 4 getrennte Bedingungen gegeben ist, sondern durch ein mit 4 Bedingungen äquivalentes System von mehr Gleichungen dargestellt wird.

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass die Bedingung Π_5 in gewisser Weise „*unabhängig von dem gegebenen Systeme*" sein muss; d. h. sie darf nicht durch die Bedingungen des Systems schon identisch erfüllt sein. In dem Falle müsste man durch einen Grenzübergang zum Verschwinden sämmtlicher Coëfficienten einer Covariante etc. übergehen, um die Natur der hinzutretenden Bedingung ausdrücken zu können. Dies ist z. B. der Fall, wenn das Kegelschnittsystem eine feste Curve nochmals berühren soll, welche jeder Kegelschnitt des Systems ohnedies schon berührt. Diese Beschränkung trifft keineswegs *alle* Fälle, in denen die Elemente der Bedingung von den bedingenden Elementen der Curvenreihe selbst abhängen, sondern eben nur diejenigen, die nicht mehr durch das Verschwinden einer einzelnen Invariante ausdrückbar sind. — Wir haben somit den Satz*):

Unter den Kegelschnitten einer Reihe mit den Charakteristiken μ, ν gibt es $\alpha\mu + \beta\nu$, welche einer fünften Bedingung genügen, wenn letztere durch das Verschwinden einer invarianten Bildung vom Grade α in den Coëfficienten der Punktgleichung, vom Grade β in denen der Liniengleichung des variabeln Kegelschnittes gegeben ist.

Durch unseren Beweis sind somit die Charakteristiken einer Bedingung algebraisch definirt. Für eine geometrisch gegebene Bedingung ist jedoch die Bildung des Ausdrucks Π_5 im Allgemeinen nicht bekannt; und es bietet sich daher zunächst die Aufgabe, für eine solche die Charakteristiken α, β in anderer Weise zu bestimmen.

---

*) Einen anderen (weniger kurzen, auf Betrachtungen über das Chasles'sche Correspondenzprincip beruhenden) Beweis gab Halphen: Bulletin de la société mathématique de France, t. 1, 1873, p. 130.

Man kann zu diesem Ziele oft einfach gelangen, indem man die Zahlen r, s der Kegelschnitte aus den einfachsten Systemen (: :) und (||||) für die Bedingung irgendwie direct feststellt und dann aus den Gleichungen

$$(8) \qquad \alpha + 2\beta = r, \quad 2\alpha + \beta = s$$

α und β berechnet. Wir haben z. B. gesehen (vgl. p. 375), dass es in einem Curvenbüschel m^{ter} Ordnung

$$2(nm + p - 1) - r$$

Curven gibt, welche eine feste Curve der Ordnung n, vom Geschlechte p, mit r Rückkehrpunkten berührt. Bezeichnen wir mit k die Klasse dieser Curve, so ist nach den Plücker'schen Formeln (p. 351):

$$2p - 2 = k + r - 2n,$$

und somit die angeführte Zahl gleich

$$2n(m-1) + k.$$

Für das Kegelschnittsystem (: :) haben wir also, da $m = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 2$:

$$\alpha + 2\beta = 2n + k,$$

und dualistisch entsprechend für das System (||||):

$$2\alpha + \beta = 2k + n;$$

woraus man findet:

$$\alpha = k, \quad \beta = n.$$

Die Charakteristiken α, β für die Bedingung der Berührung mit einer festen Curve sind also bez. gleich Klasse und Ordnung dieser Curve); d. h. es gibt in einer Kegelschnittreihe (μ, ν)*

$$k\mu + n\nu$$

Kegelschnitte, die eine feste Curve n^{ter} Ordnung, k^{ter} Klasse berühren.

Ein Beispiel für die Bestimmung der Zahlen α, β aus der algebraischen Darstellung gibt die Forderung, dass ein Kegelschnitt des Systems die Entfernung zweier festen Punkte harmonisch, oder allgemeiner nach einem gegebenen Doppelverhältnisse δ theilen soll. Sind x, y die beiden Punkte, so haben wir die Bedingung (vgl. p. 74):

$$\Pi_5 = a_x^2 b_y^2 (\delta + 1)^2 - 4\delta \,.\, a_x a_y \,.\, b_x b_y = 0,$$

und hierin ist $\alpha = 2$, $\beta = 0$, da eine Umformung von Π_5, durch die Factoren (abu) auftreten würden, nicht möglich ist. Demnach folgt das Resultat

*) Man kann diese Zahlen nach Chasles auch durch Betrachtung des Ortes der Punkte ableiten, deren lineare Polare in Bezug auf eine Curve des Systems zusammenfällt mit ihren linearen Polaren in Bezug auf die feste Curve.

In einer Reihe mit den Charakteristiken μ, ν gibt es 2μ Kegelschnitte, welche eine gegebene Strecke nach gegebenem Doppelverhältnisse theilen.

Eine Ausnahme tritt für $\delta = -1$ ein, denn hier wird Π_5 ein vollständiges Quadrat:

Es gibt daher μ Kegelschnitte, welche die gegebene Strecke harmonisch theilen.

Für $\delta = +1$ kommen wir wieder auf die Bedingung der Berührung. In der That wird

$$\Pi_5 = 4\, a_x b_y\, (a_x b_y - b_x a_y) = 2\, (a b u)^2,$$

wenn u_i die Coordinaten der Verbindungslinie von x und y sind; und also ist: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, wie es sein muss. —

Der zuvor bewiesene Satz von Chasles ist um so wichtiger, als es vermöge desselben überhaupt gelingt, die Zahl der Kegelschnitte anzugeben, welche 5 einzelnen Bedingungen:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0, \quad \Pi_5 = 0$$

genügen, wenn deren Charakteristiken

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \alpha_3, \beta_3; \quad \alpha_4, \beta_4; \quad \alpha_5, \beta_5$$

bekannt sind. Diese Zahl nämlich muss nach dem Chasles'schen Satze linear in den Charakteristiken jeder Bedingung sein, d. h. sie ist, wenn p, q, r, s, t, u reine Zahlenfactoren bedeuten:

$$\begin{aligned} Z = p\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 &+ q\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + r\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 \\ &+ s\,\Sigma\,\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5 + t\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + u\,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\,, \end{aligned}$$

wo die Summenzeichen sich auf alle verschiedenen Vertauschungen der Indices 1, 2, 3, 4, 5 beziehen. Zur Bestimmung der hier vorkommenden Zahlenfactoren betrachten wir specielle Fälle.*) Soll ein Kegelschnitt durch 5 Punkte gehen, so ist:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1\,,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0\,,$$

also:

$$Z = p = 1\,.$$

Kegelschnitte mit 4 festen Punkten und 1 festen Tangente gibt es 2. Hier ist aber

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1\,, \quad \alpha_5 = 0\,,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0\,, \quad \beta_5 = 1\,,$$

und also:

$$Z = q = 2\,.$$

Endlich gibt es vier Kegelschnitte durch 3 feste Punkte mit 2 festen Tangenten. Hier ist

---

*) Man kann übrigens diese Factoren auch direct aus dem Bildungsgesetze der Zahl Z ableiten.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1\,, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = 0\,,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0\,, \quad \beta_4 = \beta_5 = 1\,,$$

und also:
$$Z = r = 4\,.$$

Mit p, q, r müssen u, t, s wegen des dualistischen Charakters der Zahlen α_i, β_i identisch sein; wir haben daher:

$$s = 4\,, \quad t = 2\,, \quad u = 1\,,$$

und somit den Satz:

Die Zahl der Kegelschnitte, welche 5 Bedingungen $\Pi_i = 0$, bez. mit den Charakteristiken α_i, β_i genügen, ist gleich

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 2\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + 4\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 \\ &+ 4\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5 + 2\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\,.\end{aligned}$$

Wir können hiernach sofort die Zahl der Kegelschnitte angeben, welche durch eine gewisse Anzahl von Punkten gehen und eine gewisse Anzahl von Curven berühren sollen. *So gibt der angeführte Ausdruck die Zahl der Kegelschnitte, welche 5 Curven berühren,* wenn wir unter den α_i, β_i bez. Klasse und Ordnung dieser Curven verstehen; und zwar sind hierunter keine Doppellinien mehr enthalten. Es gibt also (für $\alpha_i = \beta_i = 2$) z. B. 3264 Kegelschnitte, welche 5 gegebene Kegelschnitte berühren. —

Nach Cremona kann man in ganz ähnlicher Weise, wie einfach unendliche Kegelschnittreihen durch die *zwei* Zahlen μ, ν, auch *zweifach unendliche Reihen* durch *drei* Zahlen charakterisiren; und so kann man weiter gehen zu drei- und vierfach unendlichen Systemen. Eine ∞^ϱ-Reihe bedarf dabei aber keiner besonderen Untersuchung mehr, sobald die $\infty^{5-\varrho}$-Reihe betrachtet ist: So haben wir die ∞^4-Reihe schon durch Vorstehendes erledigt. In der That, wenn wir mittelst (8) die Zahlen α, β durch r, s ausdrücken, so können wir das Chasles'sche Theorem allgemeiner folgendermassen aussprechen:

Wenn in einer einfach unendlichen Kegelschnittreihe (bestimmt durch 4 getrennte oder untrennbare Bedingungen) μ Curven durch einen beliebigen Punkt gehen, ν eine beliebige Gerade berühren, wenn ferner in einer davon unabhängigen vierfach unendlichen Reihe r Kegelschnitte durch vier beliebige Punkte gehen, s Kegelschnitte vier beliebige Gerade berühren; so gibt es)*

---

*) Für das vierfach unendliche System würde man zunächst 5 charakteristische Zahlen haben, nämlich:

$$r = (::)\,, \quad u = (.\dot{}.|)\,, \quad v = (:||)\,, \quad w = (.|||)\,, \quad s = (||||)\,.$$

Drei von ihnen kann man jedoch durch die beiden andern ausdrücken; man findet analog den Gleichungen (8):

$$u = 2\,\alpha + 4\,\beta = 2\,r\,, \quad w = 4\,\alpha + 2\,\beta = 2\,s\,, \quad v = 4\,\alpha + 4\,\beta = \tfrac{4}{3}\,(r + s)\,.$$

$$\tfrac{1}{3}(2s - r)\mu + \tfrac{1}{3}(2r - s)\nu \,.\quad \tfrac{1}{3}(2\mu - \nu)s + \tfrac{1}{3}(2\nu - \mu)r$$

Kegelschnitte, welche gleichzeitig beiden Curvenreihen angehören.

Für ein zweifach unendliches Kegelschnittsystem, das sich durch drei getrennte Bedingungen (3 B):

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0$$

bestimmt, ist nach unserem allgemeinen Satze (9) die Zahl der Curven, welche durch zwei Punkte gehen:

$$\varrho = (\cdot\,\cdot, 3B) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 2\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 4\,\beta_1\beta_3\beta_3\,,$$

die Zahl derjenigen, welche zwei Gerade berühren:

$$\tau = (||, 3B) = \beta_1\beta_2\beta_3 + 2\,\Sigma\beta_1\beta_2\alpha_3 + 4\,\Sigma\beta_1\alpha_2\alpha_3 + 4\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,,$$

die Zahl derjenigen, welche durch einen Punkt gehen und eine Gerade berühren:

$$\sigma = (\cdot|, 3B) = 2\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\,\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 2\,\beta_1\beta_2\beta_3\,.$$

Hieraus findet man aber die Zahl (9) wieder in der Form:

$$(10)\qquad (5B) = \alpha_1\alpha_5\,.\,\varrho + (\alpha_4\beta_5 + \beta_4\alpha_5)\,.\,\sigma + \beta_4\beta_5\,.\,\tau\,.$$

Diese Zahl setzt sich also linear aus ϱ, σ, τ zusammen. Dasselbe gilt aber auch, wenn das System durch 3 untrennbare Bedingungen definirt ist, sowie auch, wenn die beiden hinzutretenden Bedingungen untrennbare sind, wie jetzt gezeigt werden soll.*) Es sei eine zweifach unendliche Kegelschnittreihe mit den Charakteristiken ϱ, σ, τ gegeben und eine dreifach unendliche mit den Charakteristiken

$$r = (\cdot\,\cdot\,\cdot, 2B), \quad s = (:|, 2B), \quad t = (\cdot||, 2B), \quad u = (|||, 2B).$$

Wir fragen nach der Zahl der beiden Reihen gemeinsamen Curven.

Zunächst scheiden wir aus der ersten Reihe ein einfach unendliches System ab, indem wir die Curven betrachten, welche durch einen festen Punkt O gehen; also eine Reihe mit den Charakteristiken ϱ, σ. Von den Curven der letzteren wird ein fester Kegelschnitt K in vier beweglichen Punkten geschnitten. Durch je drei dieser Schnittpunkte können wir r Kegelschnitte der gegebenen ∞^3-Reihe legen. Es wird demnach in unserem ∞^1-Systeme eine endliche Zahl von Curven geben, für welche eine dieser zugehörigen Curven der ∞^3-Reihe auch noch den vierten Schnittpunkt enthält; und zwar ist die Zahl dieser durch O gehenden Kegelschnitte der ∞^1-Reihe nach dem obigen Chasles'schen Theoreme gleich

$$\mu = \alpha\varrho + \beta\sigma\,,$$

wo die Zahlen α, β nur von den das ∞^3-System definirenden Bedin-

---

*) Dies bemerkte Cremona: Comptes rendus, t. 59, p. 776. Einen von dem des Textes verschiedenen Beweis gab Halphen: a. a. O. p. 233.

gungen abhängen; und jedem dieser μ Kegelschnitte ist dann *eine* Curve der ∞^3-Reihe zugeordnet. Die Werthe der Zahlen α, β selbst haben wir nicht weiter nöthig. — Ferner ist durch eine beliebige feste Tangente aus der gegebenen ∞^2-Reihe eine ∞^1-Reihe mit den Charakteristiken σ, τ ausgeschieden; und in ihr muss es wieder nach dem Chasles'schen Theoreme

$$\nu = \alpha\sigma + \beta\tau$$

Kegelschnitte geben, welche den Kegelschnitt K in vier Punkten treffen, durch die auch eine Curve des ∞^3-Systems hindurchgeht.

Das Resultat dieser Ueberlegungen können wir auch in folgender Form aussprechen: Es gibt in der gegebenen zweifach unendlichen Kegelschnittreihe eine einfach unendliche Reihe mit den Charakteristiken μ, ν, deren Curven einen festen Kegelschnitt in vier Punkten treffen, durch welche noch eine Curve einer dreifach unendlichen Reihe hindurchgeht. Und dieser Reihe R_1 ist Curve für Curve durch unsere Construction eindeutig eine andere R_2 zugeordnet, welche in jener dreifach unendlichen Reihe enthalten ist. Wenn es uns nun gelingt, die Zahl der Curven in der einen Reihe zu bestimmen, welche mit den ihnen entsprechenden der andern zusammenfallen, so haben wir damit zugleich die gesuchte Zahl der Kegelschnitte gefunden, welche den beiden vorliegenden zwei- bez. dreifach unendlichen Systemen zugleich angehören. In R_1 wird es eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten geben, welche eine beliebige Gerade so schneiden, dass auch der entsprechende Kegelschnitt in R_2 durch einen dieser Schnittpunkte hindurchgeht; und zwar ist die Zahl dieser Curven wieder nach dem Chasles'schen Theoreme

$$= \gamma'\mu + \delta\nu\,,$$

wo die Zahlen γ', δ nur von der Reihe R_2, d. h. von der ∞^3-Reihe abhängen. Hierunter sind auch die 2μ Kegelschnitte enthalten, welche zu je μ durch die beiden Schnittpunkte der Geraden mit K hindurchgehen. Schreiben wir also γ für $\gamma' - 2$, so wird die Zahl der für uns brauchbaren Lösungen

$$= \gamma\mu + \delta\nu = a\varrho + b\sigma + c\tau\,.$$

Jeder dieser Kegelschnitte hat dann aber mit seinem entsprechenden 5 Punkte gemein, fällt also ganz mit ihm zusammen. Damit ist unser Satz bewiesen; denn die Zahl $\gamma\mu + \delta\nu$ ist linear in ϱ, σ, τ. Um endlich noch die Coëfficienten von ϱ, σ, τ in dem Ausdrucke $\gamma\mu + \delta\nu$ zu bestimmen, betrachten wir insbesondere die durch (. ˙ .), (:|), (.||), (|||) bestimmten ∞^2-Reihen. Für sie haben wir bez.:

$$\varrho = 1\,,\quad \sigma = 2\,,\quad \tau = 4\,,$$
$$\varrho = 2\,,\quad \sigma = 4\,,\quad \tau = 4\,,$$
$$\varrho = 4\,,\quad \sigma = 4\,,\quad \tau = 2\,,$$
$$\varrho = 4\,,\quad \sigma = 2\,,\quad \tau = 1\,;$$

und daher zur Bestimmung von a, b, c die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} r &= (\therefore\,,\ 2B) = a + 2b + 4c \\ s &= (:|\ ,\ 2B) = 2a + 4b + 4c \\ t &= (.||\,,\ 2B) = 4a + 4b + 2c \\ u &= (|||\ ,\ 2B) = 4a + 2b + c\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst der folgende Satz, den man mit Hülfe von (9) auch leicht für den Fall zweier getrennten Bedingungen verificirt:

Zwischen den Charakteristiken einer dreifach unendlichen Kegelschnittreihe besteht immer die Relation:

$$2\,(\therefore) - 3\,(:|) + 3\,(.||) - 2\,(|||) = 0\,. \tag{11}$$

Aus den aufgestellten Gleichungen ergeben sich unter Anwendung von (11) für a, b, c die Werthe:

$$4a = 2u - t\,,\quad 4c = 2r - s\,,$$
$$16b = 5s - 6r - 6u + 5t\,;$$

und somit haben wir folgenden Satz:

Die Zahl der gemeinsamen Curven einer durch drei getrennte oder untrennbare Bedingungen gegebenen Kegelschnittreihe mit den Charakteristiken ϱ, σ, τ und einer davon unabhängigen, durch zwei getrennte oder untrennbare Bedingungen gegebenen Kegelschnittreihe mit den Charakteristiken r, s, t, u ist gleich

$$\tfrac{1}{4}(2u - t)\,.\,\varrho + \tfrac{1}{16}(5s - 6r - 6u + 5t)\,.\,\sigma + \tfrac{1}{4}(2r - s)\,.\,\tau\,,$$

wo zwischen r, s, t, u die Gleichung besteht:

$$2\,(r - u) = 3\,(s - t)\,.$$

Dieser Satz gibt zusammen mit dem von Chasles die Mittel, um die Anzahl aller Kegelschnitte zu bestimmen, welche beliebig gegebenen Bedingungen genügen, sobald man die Zahl derjenigen kennt, welche ausserdem durch einzelne Punkte gehen und einzelne Gerade berühren. Diese Sätze reichen jedoch nicht aus, wenn alle 5 Bedingungen von einander untrennbar sind. Handelt es sich aber nur um die Zahl der Kegelschnitte, welche gegebene Curven ein- oder mehrfach berühren, so können wir auch diese Aufgaben mit Hülfe des später zu erweisenden „erweiterten Correspondenzprincips" von Cayley erledigen. Wir geben hier nur noch einige Beispiele:

Für die doppelte Bedingung der Osculation mit einer gegebenen

Curve der Ordnung n, der Klasse k, mit r Rückkehrpunkten, w Wendetangenten, werden wir später mit Hülfe jenes Correspondenzprincips folgende Zahlen finden:

$$r = \alpha, \quad s = 2\alpha, \quad t = 2\alpha, \quad u = \alpha,$$

wo $\alpha = 3k + r = 3n + w$ gesetzt ist: *Die Zahl der Kegelschnitte, welche eine Curve osculiren und ausserdem einer zweifach unendlichen Reihe mit den Charakteristiken ϱ, σ, τ angehören, ist gleich $\frac{1}{2}\alpha\sigma$.* Ist insbesondere das zweifach unendliche System bestimmt durch die Bedingung der dreipunktigen Berührung mit einer Curve, deren Singularitäten n', k', r', w', $\alpha' = 3k' + r' = 3n' + w'$ sind, so wird, wie später gezeigt werden soll,

$$\sigma = -8n' - 8k' + 6\alpha'.$$

Es gibt also $\alpha(3\alpha' - 4n' - 4k')$ Kegelschnitte, welch eine Curve n^{ter} Ordnung, k^{ter} Klasse, . . . zweipunktig und eine Curve n'^{ter} Ordnung, k'^{ter} Klasse, . . . dreipunktig berühren.

Die Zahlen der Kegelschnitte, welche gegebenen Berührungsbedingungen genügen, lassen sich aber nach den Untersuchungen Zeuthen's auch direct in mehr geometrischer Weise durch Untersuchung der Ausnahmskegelschnitte bestimmen.*) Wir müssen uns jedoch hier begnügen, auf diese Methoden ausdrücklich hinzuweisen.

Wenn wir uns nunmehr zu den entsprechenden Untersuchungen für *Curven beliebiger Ordnung* zurückwenden, so drängt sich zunächst die Frage auf, ob der Chasles'sche Satz über die Zahl $(\alpha\mu + \beta\nu)$ der Curven eines einfach unendlichen Systems auch hier gilt. Wir werden sehen, dass diese Frage im Allgemeinen zu verneinen ist, wenngleich der Satz in einzelnen Fällen, z. B. für alle Berührungsbedingungen, richtig bleibt.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel: es sei ein einfach unendliches System von Curven 3. Ordnung gegeben; und jede Curve desselben soll einen Rückkehrpunkt haben. Es mögen μ Curven durch einen beliebigen Punkt gehen, ν eine beliebige Gerade berühren. Ferner nehmen wir an, dass in dem Systeme α' Curven enthalten sind, die in eine doppelte und eine einfache Gerade zerfallen. Wir versuchen die den Gleichungen (1) entsprechenden aufzustellen. Auf einer beliebigen Geraden haben wir eine Correspondenz, vermöge deren jedem Punkte x 2μ Punkte y entsprechen: die 2μ weiteren Schnittpunkte der durch x gehenden Curven des Systems; und umgekehrt. Die 4μ Coincidenzpunkte dieser Correspondenz müssen nun

*) Zeuthen: Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit, Kiobenhavn 1865; oder in französischer Uebersetzung: Nouvelles annales, t. 6, 1866. Vgl. Salmon's higher plane curves, p. 446 ff. in Fiedler's Uebersetzung.

gebildet werden durch die ν Berührungspunkte und die Schnittpunkte der Doppellinien jener zerfallenden Curven mit der Geraden. Dazu kommen aber noch die auf der Geraden liegenden Spitzen von Curven des Systems, deren Zahl c sein wird, wenn c die Ordnung der von den Spitzen gebildeten Curve bedeutet; und zwar zeigt eine nähere (sogleich noch anzustellende) Ueberlegung, dass jede dieser Spitzen dreifach als Coincidenzpunkt unserer Correspondenz zu zählen ist, so dass man hat:

$$4\mu = \nu + 3c + \alpha', \tag{12}$$

und entsprechend, wenn c' die Klasse des Orts der Wendetangenten*), α die Zahl der in einen einfachen und einen Doppelpunkt ausartenden Curven bedeutet:

$$4\nu = \mu + 3c' + \alpha. \tag{13}$$

Man sieht, dass in diesen Gleichungen neben den auch bei Kegelschnitten auftretenden Zahlen μ, ν, α, α' (letztere für λ, π) noch die Zahlen c, c' zu berücksichtigen sind; ganz ebenso sind dann weiter die Zahlen für die Klasse der von den Rückkehrtangenten umhüllten Curve und für die Ordnung des Orts der Wendepunkte einzuführen; und noch mehr Zahlen treten bei Systemen von Curven höherer Ordnung auf. Ueber letztere nun hat Zeuthen begonnen, bis zu gewissem Grade allgemeine Betrachtungen anzustellen**); wir bezeichnen im Folgenden einige seiner Resultate.

Eine beliebige Curve des betrachteten einfach unendlichen Systems sei von der Ordnung n, und besitze d Doppel-, r Rückkehrpunkte; und durch obere Striche seien der Einfachheit halber die dualistisch entsprechenden Zahlen bezeichnet; also durch n' die Klasse, durch d' die Zahl der Doppeltangenten, durch r' die der Wendetangenten. Für unser Curvensystem werden dann nach Zeuthen zunächst die folgenden Zahlen besonders charakteristisch sein:

- μ die Zahl der Curven, welche durch einen beliebigen Punkt gehen,
- b die Ordnung des Orts der Doppelpunkte,
- c „ „ „ „ „ Rückkehrpunkte,
- p die Klasse der von den Tangentenpaaren in den Doppelpunkten umhüllten Curve,

*) Eine Curve dritter Ordnung mit Spitze hat immer einen Wendepunkt, ist also zu sich selbst dualistisch; vgl. p. 353.

**) Zeuthen: Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementaere Systemer af fjerde Orden. — Avec un résumé en français. Abhandlungen der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, Serie V, Bd. 10, 1873. — Vgl. auch einen Bericht im Bulletin des sciences mathématiques, t. 7, 1874, p. 97.

q die Klasse des Orts der Rückkehrtangenten,

u die Klasse der Curve, welche durch die $n' - 4$ von einem Doppelpunkte aus an die betreffende Curve des Systems zu legenden Tangenten umhüllt wird*),

v die Klasse der Enveloppe der in entsprechender Weise von einem Rückkehrpunkte ausgehenden Tangenten,

x die Klasse der Enveloppe der Verbindungslinien zweier Doppelpunkte,

y die Klasse der Enveloppe der Verbindungslinien eines Doppelpunktes mit einem Rückkehrpunkte,

z die Klasse der Enveloppe der Verbindungslinien zweier Rückkehrpunkte.

Insbesondere werden in unserm Systeme sogenannte *singuläre Curven* enthalten sein, d. h. solche, welche eine Singularität mehr besitzen, wie eine beliebige Curve des Systems; und zwar haben wir hier *zwei Klassen von singulären Curven* zu unterscheiden: Eine solche entsteht entweder durch Auftreten eines neuen Doppelpunktes, resp. Ausartung eines Doppelpunktes in einen Rückkehrpunkt, oder indem (in Folge der speciellen Natur der das System definirenden Bedingungen) sich ein mehrfach zählender Zweig (am einfachsten eine Gerade) von einer Curve des Systems absondert. Wir setzen nun voraus, dass keine andern Vorkommnisse der Art im Systeme eintreten, als diejenigen, welche in folgender Tabelle aufgeführt sind. Wir bezeichnen mit

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ die Zahl der Curven, bei denen ein neuer Doppelpunkt auftritt, wo

α_0 die Zahl der Curven bezeichnet, bei denen keiner der den Doppelpunkt bildenden Aeste eine Gerade ist,

α_1 die Zahl derjenigen, wo ein Ast eine Gerade ist,

α_2 die Zahl derjenigen, wo beide Aeste Gerade sind,

β die Zahl der Curven, bei denen ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt ausartet,

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ die Zahl derjenigen, bei denen ein Rückkehrpunkt in einen Selbstberührungspunkt übergegangen ist, wo bei

γ_0 Curven keiner der sich berührenden Aeste eine Gerade, bei

γ_1 Curven ein Ast eine Gerade ist,

$(2d)$ die Zahl der Curven, bei denen zwei Doppelpunkte zusammenfallen,

*) Die Zahl $n' - 4$ ergibt sich daraus, dass die erste Polare des Doppelpunktes in ihm beide Zweige der Grundcurve berührt, was 6 Schnittpunkte absorbirt, während für einen beliebigen Punkt der Ebene nur 2 Schnittpunkte in den Doppelpunkt fallen.

(dr) die Zahl derjenigen, bei denen ein Doppel- mit einem Rückkehrpunkte zusammenfällt,

$(2r)$ die Zahl derjenigen, wo zwei Rückkehrpunkte zusammenfallen,

$(3d)$ die Zahl derjenigen mit 3 zusammenfallenden Doppelpunkten (dreifacher Punkt),

$(2dr)$ die Zahl derjenigen, wo 2 Doppelpunkte und ein Rückkehrpunkt zusammenfallen,

$(d2r)$ die Zahl derjenigen, wo ein Doppelpunkt und 2 Rückkehrpunkte zusammenfallen.

Es mögen endlich dieselben Buchstaben, versehen mit oberen Strichen, die dualistisch entsprechenden Bedeutungen haben; insbesondere also bezeichne μ' (wie bisher ν) die Zahl der eine beliebige Gerade berührenden Curven. Die Curven $(2d)$, (dr), $(2r)$ haben aber eine sich selbst dualistische Singularität, d. h. es bestehen die Relationen:

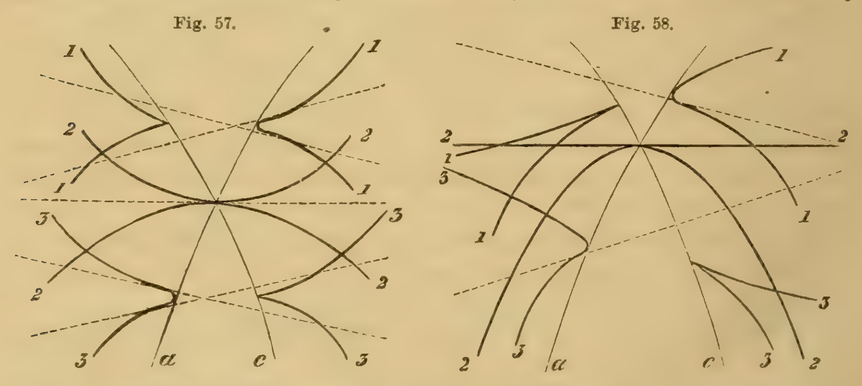
$$(2d) = (2d'), \quad (dr) = (d'r'), \quad (2r) = (2r').$$

Der Beweis hierfür kann durch eine Grenzbetrachtung erbracht werden, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Es ist ferner auch

$$\gamma_1 = \gamma_1',$$

wie man aus der sogleich mitzutheilenden Tabelle bestätigt.

Die verschiedenen hier anfgezählten singulären Curven findet man a. a. O. eingehend discutirt, besonders auch die Art, wie sie durch Grenzübergang aus den allgemeinen Curven des Systems entstehen. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einiger Beispiele. In Fig. 57 ist der Durchgang einer Curve des Systems durch eine Curve γ_0 dargestellt, während Fig. 58 das Entsprechende für eine Curve γ_1



gibt. In beiden Fällen vereinigt sich ein auf der Curve c^{ter} Ordnung fortschreitender Rückkehrpunkt mit einem benachbarten sehr scharf gewölbten Zweige der betreffenden Curve; und natürlich muss dies in einem Schnittpunkte des Orts der Spitzen mit der von den Systems-

curven eingehüllten Curve stattfinden. Es gibt jedoch keineswegs umgekehrt jeder dieser Schnittpunkte zu einer Curve γ Veranlassung. Ebenso stellen Fig. 59 und 60 bez. den Durchgang durch eine Curve β und durch eine Curve (dr) dar. Im ersten Falle geht der Doppel-

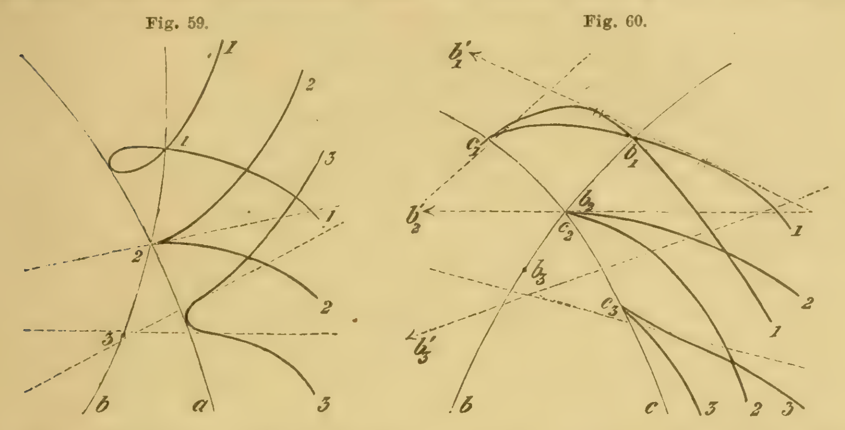


Fig. 59. Fig. 60.

punkt durch die Spitze in einen isolirten Punkt über; im andern entsteht durch Vereinigung eines Doppel- und eines Rückkehrpunktes eine Spitze zweiter Art. In den Figuren ist mit a immer die Umhüllungscurve aller Curven des Systems*) bezeichnet; es sind ferner die reellen durch Eintreten einer neuen Singularität absorbirten Doppel- und Wendetangenten angedeutet.**)

Für die singulären Curven α, β, γ stellen wir in folgender Tabelle die für das Folgende wichtigen Plücker'schen Zahlen zusammen, welche sich mittelst der Plücker'schen Formeln sofort aus ihren Definitionen ergeben. Es sei hier nur z. B. daran erinnert, dass nach Gleichung (8), p. 351 durch das Auftreten eines Doppelpunktes

$$2\left(n\,(n-1)-6\right)-4\,d-6r=2\,(n'-6)$$

Doppeltangenten absorbirt werden, dagegen nur 6 Wendetangenten. Bei den zerfallenden Curven α_1, α_2, γ_1 beziehen sich die angegebenen Zahlen nur auf die nach Absonderung der betreffenden Geraden übrig bleibenden „*Restcurven*". So ist α_1 von der Ordnung $n-1$ und hat $d-(n-2)$ Doppelpunkte; denn von den $(n-1)$ Schnittpunkten der sich ablösenden Geraden müssen $n-2$ aus den Doppelpunkten d

*) Ueber die Bestimmung der Plücker'schen Zahlen dieser Umhüllungscurve vgl. Zeuthen: Comptes rendus, t. 78, 1874, p. 274 und p. 339.

**) Man sieht so insbesondere, dass eine Spitze zweiter Art (p. 336) äquivalent ist mit einem Doppel-, einem Rückkehrpunkte, einer Doppel- und einer Wendetangente. Vgl. auch Salmon's higher plane curves, p. 56 in Fiedler's Uebersetzung. — Die Linie b_3' in Fig. 60 ist eine isolirte Doppeltangente der Curve 3.

entstanden sein, während einer als der neu hinzutretende Doppelpunkt zu zählen ist. Die so gewonnene Tabelle ist folgende:

	Ordnung	Klasse	Doppelpunkte	Spitzen	Doppeltangenten	Wendetangenten
α_0	n	$n' - 2$	$d + 1$	r	$d' - 2(n' - 6)$	$r' - 6$
α_1	$n - 1$	$n' - 2$	$d - (n - 2)$	r	$d' - 2(n' - 4)$	$r' - 3$
α_2	$n - 2$	$n' - 2$	$d - 2(n - 2)$	r	$d' - 2(n' - 2)$	r'
β	n	$n' - 1$	$d - 1$	$r + 1$	$d' - (n' - 4)$	$r' - 2$
γ_0	n	$n' - 1$	$d + 2$	$r - 1$	$d' - (n' - 5) + 2$	$r' - 4$
γ_1	$n - 1$	$n' - 1$	$d - (n - 3)$	$r - 1$	$d' - (n' - 3)$	$r' - 1$
α_0'	$n - 2$	n'	$d - 2(n - 6)$	$r - 6$	$d' + 1$	r'
α_1'	$n - 2$	$n' - 1$	$d - 2(n - 4)$	$r - 3$	$d' - (n' - 2)$	r'
α_2'	$n - 2$	$n' - 2$	$d - 2(n - 2)$	r	$d' - 2(n' - 2)$	r'
β'	$n - 1$	n'	$d - (n - 4)$	$r - 2$	$d' - 1$	$r' + 1$
γ_0'	$n - 1$	n'	$d - (n - 5) + 2$	$r - 4$	$d' + 2$	$r' - 1$
γ_1'	$n - 1$	$n' - 1$	$d - (n - 3)$	$r - 1$	$d' - (n' - 3)$	$r' - 1$

Mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincips können wir nun unter Berücksichtigung der so gefundenen Singularitäten der Restcurven eine Reihe von Relationen aufstellen, denen die von uns eingeführten Zahlen genügen, und welche für diese Theorien von hervorragender Bedeutung sind. Diese Zahlen sind also keineswegs von einander unabhängig.

Wir denken uns die Coëfficienten der Gleichung einer veränderlichen Curve als rationale Functionen zweier Parameter gegeben, zwischen denen eine Gleichung besteht (p. 390). Nun erlaubt eine lineare Gleichung in den Coëfficienten unserer Annahme nach zusammen mit der Gleichung zwischen den beiden Parametern μ Lösungen für letztere. Die Bedingung der Berührung mit einer festen Geraden G, welche vom Grade $2(n - 1)$ in den Coëfficienten ist (p. 279), wird daher $2(n - 1)\mu$ Lösungen erlauben. Die Liniencoordinatengleichung verschwindet aber — so können wir den Inhalt der Plücker'schen Formeln aussprechen — zweifach für jede durch einen Doppel-, dreifach für jede durch einen Rückkehrpunkt gehende Gerade. Die $2(n - 1)\mu$ Berührungspunkte der Geraden G mit Curven des Systems bestehen daher aus den μ' eigentlichen Berührungspunkten, den b Schnittpunkten mit dem Orte der Doppelpunkte (zweifach zählend) und den c Schnittpunkten mit dem Orte der Rückkehrpunkte (dreifach zählend). Dazu kommen endlich noch die α' Schnittpunkte mit den neuen Doppeltangenten der Curven α', denn jede solche Doppel-

tangente ist anzusehen als entstanden durch Vereinigung zweier benachbarten Curvenäste (vgl. p. 346). Wir haben somit als Verallgemeinerung der Gleichungen (12) und (13) die Gleichung:

$$2(n-1)\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha', \tag{14}$$

und dualistisch entsprechend:

$$2(n'-1)\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha.$$

Wir betrachten ferner die folgende Correspondenz zwischen Strahlen ξ und η durch einen beliebigen Punkt O. Auf einer Linie ξ liegen b Doppelpunkte von b verschiedenen Curven, an jede der letzteren kann man von O aus noch n' Tangenten η legen. Jedem ξ entsprechen also bn' Strahlen η, und jedem η offenbar $d\mu'$ Strahlen ξ. Die $\xi+\eta$ Coincidenzstrahlen sind andererseits durch die u bez. β durch O gehenden Tangenten der Curven u und β gegeben, sowie durch die p Tangenten der Curve p. Von letzteren zählt aber jede doppelt; denn eine Tangente im Doppelpunkte schneidet die Curve auf zwei verschiedene Weisen in zwei zusammenfallenden Punkten; einmal insofern ein weiterer Schnittpunkt der Linie durch den Doppelpunkt mit dem Punkte desselben Zweiges, das andere Mal, insofern er mit dem Punkte des andern Zweiges zusammenfällt. Wir haben daher:

$$n'b + d\mu' = 2p + u + \beta, \tag{15}$$

und in analoger Weise findet man:

$$n'c + r\mu' = 3q + v + \gamma: \tag{16}$$

Suchen wir ferner die Coincidenzen der Correspondenz $\xi = (d-1)b$, $\eta = (d-1)b$, welche durch die Verbindungslinien von O mit einem Doppelpunkte einer Curve und diejenigen mit den $d-1$ übrigen Doppelpunkten derselben Curve bestimmt wird, so haben wir die Paare von Doppelpunkten zu berücksichtigen, welche bei den Curven α' durch die neue Doppeltangente zufolge unserer Tabelle absorbirt werden, und zu beachten, dass jede durch O gehende Tangente der Curve x zweimal als Coincidenzstrahl zu zählen ist, einmal indem man von dem einen, einmal indem man von dem andern auf ihr liegenden Doppelpunkte ausgeht. Man findet so*):

*) Die im Texte gegebene Bestimmung der Zahlenfactoren wird man nicht in allen Fällen für absolut streng ansehen dürfen. — Zur genauen (auch analytisch verfolgbaren) Bestimmung der in die Gleichungen eingehenden Zahlenfactoren betrachet Zeuthen die zu den singulären Curven benachbarten Curven und wendet dann die folgende Regel an: *Wenn auf einer Geraden ein Punkt* ξ *und ein entsprechender Punkt* η *in einen Punkt* δ *zusammenfallen, und dabei, sobald die Strecke* $\delta\xi$ *unendlich klein wird, die Strecke* $\delta\eta$ *proportional zu* $(\delta\xi)^\varrho$ *wird, so ist der Punkt* δ *als Coincidenzpunkt der Correspondenz* ϱ*-fach zu zählen.* — Vgl. auch eine Mittheilung desselben im Bulletin des sciences math. t. 5, p. 186, sowie Halphen: Bulletin de la société mathématique de France, t. 1, p. 132.

(17) $$2(d-1)b = 2x + (2d) + 6(3d) + 3(2dr) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2';$$

und analog:

(18) $$2(r-1)c = 2z + (2r) + 3(d2r) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + \beta' + 12\gamma_0';$$

oder wenn man die durch O gehenden Strahlen betrachtet, auf welchen gleichzeitig ein Doppel- und ein Rückkehrpunkt liegt:

(19) $$rb + dc = y + (dr) + 2(2dr) + 3(d2r).$$

Wir fragen ferner nach der Zahl der Punkte auf einer Geraden, durch welche eine Curve geht, die ihre Tangente durch O schickt. Geht nun die Gerade durch O selbst, so liegen μ solche Punkte in O vereinigt, und μ' andere sind durch die Berührungspunkte der Geraden mit Curven des Systems gegeben. Wir haben also den Satz:

Der Ort der Berührungspunkte von Curven des Systems mit den Tangenten durch einen festen Punkt ist von der Ordnung $\mu + \mu'$ (mit μ-fachem Punkte in letzterem).

Durch Betrachtung der Schnittpunkte der betreffenden Ortscurven mit einer beliebigen durch O gezogenen Geraden findet man in ähnlicher Weise folgende Sätze:

Der Ort der $n-2$ Schnittpunkte einer Curve des Systems mit einer ihrer durch einen festen Punkt gehenden Tangenten ist von der Ordnung $(n'-2)\mu + (n-2)\mu'$.

Der Ort der $n-2$ Punkte, in denen die Verbindungslinie eines festen Punktes mit einem Doppelpunkte einer Curve des Systems diese Curve noch schneidet, ist von der Ordnung $d\mu + (n-2)b$.

Der Ort der $n-2$ Punkte, in denen die Verbindungslinie eines festen Punktes mit einem Rückkehrpunkte einer Curve des Systems diese Curve noch schneidet, ist von der Ordnung $r\mu + (n-2)c$.

Diese Sätze sollen uns zur Aufstellung weiterer Gleichungen dienen. Zwischen den Strahlen ξ und η, welche durch einen zweiten festen Punkt P gehen, ist in folgender Weise eine Correspondenz bestimmt. Auf jedem Strahle ξ liegen in Folge des ersten der eben ausgesprochenen Sätze $\mu + \mu'$ Punkte, durch welche je eine Systemscurve geht, die ihre Tangente in ihnen durch O schickt. Jede Tangente schneidet die betreffende Curve noch in $(n-2)$ Punkten, die wir mit P durch Linien η verbinden. Jedem ξ entsprechen so $(n-2) . (\mu + \mu')$ Strahlen η; und umgekehrt jedem η nach dem zweiten Satze $(n'-2)\mu + (n-2)\mu'$ Strahlen ξ. Unter den $\xi + \eta$ Coincidenzstrahlen ist aber die Linie OP, welche von μ' Systemscurven berührt wird, $(n-2)\mu'$-*fach* zu zählen. Es bleiben also $(n + n' - 4)\mu + (n-2)\mu'$ Strahlen, welche durch O gehen und eine Curve des Systems je in drei zusammenfallenden Punkten schneiden. Bestimmt man

diese Zahl andererseits aus den oben aufgestellten für das System charakteristischen Zahlen, so erhält man die Gleichung

(20) $$(n-2)\mu' + (n+n'-4)\mu = c' + p + 2q.$$

Analog findet man mit Hülfe des dritten Satzes für die Zahl der Linien, welche O mit einem Doppelpunkte einer Systemscurve verbinden und in ihm die Curve dreipunktig schneiden, indem die Linie OP hier $(n-2)b$-fach zählt:

(21) $$(n-2)b + d\mu = p + 3(3d) + 3(2dr) + 2(d2r) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2';$$

und analog:

(22) $$(n-2)c + r\mu = 2q + (2dr) + 4(d2r) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + 8\gamma_0';$$

für die Zahl der Geraden, welche durch O gehen, eine Systemscurve berühren und dieselbe noch einmal in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, indem die Vielfachheit der Linie OP hier gleich $(n-2) \cdot (n-3)\mu'$ zu nehmen ist:

(23) $$(n-3)[(n-2)\mu' + 2(n'-2)\mu] = 2b' + 2u + 3v + n'\alpha_0' + (n'-1)\alpha_1' + (n'-2)\alpha_2';$$

für die Zahl der Linien, welche O mit einem Doppelpunkte einer Systemscurve verbinden und letztere ausserdem noch in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden:

(24) $$(n-3)[(n-2)b + 2d\mu] = u + 4x + 3y + [d-2(n-6)]\alpha_0' + [d-2(n-4)]\alpha_1' + [d-2(n-2)]\alpha_2';$$

und analog:

(25) $$(n-3)[(n-2)c + 2r\mu] = v + 2y + 6z + (r-6)\alpha_0' + (r-3)\alpha_1' + r\alpha_2'.$$

Neben die so gefundenen 12 Gleichungen (14)—(25) stellen sich natürlich ebenso viele andere, die aus ihnen durch Vertauschung der gestrichenen und der nicht gestrichenen Buchstaben entstehen. Man kann diesen Gleichungen mit Hülfe des Correspondenzprincips leicht noch weitere hinzufügen; z. B. findet man für die Zahl der Doppelpunkte von Systemscurven, deren Tangenten eine feste Gerade in 2 zusammenfallenden Punkten treffen:

$$2p = 2b + \beta + 2(2d) + 3(dr) + (d2r).$$

Es zeigt sich jedoch, dass nur 23 der so gefundenen Gleichungen von einander unabhängig sind. *Man kann daher 23 der Zahlen* μ, μ', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_1, α_2, α_0', α_1' α_2', β, β', γ_0, γ_1, γ_0', $(2d)$, (dr), $(2r)$, $(3d)$, $(3d')$, $(2dr)$, $(2d'r')$, $(d2r)$, $(d'2r')$ *linear durch die 17 anderen ausdrücken.* Die 23 Gleichungen treten so gewissermassen für Curvensysteme höherer

Ordnung an die Stelle der Plücker'schen Formeln, welche für Systeme von Geraden bez. Punkten (an bez. auf einer Curve) gelten.

Die aufgestellten Gleichungen sind selbstverständlich nicht mehr anwendbar, wenn noch andere singuläre Curven, als die von uns genannten im Systeme auftreten, d. h. Curven mit mehrfach zählenden Aesten, insbesondere solche, von denen sich mehrfach zählende Gerade absondern. Für diese Vorkommnisse fehlt es jedoch an allgemeinen Untersuchungen; und die hier auftretenden Möglichkeiten sind auch verschieden je nach den Werthen der Zahlen n, d, r. Nur für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ sind diese Art Curven, vorausgesetzt, dass das System nur durch feste Punkte und Tangenten definirt ist (also für „Elementarsysteme"), eingehend untersucht; und in Folge dieser Untersuchung gelingt es dann die charakteristischen Zahlen *für die Elementarsysteme der Curven dritter und vierter Ordnung zu bestimmen.**) Die von uns betrachteten singulären Curven genügen jedoch immer, wenn die Curven des Systems gezwungen sind, durch mehr als $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ beliebige Punkte zu gehen oder mehr als $\frac{1}{2}(n'^2 - n' + 2)$ beliebige Gerade zu berühren. Sollte sich nämlich etwa eine doppelte Gerade absondern, so würde eine Restcurve der Ordnung $n - 2$ übrig bleiben; und diese ist schon durch $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ Punkte bestimmt. Man kann also in der That höchstens durch $\frac{1}{2}(n-2)(n+1) + 2 = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ feste Punkte eine Curve n^{ter} Ordnung legen, von der sich eine doppelte Gerade absondert. Insbesondere gilt dies für ein *System von Curven n^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte, das durch $\frac{1}{2}(n^2 - n + 4)$ feste Punkte und $2n - 3$ andere Bedingungen bestimmt ist. Man hat hier* $(n > 2)$**):

$$n' = n(n-1), \quad d' = \tfrac{1}{2} n (n-2)(n^2-9), \quad r' = 3n(n-2);$$
$$d = r = b = c = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$
$$(2d) = (dr) = (2r) = (3d) = (2dr) = (d2r) = 0,$$
$$p = q = u = v = x = y = z = 0;$$

und für die übrigen Zahlen findet man aus den Gleichungen (14)—(25):

$$\mu' = 2(n-1) \cdot \mu,$$
$$b' = 2n(n-2)(n-3) \cdot \mu, \quad c' = 3n(n-2) \cdot \mu, \quad \alpha = \alpha_0 = 3(n-1)^2 \cdot \mu,$$
$$p' = (n-3)(2n^2 + 5n - 6) \cdot \mu, \quad q' = 6(n-1) \cdot \mu,$$

*) Für Curven 3. Ordnung wurden diese Bestimmungen fast gleichzeitig gegeben von Zeuthen (Comptes rendus, t. 74; 19, 26 février et 11 mars 1872) und Maillard (auf anderem Wege: Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre. Thèse pour le doctorat (1870), publiée en décembre 1871); für Curven 4. Ordnung von Zeuthen: Comptes rendus, t. 75, p. 703 und 950; und in ang. dänischer Abhandlung.

**) Vgl. auch de Jonquières: Crelle's Journal, Bd. 66.

$u' = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)(5n^2+5n-6) \,.\, \mu\,,\quad v' = 3(n-3)(n^2+2n-2) \,.\, \mu\,,$
$x' = \frac{1}{2}(n-3)(2n^6-8n^5-16n^4+96n^3-40n^2-196n+90) \,.\, \mu\,,$
$y' = \frac{3}{2}(n-3)(n^5+3n^4-28n^3+20n^2+76n-40) \,.\, \mu$
$z' = 3(3n^4-12n^3+39n-20) \,.\, \mu\,,\quad (3d') = (n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2) \,.\, \mu\,,$
$(2d'r') = 3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4) \,.\, \mu\,,\quad (d'2r') = 6(n-3)(3n-2) \,.\, \mu\,.$

Unsere singulären Curven reichen aber auch aus für die Systeme von Curven dritter Ordnung mit singulärem Punkte ($n=3$; $d=1$, $r=0$ oder $d=0$, $r=1$) und von Curven vierter Ordnung mit drei singulären Punkten. Wir geben jedoch im Folgenden als Beispiel nur noch kurz die Untersuchung der Elementarsysteme für $n=3$, $d=0$, $r=1$ (also auch $n'=3$, $d'=0$, $r'=1$), wo man sich von der Richtigkeit dieser Behauptung auch leicht direct durch die geometrische Anschauung überzeugt. *Eine Curve dritter Ordnung und dritter Klasse* kann nur in einen Kegelschnitt und eine Tangente desselben, oder in eine Doppellinie und eine einfache Gerade, oder in eine dreifache Gerade, oder in drei durch einen Punkt gehende Gerade ausarten.*) Die letzten drei Ausartungen hängen aber, wenn man nur noch die auf ihnen möglichen Klassenscheitel in richtiger Weise mitzählt**), bez. von 5, 4, 4 Constanten ab; sie können daher in einem Systeme von Curven, welches 6 von einander unabhängigen Elementarbedingungen unterworfen ist, nicht vorkommen; und ein solches System haben wir zu untersuchen, denn eine allgemeine Curve dritter Ordnung ist von 9, also eine solche mit Rückkehrpunkt von 7 Constanten abhängig. Als einzige singuläre Curven bleiben daher diejenigen zu betrachten, welche aus einem Kegelschnitte und einer Tangente desselben bestehen, d. h. Curven $\gamma_1 = \gamma_1'$. Unsere Formeln (14) — (25) reduciren sich dann auf die folgenden:

$$2\gamma_1 = \mu + \mu'\,, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} 3c &= 4\mu - \mu'\,, \quad & 3c' &= 4\mu' - \mu\,, \\ 6q &= 7\mu - \mu'\,, \quad & 6q' &= 7\mu' - \mu\,. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Die Zahl γ_1 können wir nun in den einzelnen Elementarsystemen leicht direct bestimmen; und daraus lassen sich weiterhin in jedem Falle μ, μ' berechnen. — Wir beginnen mit dem System $(3p, 3l)$, dessen Curven durch 3 Punkte (p_1, p_2, p_3) gehen und 3 Gerade

*) Vgl. Ausführlicheres hierüber in dem betreffenden Abschnitte der unten folgenden Theorie der Curven 3. Ordnung.

**) Im ersten Falle nämlich zählt der Schnittpunkt der einfachen und zweifachen Geraden doppelt; auf letzterer kann daher noch ein Klassenscheitel liegen (vgl. die Anmk. p. 392); auf einer dreifachen Geraden dagegen können noch 3 Klassenscheitel beliebig vertheilt liegen.

(l_1, l_2, l_3) berühren. Dasselbe ist sich selbst dualistisch, wir haben also jedenfalls

$$(28) \qquad \mu = \mu' .$$

Als Curven γ_1 haben wir folgende Arten von je in eine C_2 und eine C_1 zerfallenden Curven zu berücksichtigen:

1) zwei C_2 durch p_1, p_2, p_3 und den Schnittpunkt von g_1, g_2, die g_3 berühren, zu einer C_3 ergänzt durch ihre Tangenten im Schnittpunkte von g_1, g_2;
2) vier C_2 durch p_1, p_2, p_3, die g_1 und g_2 berühren, jeder zu einer C_3 ergänzt durch je eine seiner Tangenten in seinen Schnittpunkten mit g_3;
3) zwei C_2, welche die Verbindungslinien von p_1 mit dem Schnittpunkte von g_1, g_2 in letzterem und ausserdem g_3 berühren und durch p_2, p_3 gehen; jeder ergänzt zu einer C_3 durch jene Verbindungslinie;
4) acht C_2, welche durch p_1, p_2 gehen, g_1, g_2 berühren und g_3 so schneiden, dass die Tangenten in den Schnittpunkten durch p_3 gehen*); jeder durch diese beiden zugehörigen Tangenten zu je einer C_3 ergänzt;
5) die dem Falle 3) dualistisch entsprechenden Curven;
6) „ „ „ 2) „ „ „ „ „
7) „ „ „ 1) „ „ „ „ „ .

Beachtet man in jedem dieser Fälle auch die aus ihm durch Vertauschung der Punkte p_1, p_2, p_3 oder der Geraden g_1, g_2, g_3 entstehenden, so erhält man schliesslich:

$$\gamma_1 = 3 \,.\, 2 + 3 \,.\, 4 \,.\, 2 + 3 \,.\, 3 \,.\, 2 + 3 \,.\, 3 \,.\, 8 + 3 \,.\, 3 \,.\, 2 + 3 \,.\, 4 \,.\, 2 + 3 \,.\, 2 = 168 .$$

Aus (26), (27) *und* (28) *ergibt sich also für das System* $(3p, 3l)$;

$$\mu = \mu' = 168 , \quad c = c' = 168 , \quad q = q' = 168 .$$

Für das System $(4p, 2l)$ folgt hieraus sofort $\mu' = 168$; und wir finden durch eine der obigen analoge geometrische Ueberlegung:

$$\gamma_1 = 1 + 2 \,.\, 2 \,.\, 2 + 4 + 4 \,.\, 2\,(4 + 2) + 4 \,.\, 4 \,.\, 2 + \frac{4 \,.\, 3}{2} \,.\, 2 \,.\, 2 + \frac{4 \,.\, 3}{2} \,.\, 4 = 141 .$$

Für das System $(4p, 2l)$ *haben wir also wegen* (26) *und* (27):

$$\mu = 114 , \quad \mu' = 168 , \quad c = 96 , \quad c' = 186 , \quad q = 105 , \quad q' = 177 .$$

---

*) Es gibt 8 solche Curven, da die Punkte p_1, p_2 und die Geraden g_1, g_2 ein C_2-System mit den Charakteristiken $\mu = \nu = 4$ bilden, und weil der Ort der Berührungspunkte der von p_3 an die C_2 des Systems gelegten Tangenten nach einem Satze auf p. 414 von der Ordnung $\mu + \nu$ ist.

Die Zahl μ des Systems $(4p,\ 2l)$ liefert sofort die Zahl μ' des Systems $(5p,\ l)$. Für γ_1 dagegen finden wir:

$$\gamma_1 = 2 + 5\,(1+2) + 5\,.\,2\,.\,2 + \frac{5\,.\,4}{2} + \frac{5\,.\,4}{2}\,.\,4 = 87\,.$$

Für das System $(5p,\ l)$ *haben wir also:*

$$\mu = 60\,,\quad \mu' = 114\,,\quad c = 42\,,\quad c' = 132\,,\quad q = 51\,,\quad q' = 123\,;$$

und endlich für das System $(6p)$:

$$\gamma_1 = 6\,.\,2 + \frac{6\,.\,5}{2}\,2 = 42\,,$$

$$\mu = 24\,,\ \mu' = 60\,,\quad c = 12\,,\quad c' = 72\,,\quad q = 18\,,\quad q' = 66\,.$$

Dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge gelten natürlich für die Systeme $(2p,\ 4l)$, $(p,\ 5l)$, $(6l)$. Hieraus findet man für die *Zahlen der Curven dritter Ordnung und dritter Klasse, welche durch gegebene Punkte gehen und gegebene Gerade berühren,* folgende Werthe:

$$(7p) = 24,\quad (6p,1l) = 60,\quad (5p,2l) = 114,\quad (4p,3l) = 168,$$
$$(3p,4l) = 168,\quad (2p,5l) = 114,\quad (1p,6l) = 60,\quad (7l) = 24.$$

Wenn wir nach diesen Betrachtungen unsere ursprüngliche Frage nach der Zahl der Curven eines einfach unendlichen Systems, welche einer hinzutretenden Bedingung genügen, allgemeiner zu erörtern versuchen, so zeigt sich, dass eine algebraisch erschöpfende Behandlung der Frage noch wesentliche Schwierigkeiten bietet. Wir bezeichnen daher nur einzelne Punkte, welche man besonders wird berücksichtigen müssen.

Wir denken uns das System algebraisch dargestellt; und zwar sehen wir, wie bei den Kegelschnitten (p. 390), die $\frac{1}{2}\,n\,(n+3)$ Coëfficienten der Curve als Variable an, für die uns $\frac{1}{2}\,n\,(n+3) - 1$ Bedingungen gegeben sind. Letztere können durch ebenso viele von einander unabhängige Gleichungen, oder durch ein System von mehreren untrennbaren Gleichungen dargestellt sein. Die Zahl μ definiren wir als die Zahl der Lösungen, welche jenes System von Gleichungen zusammen mit einer linearen Gleichung noch zulässt. Eine Gleichung q^{ten} Grades wird dann $q\mu$ Lösungen liefern. Aber unter letzteren können Curven enthalten sein, welche die Bedingung identisch befriedigen, d. h. dieselbe erfüllen, ohne von den die Bedingung etwa bestimmenden festen Curven oder Punkten abhängig zu sein, sondern allein wegen der Art, in welcher die Coëfficienten der veränderlichen Curve in die Bedingungsgleichung eingehen; und die Anzahl solcher Lösungen ist von der Zahl $q\mu$ abzuziehen. So kann es eintreten, dass es im Systeme einzelne Curven gibt, für welche zwei Invarianten A, B des Systems verschwinden, ohne dass eine dieser

Invarianten für eine beliebige Curve des Systems Null wäre*); und dann würden diese Curven auch jede Bedingung

$$A\Pi_1 + B\Pi_2 = 0$$

identisch erfüllen, wenn Π_1, Π_2 irgend welche andere Functionalinvarianten sind, die von den Coëfficienten der Systemscurven und beliebigen festen Elementen abhängen. Oder es kann im Systeme eine Zahl von Curven vorkommen, für die eine zugehörige Form $u_\alpha{}^\varrho$ identisch Null ist; dann werden diese Curven τ-fach zählend *jede* Bedingung erfüllen, welche die Coëfficienten $\alpha_{ikh\ldots}$ der verschwindenden Form zum τ^{ten} Grade enthält. Man erkennt hieraus, dass der Begriff der singulären Curven bei unserer algebraischen Auffassung folgendermassen allgemeiner als früher hingestellt werden kann: *Unter einer singulären Curve des Systems verstehen wir jede Curve desselben, welche eine Invarianteneigenschaft hat, die durch zwei oder mehr Gleichungen dargestellt wird, und die einer beliebigen Curve des Systems nicht zukommt.***) Und diese Festsetzung reicht aus, insofern man unter einer singulären Lösung eine jede versteht, welche einer gegebenen Bedingung genügt, ohne von den durch diese und die Bedingungen des Systems eingeführten constanten Elementen abzuhängen.

In der That erkennt man leicht, dass alsdann das Verschwinden simultaner Functionalinvarianten nicht berücksichtigt zu werden braucht. Sollte nämlich eine solche (deren Verschwinden zwei oder mehr Bedingungen äquivalent ist) Null werden, so kann dies *erstens* dadurch eintreten, dass sie für eine *jede* Curve des Systems Null ist; und dann würde eine hinzutretende Bedingung, welche die Coëfficienten dieser Functionalinvariante homogen enthält, nicht in der Weise von den Bedingungen des Systems unabhängig sein, wie wir es immer voraussetzen (vgl. p. 400). *Zweitens* kann es vorkommen, dass eine der das System definirenden Bedingungen durch *einzelne* Curven des Systems mehrfach erfüllt wird; wie an folgendem Beispiele sofort klar werden wird. Wenn alle Kegelschnitte $a_x{}^2 = 0$ einer ∞^1-Reihe einen festen Kegelschnitt $a_x'^2 = 0$ berühren sollen, so verschwindet die Tactinvariante (p. 298):

$$4\,(A_{111}A_{122} - A_{112}{}^2)\,(A_{112}A_{222} - A_{122}{}^2) - (A_{111}A_{222} - A_{112}A_{122})^2\,.$$

Dann wird eine bestimmte Zahl von Kegelschnitten der Reihe die

---

*) So verschwindet in einem Systeme von Curven 3. Ordnung mit Doppelpunkt für alle Curven die Invariante $S^3 - 6\,T^2$ (vgl. die 5. Abtheilung dieser Vorlesungen); und für die im Systeme enthaltenen Curven mit Rückkehrpunkt die Invarianten S, T einzeln.

**) Curven mit einer durch *eine* Gleichung darstellbaren Invarianteneigenschaft können selbstverständlich nicht als singuläre auftreten (vgl. p. 398).

feste Curve osculiren. Für diese verschwindet die Tactinvariante quadratisch, indem zugleich die 3 Relationen bestehen:

$$A_{111}A_{122} = A_{112}^2, \quad A_{112}A_{222} = A_{122}^2, \quad A_{111}A_{222} = A_{112}A_{122}.$$

Durch alle diese Curven wird eine hinzutretende Bedingung, welche durch das Verschwinden eines Ausdrucks von der Form

$$(A_{111}A_{122} - A_{112}^2)\Pi_1 + (A_{112}A_{222} - A_{122}^2)\Pi_2 + (A_{111}A_{222} - A_{112}A_{122})\Pi_3$$

darstellbar ist, identisch erfüllt. Es geschieht dies aber doch nur durch Beziehungen der Curven zu gegebenen festen Elementen, nicht durch eine Eigenschaft dieser Curven an und für sich: Solche Vorkommnisse wollen wir daher nicht als singuläre bezeichnen. In der That würde man, wie unser Beispiel lehrt, andernfalls schon für Kegelschnittsysteme nichts Allgemeines aussagen können.

Insbesondere folgt aus unserer Definition der singulären Curven, *dass in einem Systeme von Curven n^{ter} Ordnung jede Curve als singuläre auftreten kann.* Es wird dies recht deutlich an folgendem Beispiele. Eine jede Curve des Systems wird eine Anzahl absoluter Invarianten (vgl. p. 267) $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_r$ besitzen, die von Curve zu Curve verschiedene Werthe annehmen. Stellen wir die Forderung, dass eine von ihnen, etwa A_1 einen bestimmten Werth λ_1 habe, so ist dadurch (wenn nicht dieser Werth für *alle* Systemscurven derselbe ist) eine bestimmte Zahl von Curven festgelegt. Für eine jede von diesen haben dann aber auch die übrigen absoluten Invarianten bestimmte Werthe. Letztere mögen für eine der Curven folgende sein:

$$\mathsf{A}_1 = \lambda_1, \quad \mathsf{A}_2 = \lambda_2, \; \ldots \; \mathsf{A}_r = \lambda_r;$$

Dann ist diese Curve singulär in Bezug auf jede hinzutretende Bedingung von der Form:

$$(\mathsf{A}_1 - \lambda_1)\Pi_1 + (\mathsf{A}_2 - \lambda_2)\Pi_2 + \ldots + (\mathsf{A}_r - \lambda_r)\Pi_r = 0.$$

Ob eine Curve in Bezug auf eine hinzutretende Bedingung singulär ist, oder nicht, hängt hiernach wesentlich von der letzteren ab (ausserdem natürlich von den Bedingungen des Systems).

Inwiefern nun das Auftreten singulärer Curven durch die Natur der Bedingungen des Systems begründet werden kann, davon mag man sich für einzelne Fälle in folgender Weise eine Vorstellung bilden. Eine singuläre Curve sei durch das Verschwinden einer Functionalinvariante Π_s (oder eines Systems von solchen) charakterisirt. Das entsprechende System von Gleichungen möge $\frac{1}{2}n(n+3) - s$ einzelnen Bedingungen äquivalent sein, so dass es überhaupt s-fach unendlich viele C_n gibt, für welche Π_s Null ist. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden. *Erstens* können sämmtliche das System definirenden Bedingungen die Coëfficienten von Π_s enthalten. Dann wird ihnen zunächst durch die

ganze ∞^s-Reihe von C_n identisch genügt. Man wird aber nur solche Curven dieser Art als Curven des vorliegenden ∞^1-Systems auffassen, welche aus anderen Curven dieses Systems durch Grenzübergang abgeleitet werden können, wie schon bei den Kegelschnitten erörtert wurde (p. 399). *Zweitens* kann es vorkommen, dass nur eine Gruppe der $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Systemsbedingungen durch *jede* Curve der erwähnten ∞^s-Reihe identisch erfüllt wird. Dann erhalten wir eine endliche Anzahl der letzteren, welche gleichzeitig dem ∞^1-Systeme angehören, wenn jene Gruppe äquivalent mit $\frac{1}{2}n(n+3)-1-s$ Einzelbedingungen ist; denn dann wird durch die Gruppe der übrigen Systemsbedingungen, äquivalent mit s Einzelbedingungen, eine endliche Zahl von Curven bestimmt, für welche die Functionalinvariante Π_s verschwindet. Dies sind dann singuläre Curven unseres ∞^1-Systems in Bezug auf jede hinzutretende Bedingung, welche homogen in den Coëfficienten von Π_s ist.

Für eine bestimmte hinzutretende Bedingung ist nun die Zahl der verschiedenen Arten von singulären Curven eine endliche, denn dieselbe kann nur von den Coëfficienten einer endlichen Anzahl von Functionalinvarianten*) abhängen. Nehmen wir an, sie sei vom Grade τ_i in den Coëfficienten einer Functionalinvariante Π_i, die Coëfficienten der letzteren seien vom Grade σ_i in den Coëfficienten a der Gleichung der veränderlichen Curve n^{ter} Ordnung des Systems, und in der Bedingungsgleichung seien die Coëfficienten a noch zum α^{ten} Grade enthalten, ohne sich zu Coëfficienten einer Functionalinvariante der C_n zusammenziehen zu lassen; so wird der Gesammtgrad q der Bedingungsgleichung gegeben durch

$$q = \alpha + \sum_i \sigma_i \tau_i .$$

Seien ferner λ_i Curven vorhanden, für welche Π_i identisch Null ist**), so ist, wenn μ Systemscurven durch einen beliebigen Punkt gehen, *die Zahl der Systemscurven, welche die gestellte Bedingung nicht identisch erfüllen****):*

$$= q\mu - \Sigma \lambda_i \tau_i = \alpha\mu + \sum_i (\sigma_i \mu - \lambda_i)\, \tau_i ,$$

die Summe ausgedehnt über die Indices aller Functionalinvarianten

*) Ob jedoch zu der C_n überhaupt ein endliches System von Functionalinvarianten existirt, durch die sich alle anderen ganz und rational ausdrücken (p. 211), kommt hier zunächst nicht in Betracht.

**) Dabei ist jede r-fach zählende Curve der Art für r verschiedene Curven gezählt.

***) Bei dieser Betrachtung verfahren wir unsymmetrisch, indem wir die Systemscurven nur als Punktgebilde auffassen. Es wird sich diese Unsymmetrie, wie oben bei den Kegelschnittsystemen, im Resultate vermöge der zwischen den Zahlen μ, τ_i und den zu ihnen dualistischen bestehenden Relationen beseitigen.

Π_i, deren Coëfficienten in der gestellten Bedingung vorkommen. Es hängen hier, analog den Verhältnissen bei Kegelschnittsystemen, die Zahlen α, σ_i, τ_i nur von der gestellten Bedingung, die Zahlen μ, λ_i nur von dem gegebenen Systeme ab. Man wird aber nicht behaupten dürfen, dass es für *jedes* Curvensystem eine bestimmte Anzahl von solchen Zahlen λ_i gibt. Dies erhellt schon aus dem oben über die absoluten Invarianten Gesagten; allgemeiner aus folgender Ueberlegung. Es sei eine singuläre Curve des Systems durch das Verschwinden einer Reihe von Functionen Π_i bezeichnet. Zwischen den Π_i und anderen Functionen P_i können dann (eventuell in Folge der gegebenen Bedingungen des Systems) solche Relationen bestehen, dass gleichzeitig mit den Π_i immer die P_i verschwinden, ohne dass sich doch die P_i direct rational und ganz durch die Π_i ausdrücken liessen. Es tritt dies z. B. ein, wenn

$$P_i^{\alpha} = \Sigma A_i \Phi_i^{\beta_i} + \Sigma B_i \Pi_i^{\gamma_i},$$

wo die Φ_i in Folge der Bedingungen des Systems verschwinden mögen. Durch die betrachtete singuläre Curve ist dann jede hinzutretende, die Coëfficienten von P_i enthaltende Bedingung identisch erfüllt, ohne dass letztere die Coëfficienten der Π_i selbst enthielte. Es würde also edenfalls nicht ausreichen, wenn man etwa bei Bestimmung der Zahlen λ_i für ein gegebenes System nur *die* Functionalinvarianten berücksichtigen wollte, deren Coëfficienten homogen in den Bedingungen des Systems vorkommen. —

Diese Erörterungen werden hinreichen, um die Schwierigkeiten zu kennzeichnen, auf welche eine allgemeine algebraische Behandlung der Charakteristikentheorie zunächst stossen wird. Wir erwähnen hier nur noch ein Beispiel, um zu zeigen, wie unter den Zahlen λ_i insbesondere diejenigen enthalten sein können, welche sich auf die singulären Curven, genommen in unserm früheren Sinne (p. 409) beziehen:

Es soll die Zahl der Curven gefunden werden, welche eine gegebene Gerade so schneiden, dass durch einen der Schnittpunkte noch eine der Doppelpunktstangenten derselben Curve hindurchgeht, oder mit andern Worten: *Es soll die Ordnung des Ortes der Punkte bestimmt werden, in denen eine Curve des Systems von den Tangenten in ihren Doppelpunkten noch geschnitten wird.* Auf der Geraden haben wir hier eine Correspondenz, vermöge deren jedem Punkte ξ die $2\mu d$ Schnittpunkte η der Doppelpunktstangenten der μ durch ξ gehenden Curven entsprechen, während jedem Punkte η umgekehrt np Punkte ξ zugehören. Unter den $\xi + \eta$ Coincidenzpunkten sind aber eine Reihe von uneigentlichen Lösungen unserer Aufgabe

mitgezählt, wie man leicht übersieht. Zieht man letztere ab, so erhält man für die gesuchte Zahl den Werth*):

$$np + 2d\mu - \{6b + (n-2)\alpha_1 + 2(n-2)\,\alpha_2 + 2(n-6)\alpha_0' + 2(n-4)\alpha_1' + 2\,(n-2)\,\alpha_2' + 2\,(n-4)\,\beta' + 3\,(n-5)\,\gamma_0' + 3\,(n-3)\,\gamma_1\}\,.$$

Derselbe setzt sich also in der That aus unsern obigen Zahlen (p. 409) linear zusammen.

Aus dem Vorstehenden erhellt sofort, weshalb der Chasles'sche Satz nur für Kegelschnitte gilt: Eine solche Curve kann eben nur eine, mit zwei Bedingungen äquivalente Invarianteneigenschaft haben, nämlich die, dass die linke Seite der Liniencoordinatengleichung, die Form $F = (abu)^2$, identisch werschwindet, d. h. dass der Kegelschnitt in eine Doppellinie ausartet (bez. in einen Doppelpunkt, wenn man von der Linienauffassung ausgeht). In Folge dessen haben wir nur zwei Zahlen μ und λ, oder — wegen der Gleichungen (1) — μ und ν zu berücksichtigen. Andererseits erkennt man aber, dass der Chasles'sche Satz auch allgemein gilt, sobald die hinzutretende Bedingung die der Berührung mit einer festen Curve (C_m), sagen wir der m^{ten} Ordnung und k^{ten} Klasse, ist. Eine solche Bedingung nämlich wird offenbar identisch (d. h. unabhängig von der zu berührenden festen Curve) erfüllt durch jede Curve des Systems, welche einen doppelt zählenden Ast enthält, und zweifach durch jede, welche auf der C_m einen Doppelpunkt, dreifach durch jede, welche auf ihr einen Rückkehrpunkt hat.**) Dies geschieht aber auch durch keine anderen Curven des Systems, als durch solche mit den eben genannten Singularitäten (oder höheren der Art); denn keine andere Systemscurve schneidet jede beliebige feste Curve in zwei zusammenfallenden Punkten. Nun ist aber für die hinzutretende Tactinvariante $q = 2m\,(n-1) + k$; denn dieselbe ist vom Grade m in den Coëfficienten der Liniengleichung, vom Grade k in denen der Punktgleichung der beweglichen Systemscurve, wie durch Verallgemeinerung unserer obigen Betrachtung bei Kegelschnitten leicht zu beweisen ist (vgl. p. 401). Die Zahl der die C_m eigentlich berührenden Curven ist daher:

$$= (2m\,(n-1) + kn)\,\mu - (2b + 3c + \alpha')\,m\,,$$

oder nach Gleichung (14):

$$= k\mu + m\mu'\,.$$

*) Vgl. Zeuthen, a. a. O.

**) Dies folgt direct aus den Plücker'schen Formeln. Die C_m nämlich kann in der Nähe eines solchen Punktes durch ihre Tangente ersetzt werden; für eine Gerade aber gelten obige Sätze nach jenen Formeln.

Wir haben daher den folgenden, auch schon von Chasles ausgesprochenen Satz*):

*In einem Systeme von Curven, von denen μ durch einen beliebigen Punkt gehen, μ' eine beliebige Gerade berühren, gibt es $k\mu + m\mu'$ Curven, welche eine beliebige feste Curve m^{ter} Ordnung und k^{ter} Klasse berühren.***) —

Wir machen schliesslich noch einmal auf die bei unsern Untersuchungen befolgte Methode aufmerksam: wir erlangten die meisten einzelnen Resultate durch Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips. Dasselbe müsste aber auch auf rein algebraischem Wege zu erreichen sein; beruht doch jenes Correspondenzprincip auch nur auf einer algebraischen Thatsache (vgl. p. 210). Der Vortheil, den dagegen die Anwendung dieses Princips gewährt, ist, dass man bei der Betrachtung einer Frage alle ihr fremden Verhältnisse durch die Anlage der Abzählung ausschliesst, und so die Zahl der Lösungen ganz direct findet, während bei der algebraischen Behandlung, welche nicht nur den Grad der Schlussgleichung, sondern diese selbst verlangt, verschiedene Schwierigkeiten (z. B. die Ausscheidung überflüssiger Factoren) zu beseitigen sein werden. Umgekehrt wird man die durch das Correspondenzprincip gewonnenen Resultate für die algebraische Behandlung verwerthen können, insofern dann der Grad der zur Lösung dienenden Endgleichung, sowie die Vertheilung der verschiedenen Arten von Lösungen von vornherein bekannt sind. In diesem Sinne muss man die doch wesentlich auf dem Correspondenzprincipe beruhende Theorie der Charakteristiken als einen wichtigen Beitrag für die algebraische Behandlung der entsprechenden Eliminationsprobleme auffassen.

VII. Die Geometrie auf einer algebraischen Curve.

Wir haben schon verschiedentlich darauf hingewiesen, dass von den Schnittpunkten zweier Curven, insbesondere von den Grundpunkten eines Curvenbüschels nicht alle willkürlich gewählt werden können, dass vielmehr immer eine gewisse Zahl durch die übrigen bestimmt ist.

Es sollen nun zunächst diese Verhältnisse genauer untersucht werden. Eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung $f = 0$ wird von einer

---

*) Vgl. Chasles: Comptes rendus, 15. février 1864. Einen Beweis gab Zeuthen: Math. Annalen, Bd. 3, p. 153.

**) Man sieht sofort, dass der Satz auch gilt, wenn im Systeme ausser den Curven α' noch andere mit mehrfach zählenden Zweigen vorkommen; denn durch letztere Curven wird die Zahl $q\mu$ immer entsprechend beeinflusst, wie die Gleichung (14).

Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ in mn Punkten geschnitten, von denen wir zunächst annehmen, dass sie nicht in Doppel- oder Rückkehrpunkte von $f = 0$ fallen. Ist $m < n$, so sind $\frac{m(m+3)}{2}$ Schnittpunkte als gegeben erforderlich; durch diese ist die Curve $\varphi = 0$ vollkommen bestimmt, mithin auch ihre übrigen Schnittpunkte mit $f = 0$. Ist hingegen $m > n$, so kann man, wenn es sich nur um die Schnittpunkte beider Curven, nicht um die schneidende Curve φ selbst handelt, an Stelle der Gleichung $\varphi = 0$ die Gleichung

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0$$

setzen, wo μ ein Ausdruck $(m - n)^{ter}$ Ordnung ist. Die vollkommen willkürlichen

$$\tfrac{1}{2}(m - n + 1)(m - n + 2)$$

Coëfficienten von μ dürfen nun besonders so gewählt werden, dass ebensoviele Coëfficienten der Function φ' verschwinden. Man kann also, ohne das Schnittpunktsystem zu ändern, statt einer allgemeinen Curve $\varphi = 0$, eine specielle Curve:

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0$$

setzen, welche nur noch von

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Constanten abhängt. Diese reducirte Curve ist dann durch $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte bestimmt; sind also so viele Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi' = 0$ gegeben, so sind die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dadurch festgelegt; und dasselbe gilt natürlich für die Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$, da dies dieselben Punkte sind.

Die beiden Zahlen

$$mn - \frac{m(m+3)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

welche bez. für $m < n$ und $m > n$ angeben, wie viel Schnittpunkte des Systems durch die übrigen gegeben werden, stimmen überein für $m = n - 1$ und $m = n - 2$. Für $m > n - 3$ kann man also immer die Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gelten lassen, welche — und das ist das Wichtige — von m ganz unabhängig ist.*) Für kleinere Werthe von

*) Auf diesen Umstand bei Curven gleicher Ordnung wies zuerst Euler hin (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1748; Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes); derselbe wurde ausführlich erörtert von Cramer (Introduction à l'analyse etc., 1750, p. 78), und von Plücker: Gergonne's Annalen, Bd. 19. Die Erweiterung des Satzes gaben gleichzeitig Jacobi (De relationibus etc., Crelle's Journal, Bd. 15) und Plücker (ib. Bd. 16); eine noch weiter gehende Verallgemeinerung des Satzes findet man in Plücker's

m aber ist die Zahl der Punkte, welche durch die übrigen gegeben sind, eine geringere.

Diese Betrachtungen verlangen eine leichte Modification, wenn φ durch einige Doppel- oder Rückkehrpunkte von f geht. Diese Punkte nämlich müssen als Bestimmungsstücke von φ einfach, dagegen als Schnittpunkte von φ mit f doppelt gezählt werden. Die Anzahl der durch die übrigen bestimmten Schnittpunkte wird dadurch um die Zahl (δ) derjenigen Punkte vermindert, welche in diese Ausnahmepunkte hineinfallen und daher von vornherein bekannt sind. Man hat also den Satz:

Von den Schnittpunkten einer gegebenen Curve n^{ter} Ordnung $f=0$ mit einer Curve m^{ter} Ordnung, welche durch δ Ausnahmepunkte von $f=0$ gehen soll, ohne in diesen selbst mehrfache Punkte zu haben, sind

1) *wenn* $m \geqq n-2$, $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$ *durch die übrigen bestimmt;*

2) *wenn* $m < n-2$, $mn - \frac{m(m+3)}{2} - \delta$ *durch die übrigen bestimmt.*

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die nicht in singulären Punkten der Grundcurve liegenden Schnittpunkte einander beliebig gruppenweise unendlich nahe rücken können, ohne dass dadurch die Gültigkeit unseres Satzes beeinflusst wird. Derselbe erleidet jedoch eine Ausnahme, wenn die willkürlich zu wählenden Punkte in gewisser Weise von einander abhängig sind. Zerfällt z. B. die Curve $\varphi = 0$ in mehrere Curven niedrigerer Ordnung, so zerfällt auch das ganze Schnittpunktsystem in mehrere, und in jedem dieser Schnittpunktsysteme dürfen sich nur so viel Punkte unter den gegebenen befinden, als für eine solche Curve niedrigerer Ordnung hinreichen, vermittelst unseres Theorems die übrigen zu bestimmen. Schneiden wir z. B. eine Curve 4. Ordnung ohne Doppelpunkte ($\delta = 0$) mit einer Curve dritter Ordnung, welche in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt, so dürfen von ersterer nur 2 Punkte, von letzterem 5 Punkte, im Ganzen also nur 7 Punkte willkürlich auf der C_4 gewählt werden, während in dem Schnittpunktsysteme einer beliebigen C_3 mit der C_4 9 $(= 3n - \frac{1}{2}(n-1)(n-2))$ Punkte beliebig auf der C_4 angenommen werden dürfen. Es kann andererseits eintreten, dass bei nicht zerfallenden Schnittpunktsystemen die $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta$ gegebenen Punkte (für $m > n-2$) noch nicht ausreichen, um die übrigen zu bestimmen: Man wird sich geradezu die Aufgabe stellen können, zu $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta - r$ gegebenen Punkten

---

Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839, p. 11. — Für die Darstellung des Textes vgl. Clebsch und Gordan: Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, p. 34.

r weitere so zu bestimmen, dass sie mit jenen die übrigen $\frac{1}{2}(n-1)$ $.(n-2)-\delta$ Schnittpunkte einer durch δ Ausnahmepunkte von $f=0$ gehenden Curve m^{ter} Ordnung nicht bestimmen. Und in der That wird das entsprechende Problem für $m=n-3$ später für uns noch von besonderer Wichtigkeit werden. Genauer sprechen wir den angeführten Satz daher in der Form aus, dass *höchstens* $\frac{1}{2}(n-1)$ $(n-2)-\delta$, *bez.* $mn-\frac{1}{2}m(m+3)-\delta$ *Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind, wenn keine anderen Bedingungen hinzutreten.*

Dieser Satz gehört wegen seiner zahlreichen Anwendungen zu den wichtigsten in der Theorie der algebraischen Curven; besonders für das zunächst Folgende bildet er im Wesentlichen die Grundlage.*) Wir bemerken zunächst, dass für $m=n$ von den m^2 Grundpunkten eines Büschels in der That $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ durch die übrigen bestimmt, also nur $\frac{1}{2}m(m+3)$ willkürlich sind (vgl. p. 373). Ferner gibt das Theorem, angewandt auf Curven dritter Ordnung einen äusserst einfachen Beweis für den Pascal'schen Satz, den wir nicht unerwähnt lassen wollen.**) Für $m=n=3$ lautet dasselbe:

Alle Curven dritter Ordnung, welche 8 Punkte gemein haben, gehen auch durch einen neunten Punkt.

Es seien nun die sechs auf einem Kegelschnitte liegenden Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in der Weise zu Paaren vereinigt, dass wir die in dem Schema (vgl. p. 50):

$$\begin{array}{ccc} \overline{12} & \overline{45} & \text{I} \\ \overline{23} & \overline{56} & \text{II} \\ \overline{34} & \overline{61} & \text{III} \end{array}$$

neben einander stehenden Linien als gegenüberliegende Seiten des Sechsecks auffassen. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von je zweien derselben bez. mit I, II, III; so können wir die ganze Figur aus drei zerfallenden Curven 3. Ordnung mit 8 gemeinsamen Punkten zusammengesetzt denken; dieselben sind:

1) der Kegelschnitt und die Linie $\overline{\text{I II}}$,

2) die 3 Linien $\overline{12}$, $\overline{56}$, $\overline{34}$,

3) die 3 Linien $\overline{45}$, $\overline{23}$, $\overline{61}$.

Jede dieser Curven geht durch die 8 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, I, II;

---

*) Aus ihm lassen sich eine Reihe weiterer Sätze über Schnittpunktsysteme ableiten, auf die wir nicht eingehen; vgl. Cayley: Cambridge and Dublin mathematical journal, vol. III, p. 211, und die angeführten Werke von Cremona und Salmon.

**) Vgl. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1, 1828, p. 267.

folglich geht durch den 9ten Schnittpunkt III zweier von ihnen auch die dritte, und damit ist der Pascal'sche Satz bewiesen.*)

Der uns beschäftigende Satz bildet nun zusammen mit dem später zu begründenden „erweiterten Correspondenzprincipe" die Grundlage für die *Geometrie auf einer algebraischen Curve*, d. h. er erlaubt uns in ähnlicher Weise eine Theorie der auf einer solchen gelegenen Punktgruppen herzustellen, wie wir dieselbe auf der geraden Linie bereits kennen gelernt haben (Theorie der binären algebraischen Formen). Bei den hierauf bezüglichen Untersuchungen wird uns zuerst die fundamentale Bedeutung des *Geschlechtes* (p. 351)

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r$$

einer Curve n^{ter} Ordnung ihrem vollen Umfange nach entgegen treten: Es zeigen sich die wesentlichsten Eigenschaften der Punktsysteme auf einer Curve geradezu allein von der Zahl p, nicht von Ordnung oder Klasse der Curve abhängig, so dass wir weiterhin genöthigt sind, die Curven je nach ihrem Geschlechte näher zu untersuchen, sie nach demselben in wesentlich verschiedene Klassen zu theilen. Es steht dies in genauem Zusammenhange mit der Theorie der Abel'schen Integrale und der eindeutigen Transformationen: erst an der Hand dieser Theorien werden wir einen vollständigen Ueberblick über die Geometrie auf einer Curve gewinnen können. Besonders auf Grund der Arbeiten von Brill und Nöther sind wir jedoch in der Lage, schon jetzt eine Reihe von Problemen rein algebraisch zu erledigen.**)

Wir beschränken uns dabei auf Betrachtung der Punktsysteme, welche auf einer gegebenen festen Curve durch sogenannte adjungirte Curven ausgeschnitten werden; eine Beschränkung, welche sogleich noch näher begründet werden wird. *Unter einer „adjungirten Curve" verstehen wir eine solche, die durch sämmtliche Doppel- und Rückkehrpunkte der festen Grundcurve einmal hindurchgeht*, oder allgemeiner, die durch jeden *i-fachen* Punkt derselben $(i-1)$-fach hindurchgeht, ohne dass sich dabei einzelne Zweige beider Curven berühren. Ferner setzen wir voraus, dass die gegebene Curve n^{ter} Ordnung (C_n) in jedem i-fachen Punkte lauter getrennte Tangenten besitzt.***) Alsdann können wir jeden i-fachen Punkt durch $\frac{1}{2}i(i-1)$

---

*) Man überzeugt sich leicht, dass die oben hervorgehobene Einschränkung des Satzes für zerfallende Schnittpunktsysteme in diesem Falle ohne Einfluss bleibt.

**) Vgl. für das Folgende Brill und Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie: Göttinger Nachrichten, Februar 1873 und Math. Annalen, Bd. VII. p. 269.

***) Ueber die Berücksichtigung von vielfachen Punkten mit theilweise zusammenfallenden Aesten vgl. den Abschnitt über eindeutige Transformation in der 6. Abtheilung, sowie den Schluss dieser 4. Abtheilung.

Doppelpunkte ersetzt denken (vgl. p. 329), und dem entsprechend setzen wir das Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_i \alpha_i \frac{i(i-1)}{2},$$

wenn die Curve C_n α_2 Doppel-, α_3 dreifache, ... α_i i-fache Punkte besitzt. Für das Schnittpunktsystem einer adjungirten Curve haben wir in den Formeln unseres Fundamentaltheorems $\delta = \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1)$ zu setzen; und wir können dasselbe dann folgendermassen aussprechen, wie man leicht erkennt, da in einem i-fachen Punkte immer $i\,(i-1)$ Schnittpunkte mit der adjungirten Curve zusammenfallen:

Von den nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkten einer adjungirten Curve m^{ter} *Ordnung mit der gegebenen* C_n *sind*

1) *für* $m > n-3$: *höchstens* p *durch die übrigen* $nm - \Sigma\alpha_i . i(i-1) - p = n\alpha + p - 2$ $(\alpha = m - (n-3))$ *Schnittpunkte bestimmt**);
2) *für* $m = n - 2 - r$: *höchstens* $p - 1 - \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$ *durch die übrigen* $\frac{1}{2} m\,(m+3) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i . i\,(i-1)$ *bestimmt.*

Wenn wir uns nun zu Betrachtungen von Systemen von adjungirten Curven wenden, oder vielmehr zur Betrachtung der von solchen Systemen auf der C_n ausgeschnittenen Punktgruppen, wollen wir die letzteren durch folgende Elemente als charakterisirt ansehen:

1) Die Zahl (Q) der in jeder Gruppe der „*Schaar*" befindlichen Punkte, d. h. die Zahl der *beweglichen* Schnittpunkte einer adjungirten Curve des betrachteten Systems (letztere kann nämlich auch ausserhalb der singulären Punkte von f eine Anzahl *feste* Schnittpunkte mit der C_n gemein haben).
2) Die *Mannigfaltigkeit der Schaar*, d. h. die Zahl (q) der willkürlichen Parameter, von denen die Coëfficienten einer Curve des Systems abhängen.
3) Der *Grad der Schaar*, d. h. die Dimension, bez. die Form, in welcher diese q Parameter in die Gleichung der Curve eingehen. Dieselben sollen im Folgenden immer rational vorkommend vorausgesetzt werden.

Einige Beispiele mögen diese Unterscheidungsmerkmale näher erläutern. Die C_n sei eine Curve 3ter Ordnung ohne singulären Punkt; alsdann bilden die sämmtlichen Geraden der Ebene ein 2-fach unendliches ($q = 2$) System (∞^2) von adjungirten Curven, das von zwei Parametern linear abhängt; die von ihnen auf der C_3 ausgeschnittenen Punktgruppen bilden daher eine *lineare 2-fach unendliche Schaar von je 3 Punkten* ($Q = 3$). Dagegen bestimmen alle Linien, die durch einen festen Punkt der C_3 gehen, und also noch in 2 beweglichen Punkten schneiden, eine *lineare 1-fach unendliche Schaar von je 2 Punkten* ($Q = 2$,

*) Dieser Satz gibt also eine directe geometrische Bedeutung für die Zahl p.

$q = 1$); ferner die Tangenten eines festen Kegelschnittes ($x_1 x_2 - x_3^2 = 0$), da dieselben in der Form

$$x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda^2 x_3 = 0$$

darstellbar sind, eine *quadratische einfach unendliche Schaar von je 3 Punkten.* Hat die C_3 einen Doppelpunkt und betrachten wir den von ihm ausgehenden Strahlbüschel, von dem jeder Strahl die C_3 noch in einem beweglichen Punkte trifft, so bestimmt dieser Büschel eine *einfach unendliche lineare Schaar von je einem Punkte* ($Q = 1$). Allgemein endlich schneiden alle adjungirten Curven m^{ter} Ordnung ($m > n - 3$), die durch s beliebige feste Punkte gehen, auf der C_n eine lineare Schaar von Punktgruppen aus, für welche

$$Q = nm - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i-1)$$
$$q = nm - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i-1) - p - s\,;$$

denn von den Q Schnittpunkten sind nach unserm Fundamentalsatze über Schnittpunktsysteme p durch die übrigen bestimmt, und somit nur noch $Q - p$ willkürlich; also ist $q = Q - s - p$. Liegen hingegen von den s festen Punkten R auf der C_n, so haben wir:

$$Q = mn - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i-1) - R$$
$$q = mn - \Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i-1) - s - p\,.$$

Während die Punktgruppen auf der C_n durch die bisherige Darstellung wesentlich von den betreffenden adjungirten Curven abhängig erscheinen, gelingt es durch den sogenannten *Restsatz*, zu dessen Darlegung wir nun übergehen, diese Gruppen in gewissem Grade unabhängig von den sie ausschneidenden Curven zu definiren, wodurch sie entsprechend den Forderungen einer Geometrie auf der Curve mehr als selbständige Gebilde dastehen. Um den *Restsatz* präcis aussprechen und beweisen zu können, müssen wir die folgenden Bezeichnungen einführen.

Als *Residuum* einer Gruppe G_Q von Q Punkten bezeichnen wir eine jede Punktgruppe (G_R), welche mit jener zusammen das vollständige Schnittpunktsystem der vorliegenden C_n mit einer adjungirten Curve bildet; die Ordnung der letzteren ist dabei gleichgültig. Es sei hierbei noch einmal hervorgehoben, dass wir in dem Schnittpunktsysteme die in singuläre Punkte der C_n fallenden Schnittpunkte nie mitzählen, sondern da ihre Zahl ($\Sigma\alpha_i \,.\, i\,(i-1)$) für dieselbe C_n immer die gleiche ist, stets als selbstverständlich ergänzen. Es kann jedoch vorkommen, dass von den Punkten der G_Q (etwa durch Berührung der ausschneidenden Curve mit den Aesten der Grundcurve im singulären Punkte) in einen solchen ausnahmsweise noch mehr Schnittpunkte fallen; diese sind unter den $Q + R$ Punkten mitzuzählen. — Die Punktgruppe G_R heisst dann zu G_Q *residual*, und umgekehrt.

Corresidual in Bezug auf G_Q nennen wir zwei Punktgruppen G_R und $G_{R'}$, welche zu derselben dritten Gruppe G_Q residual sind, welche also von zwei adjungirten Curven ausgeschnitten werden können, deren übrige Schnittpunkte mit der C_n sämmtlich in die Punkte Q fallen; diese beiden Curven können dabei von gleicher oder verschiedener Ordnung sein. Der Begriff der *Corresidualität* ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil er eben durch den Restsatz von einem speciellen Residuum (G_Q) unabhängig gemacht wird.

Um ein *Beispiel* für die Anwendung dieser Definition zu geben, wählen wir eine Curve 5ter Ordnung ($n = 5$) mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$). Alle adjungirten Kegelschnitte, welche durch 2 feste Punkte der C_5 (und durch die Doppelpunkte) gehen, schneiden die C_5 noch in 4 anderen Punkten. Jede dieser Gruppen G_4 ist dann zu jenen beiden festen Punkten residual, und alle diese einfach unendlich vielen G_4 sind unter einander corresidual in Bezug auf die feste G_2.

Der zu beweisende Satz lautet nun allgemein folgendermassen:

*Sind auf einer algebraischen Curve die Punktgruppen G_R, $G_{R'}$, ... einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie auch corresidual in Bezug auf jede andere Punktgruppe $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist.**)

Wir erläutern den Sinn des Satzes zunächst an einigen Beispielen. Wir betrachten wieder eine C_5 mit zwei Doppelpunkten ($p = 4$) und den Büschel adjungirter C_2 mit 2 festen Punkten G_2 (ausser den Doppelpunkten). Letzterer bestimmt uns eine einfach unendliche lineare Schaar von G_4, welche in Bezug auf die G_2 corresidual sind. Durch eine solche G_4 kann aber nur ein einziger adjungirter Kegelschnitt gelegt werden; um daher zu einer Gruppe $G_{Q'}$ zu gelangen, die in Bezug auf eine G_4 zu der G_2 corresidual ist, müssen wir durch die G_4 eine adjungirte Curve höherer, sagen wir 3ter Ordnung, legen. Diese schneidet die C_5 dann noch in 7 anderen Punkten, die eine in Bezug auf G_4 zu G_2 corresiduale Gruppe G_7 bilden. Der Restsatz sagt nun aus, dass man durch diese G_7 einen Büschel von adjungirten C_3 legen kann, welche auf der C_5 *dieselbe* Schaar von Punktgruppen G_4 ausschneiden, die wir vorhin durch einen Büschel adjungirter Kegelschnitte bestimmt haben. Die zuerst willkürlich durch eine der G_4

*) Der Satz wurde für Curven 3. Ordnung auch von Sylvester gegeben und findet sich in dem Werke Salmon's über höhere Curven, welches gleichzeitig mit der Note von Brill und Nöther in den Göttinger Nachrichten erschien. Historisch ist derselbe zunächst, wenn auch nicht in der Form, aus dem Additionstheoreme der Abel'schen Integrale erwachsen. — Der Satz gilt übrigens auch für Punktgruppen auf einer zerfallenden Curve; denn wir werden beim Beweise an keiner Stelle die Irreducibilität der Curve $f = 0$ vorauszusetzen brauchen.

gelegte adjungirte C_3 hätten wir auch so wählen können, dass sie in einem der 4 Punkte die C_5 berührt, dass also ein Punkt der durch sie ausgeschnittenen Gruppe G_7 mit einem Punkte der G_4 zusammenfällt; an dem Wesen der Sache wird dadurch nichts geändert. Ueberhaupt sei bemerkt, *dass es gleichgültig ist, ob die Gruppen G_R, $G_{R'}$, ... und die Gruppen G_Q, $G_{Q'}$, ... lauter verschiedene oder theilweise je dieselben Punkte enthalten.*

Zum *Beweise* unseres Theorems nehmen wir an, die gegebene Curve (C_n) sei

$$f = 0;$$

auf ihr mögen die Punktgruppen

$$\begin{array}{llll} G_Q & \text{und} \quad G_R & \text{durch} & A = 0, \\ G_Q & \quad ,, \quad G_{R'} & \quad ,, & B = 0, \\ G_{Q'} & \quad ,, \quad G_R & \quad ,, & \alpha = 0 \end{array}$$

ausgeschnitten werden, wo $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$ zu $f = 0$ adjungirte Curven sind: wir haben zu zeigen, dass auch die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ auf einer adjungirten Curve liegen. Es lassen sich nämlich, wie sogleich nachgewiesen werden soll, immer zwei adjungirte Curven

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0$$

finden der Art, dass identisch die Gleichung

$$\alpha \,.\, B = \beta \,.\, A + \gamma \,.\, f \tag{1}$$

besteht. Es enthält dann ausser den singulären Punkten von f die (zerfallende) Curve

$$\begin{array}{lll} \alpha \,.\, B = 0 & \text{die Punktgruppen} & G_Q,\ G_{Q'},\ G_R,\ G_{R'}, \\ \gamma \,.\, f = 0 & \quad ,, \quad\quad ,, \quad\quad ,, & G_Q,\ G_{Q'},\ G_R,\ G_{R'}, \end{array}$$

und

$$A = 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad G_Q,\ G_R;$$

folglich muss, damit $\beta \,.\, A$ für alle gemeinsamen Verschwindungspunkte von $\alpha \,.\, B$ und $\gamma \,.\, f$ Null sei, $\beta = 0$ die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ enthalten, w. z. b. w.

Dass die Identität (1) in der That immer hergestellt werden kann, ergibt sich, weil das Product $\alpha \,.\, B$ alle Bedingungen erfüllt, an welche nach einem früher von uns behandelten Satze von Nöther*) die Möglichkeit geknüpft ist, dasselbe auf die Form der rechten Seite zu bringen; denn es verschwindet für alle gemeinsamen Punkte von $A = 0$ und $f = 0$, und zwar $(2\,i - 2)$-fach in jedem i-fachen Punkte

*) Vgl. p. 341. Wir haben in dem dort gegebenen Satze nur f durch $\alpha \,.\, B$, φ durch A, ψ durch f zu ersetzen und $r = i$, $q = i - 1$ zu nehmen. — Hierin liegt auch der Grund, weshalb man sich bei diesen Untersuchungen auf adjungirte Curven beschränkt.

von $f = 0$, während $A = 0$ in einem solchen einen $(i-1)$-fachen Punkt hat. Wegen der *Identität* (1) muss nun ferner das Verhalten von $\beta \,.\, A$ gegenüber $\gamma \,.\, f$, dem von $\alpha \,.\, B$ vollkommen analog sein, $\beta = 0$ also in jedem i-fachen Punkte von f $(i-1)$-fach verschwinden, ohne die Zweige von f zu berühren, d. h. eine adjungirte Curve darstellen, w. z. b. w.

An Stelle von $B = 0$ können wir nun eine *Schaar* von Curven $B = 0$ treten lassen, welche alle durch G_Q gehen, indem wir die Coëfficienten von B als abhängig von einer Anzahl Parametern betrachten. Diese Curven schneiden auf f ein System von beweglichen Punktgruppen $G_{R'}$ aus. Ist dann $A = 0$ eine feste Curve, welche durch G_Q und ausserdem durch eine Gruppe G_R geht, $\alpha = 0$ dagegen eine feste Curve, welche durch G_R und ausserdem durch eine dritte Gruppe $G_{Q'}$ geht; und soll dann wieder die Identität (1) bestehen: so muss $\beta = 0$ offenbar eine zweite Schaar von Curven darstellen, welche alle durch die festen Punkte $G_{Q'}$ hindurchgehen und auf $f = 0$ *dasselbe* System von beweglichen Punktgruppen $G_{R'}$ ausschneiden, das wir vorhin durch die Curvenschaar $B = 0$ bestimmt hatten. Und es muss, wenn (1) eine *identische* Gleichung sein soll, die Schaar $\beta = 0$ dieselben willkürlichen Parameter in derselben Form enthalten, wie die Schaar $B = 0$. Beide Schaaren, $B = 0$ und $\beta = 0$, sind somit in ihrer Beziehung zu $f = 0$ völlig vertauschbar: sie sind, wie wir uns ausdrücken wollen, *zu einander äquivalent*. Kommen in ihnen insbesondere die Parameter *linear* vor, so können wir dies Resultat in folgendem Satze aussprechen, den wir noch mehrfach benutzen werden:

Die Zahl der linear von einander unabhängigen Curven einer linearen Schaar von adjungirten Curven ist gleich der entsprechenden Zahl für eine jede zu ihr residuale Schaar. Für die letztere darf dabei natürlich nicht eine solche gewählt werden, die durch besondere Bedingungen specialisirt ist und in Folge dessen eine Schaar von geringerer Mannigfaltigkeit vorstellt.

Als Beispiel für solche Vorkommnisse betrachten wir zwei einfach unendliche Curvenbüschel, wodurch wir wieder auf die Chasles-Jonquières'sche Erzeugungsweise der algebraischen Curven geführt werden. Durch einen festen Punkt (also $Q = 1$) einer Curve n^{ter} Ordnung (C_n) ohne singuläre Punkte legen wir einen Strahlbüschel $B = u_x + \lambda v_x = 0$, durch welchen eine lineare einfach unendliche Schaar von G_{n-1} $(= G_{R'})$ auf der C_n gegeben ist. Durch eine beliebige Gruppe $(= G_R)$ dieser G_{n-1} (bestimmt durch $A = u_x + \lambda' v_x = 0$) legen wir eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\alpha = 0$, was immer möglich ist; dieselbe schneidet die C_n noch in einer $G_{Q'}$, bestehend aus $n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$ Punkten: es muss sich dann eine Curvenschaar $\beta = 0$ so bestimmen lassen, dass wieder

$$\alpha . B = \beta . A + \gamma . f ;$$

d. h. durch jene Gruppe $G_{Q'}$ von $(n-1)^2$ Punkten gehen noch unendlich viele Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\beta = 0$ hindurch. Die Gesammtheit der letzteren bildet einen zu $B = 0$ äquivalenten Büschel, der Art, dass jeder Curve $B = 0$ *eine* Curve $\beta = 0$ durch unsere Construction zugeordnet ist, und umgekehrt.*) Beide Büschel sind daher projectivisch auf einander bezogen und man kann sich also die C_n aus ihnen in bekannter Weise erzeugt denken (p. 376). — Dasselbe gilt aber auch noch, wenn die C_n vielfache Punkte hat. Den Strahlbüschel nämlich können wir dann zu einem Büschel von adjungirten Curven durch Hinzufügen einer festen adjungirten Curve $P = 0$ ergänzen; d. h. wir setzen:

$$B = P(u_x + \lambda v_x) , \quad A = P . (u_x + \lambda' v_x) .$$

Durch die $n-1$ Schnittpunkte des Strahles $u_x + \lambda' v_x = 0$ mit $f = 0$ können wir immer noch eine adjungirte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\alpha \equiv a_x^{n-1} + \lambda' \alpha_x^{n-1} = 0$$

legen; denn für eine solche dürfen nach Obigem mindestens $2(n-1)+p$ Punkte willkürlich gewählt werden. Dieselbe schneidet die C_n ausserdem noch in $(n-1)^2$ Punkten, von denen $\Sigma \alpha_i \, i \, (i-1)$ in die vielfachen Punkte der C_n fallen. Wegen der Identität (1) muss sich nun wieder ein zu B äquivalenter Büschel $\beta = 0$ bestimmen lassen, welcher jene $(n-1)^2$ Punkte zu Basispunkten ist. Hieraus folgt zunächst, dass *jede algebraische Curve durch einen Geradenbüschel und einen ihm projectivischen Büschel von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden kann.* In ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn der Strahlbüschel durch einen Kegelschnittbüschel ersetzt wird, dessen 4 Basispunkte auf der C_n liegen. Jede Curve desselben schneidet noch in $2(n-2)$ Punkten; durch diese wird man aber nur eine adjungirte Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen können, wenn $n - 2 + p \geqq 2(n-2)$ ist (vgl. p. 430). Andernfalls hat man einen Büschel von C_{n-2} zu construiren, welcher durch Hinzufügen einer festen Curve zu einem äquivalenten Büschel adjungirter Curven ergänzt wird, und dann kann man wieder die Identität (1) anwenden. Es ist klar, wie man in der Weise weiter gehen kann zu projectivischen Büscheln m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dabei hat man nur zu berücksichtigen, dass die m^2 Grundpunkte eines Büschels m^{ter} Ordnung nicht von einander unabhängig sind, dass man also von ihnen auf der C_n nur eine geringere Zahl wird willkürlich annehmen dürfen, wenn auch die übrigen auf der C_n liegen sollen (vgl. darüber de Jonquières a. a. O.). —

*) Man weist nämlich sehr leicht nach, dass im binären Gebiete jede eindeutige Transformation linear sein muss.

Aus den letzten Beispielen ist ersichtlich, wie man die Sätze über Schnittpunktsysteme adjungirter Curven für Punktgruppen verwerthen kann, die durch nicht adjungirte Curven ausgeschnitten werden, indem man letztere durch Hinzufügen fester Curven zu adjungirten ergänzt. Begründet ist die von uns eingehaltene Beschränkung aber wesentlich darin, dass für adjungirte Curven die Identität (1) *immer* angenommen werden kann, und dass die Schnittpunktsysteme solcher Curven auch für andere, später zu entwickelnde Theorien von besonderer Wichtigkeit sind.

Wir beschränken uns nun im Folgenden auf die Betrachtung *der linearen Schaaren von Punktgruppen.* Zur Abkürzung führen wir für sie folgende Bezeichnungen ein; es bedeute:

$g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, ... eine lineare q-fach unendliche Schaar von Gruppen zu je Q Punkten, und

$G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, ... eine einzelne Gruppe aus einer solchen Schaar $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, ...

Jede Gruppe in einer linearen Schaar $g_Q^{(q)}$ ist offenbar durch q willkürlich zu wählende Punkte eindeutig festgelegt; die übrigen $Q - q$ Punkte einer Gruppe der Schaar sind dadurch mit bestimmt. Da nun aber nach unserem Fundamentalsatze über Schnittpunktsysteme von Curven m^{ter} Ordnung auf der C_n

für $m > n - 3$ höchstens p,

für $m = n - 2 - r$ höchstens $p - 1 - \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$

durch die übrigen bestimmt sind, so haben wir den Satz:

Zwischen den Zahlen q, Q einer durch Curven m^{ter} Ordnung auf einer Curve vom Geschlecht p ausgeschnittenen Schaar $g_Q^{(q)}$ besteht die Relation:

für $m > n - 3$: $q \geq Q - p$,

für $m = n - 3 - r$: $q \geq Q - p + 1 + \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber — wie spätere Anwendungen lehren werden — der Umstand, dass sich dieser Satz für $m \leq n - 3$ umkehren lässt. Wir brauchen dies nur für $m = n - 3$ nachzuweisen; denn wir haben nirgends vorausgesetzt, dass die adjungirten Curven nicht zerfallen, und daher kann jede Schaar von Curven niedrigerer Ordnung durch Hinzufügen fester Curven zu einer solchen von Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ergänzt werden. Ueberdies sind diese Curven für das Weitere, besonders für die eindeutigen Transformationen, von grösster Wichtigkeit. Wir sprechen deshalb zunächst die Schnittpunktsätze noch einmal für sie besonders aus:

Von den $2p-2$ Schnittpunkten einer adjungirten Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung sind, wenn $p > 1$ höchstens) $p-1$ durch die übrigen $p-1$ Punkte bestimmt; und zwischen den Zahlen q, Q einer durch solche Curven ausgeschnittenen Schaar besteht die Gleichung:*

$$q > Q - p + 1 .$$

Die nunmehr zu erweisende Umkehr der letzteren Behauptung ist die folgende:

Eine q-fach unendliche lineare Schaar $g_Q^{(q)}$ von Gruppen zu je Q Punkten kann immer dann durch eine Schaar von adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten werden, wenn

$$(2) \qquad q > Q - p + 1\,, \quad \textit{also} \quad Q - q < p - 1\,.$$

Es sei bemerkt, dass unter den Q Punkten jeder $G_Q^{(q)}$ sich auch solche befinden können, die für alle Gruppen der $g_Q^{(q)}$ *dieselben* sind. Für Q ist uns eine obere Grenze durch die Bedingung

$$Q < 2p - 2$$

gegeben; denn in so viel beweglichen Punkten kann eine C_{n-3} überhaupt nur schneiden. Diese Bedingung ist jedoch auf den Gang des Beweises ohne Einfluss; und gerade aus diesem Umstande werden wir eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen.

Zunächst ist sofort klar, dass der Satz richtig ist für $q = 0$ (also $Q < p - 1$); denn durch eine vollständig bestimmte *einzelne* Gruppe von $p-1$ oder weniger Punkten kann immer eine adjungirte Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung gelegt werden. Ebenso sieht man die Richtigkeit des Satzes für $q = 1$ (also $Q \leqq p$) leicht ein. Denn für $Q = p$ und $m > n - 3$ würden im Allgemeinen p Punkte durch die übrigen, hier festen Punkte bestimmt, dieselben können also nur für $m \overline{\gtrless} n - 3$ beweglich sein. Liegen aber die festen Punkte der schneidenden C_m so, dass sie die weiteren p Punkte nicht bestimmen, so construiren wir in folgender Weise einen äquivalenten Büschel $(n-2)^{ter}$ Ordnung von besonderer Art. Wir legen durch eine der beweglichen

---

*) Das Wort „höchstens" ist z. B. wegen des folgenden Falles nöthig: Man nehme auf einer C_5 mit 2 Doppelpunkten $(p = 4)$ $p - 1 = 3$ Punkte in einer Geraden durch einen der Doppelpunkte an; eine andere Gerade durch den andern Doppelpunkt ergänzt dann erstere zu einem adjungirten Kegelschnitte (C_{n-3}); ihre $p - 1 = 3$ Schnittpunkte sind aber durch die jener Linie nicht bestimmt, sondern bilden noch eine $g_3^{(1)}$. Nimmt man die $p - 1 = 3$ Punkte jedoch so an, dass zwei auf einer Geraden durch den einen, einer auf einer Geraden durch den andern Doppelpunkt liegen, so sind dadurch die übrigen 3 Schnittpunkte wieder bestimmt. — Bei Curven mit $p = 0$ oder $p = 1$ gelten ähnliche Sätze für Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung.

$G_p^{(1)}$ eine C_{n-2}, die in eine Gerade A und eine C_{n-3} zerfällt, so dass letztere durch $p-1$ von den Punkten der $G_p^{(1)}$ bestimmt wird und die C_n noch in $p-1$ anderen Punkten Γ_{p-1} trifft, während die Gerade A beliebig durch den p^{ten} Punkt α hindurchgeht, und die C_n noch in $n-1$ weiteren Punkten Γ_{n-1} schneidet. Letztere Gruppe Γ_{n-1} bildet dann zusammen mit der Γ_{p-1} das System von Grundpunkten für den äquivalenten Büschel von C_{n-2}, welcher die $g_p^{(1)}$ ausschneidet. Die Gerade A ist aber allen diesen Curven C_{n-2} gemeinsam, und also bleibt ein Büschel von C_{n-3}, durch welches die $g_p^{(1)}$ ausgeschnitten werden muss. Insbesondere muss auch, wenn dies für *alle* anderen Gruppen der Schaar eintritt, die bei unserer Construction benutzte $G_p^{(1)}$ auf einer C_{n-3} liegen; und somit folgt, dass von den $p-1$ Punkten der Γ_{p-1} einer in den Punkt α hineinfällt. Wir können dies Resultat ($Q=p$, $q=1$) in folgender Weise aussprechen:

Wenn ein Büschel von adjungirten Curven eine $g_p^{(1)}$ bestimmt, d. h. in p beweglichen Punkten schneidet, so liegt jeder Punkt einer einzelnen $G_p^{(1)}$ der Schaar mit den $p-1$ anderen Punkten auf einer C_{n-3}, und diese Curven C_{n-3} bilden einen zum ersten Büschel äquivalenten Büschel.

Für $q=1$, $Q<p$ endlich ist die Richtigkeit unseres obigen Theorems wieder evident, denn durch $p-1$ oder weniger Punkte kann man immer eine C_{n-3} legen; und somit ist hier die Construction eines äquivalenten Büschels von C_{n-3} selbstverständlich.

In ähnlicher Weise kann man den Beweis überhaupt führen, indem man von einer $g_{Q-1}^{(q-1)}$ zu einer $g_Q^{(q)}$ aufsteigt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, dass der Satz richtig ist für jede Schaar $g_Q^{(q)}$, wenn er richtig ist für Schaaren $g_{Q-1}^{(q-1)}$, immer vorausgesetzt, dass $q \geqq Q-p-1$, und zwar nehmen wir $q \geqq 2$ an, da wir die Fälle $q=0$ und $q=1$ schon erledigt haben.

Zu dem Zwecke fassen wir einen beliebigen festen Punkt α ins Auge. Alle Gruppen der gegebenen Schaar $g_Q^{(q)}$, welche diesen Punkt enthalten, bilden noch eine $g_{Q-1}^{(q-1)}$, da wir *lineare* Schaaren voraussetzen. Diese $g_{Q-1}^{(q-1)}$ kann der Annahme nach durch eine ∞^{q-1}-Schaar von $C_{n-3}^{(\alpha)}$ ausgeschnitten werden, welche alle noch durch $R_\alpha = 2p - 2 - (Q-1)$ feste Punkte gehen. Wir haben nur nachzuweisen, *dass unter letzteren R_α Punkten der Punkt α selbst mit enthalten ist;* denn nehmen wir diesen dann wieder beweglich, so erhalten wir von selbst eine ∞^q-Schaar von C_{n-3}, welche alle durch die übrigen $R_\alpha - 1$

festen Punkte gehen, und die gegebene $g_Q^{(q)}$ ausschneiden, wie es verlangt wurde.

Ist nun zunächst $R_\alpha > p - 1$, so folgt:

$$Q - 1 < p - 1 .$$

Dann ist unser Satz selbstverständlich, denn wir können jedenfalls über einen der R_α Punkte willkürlich verfügen, ihn also mit α zusammenfallen lassen

Für $R_\alpha = p - 1$, und also $Q - 1 = p - 1$ wird für $q > 2$ (also $q - 1 > 1$) unter den ∞^{q-1} Gruppen von je $p - 1$ Punkten jedenfalls eine bestimmte Zahl vorhanden sein, welche eine durch sie gehende C_{n-3} noch nicht bestimmt; denn dies erfordert die Erfüllung von 2 Bedingungen.*) Durch eine solche Gruppe und den Punkt α können wir dann noch eine C_{n-3} legen, welche in $p - 2$ weiteren Punkten schneidet. Die letzteren bilden nach dem Restsatze zusammen mit α die $p - 1$ Basispunkte für einen Büschel von C_{n-3}, welcher ebenfalls die von den $C_{n-3}^{(\alpha)}$ bestimmte $g_{p-1}^{(q-1)}$ ausschneidet, q. e. d. Durch jede Gruppe der letzteren Schaar (von $p - 1$ Punkten) gehen also zwei, und somit unendlich viele C_{n-3}, ebenso wie der Annahme nach durch die Gruppe von $R_\alpha = p - 1$ Punkten. Hieraus folgt beiläufig:

Wenn $p - 1$ Punkte so liegen, dass sie eine adjungirte C_{n-3} nicht bestimmen, so schneidet jede durch sie gehende adjungirte C_{n-3} die C_n in $p - 1$ weiteren Punkten, durch welche ebenfalls noch unendlich viele C_{n-3} hindurchgehen.

Wir hätten hiernach also jede beliebige Gruppe von $p - 1$ Punkten des Büschels von $C_{n-3}^{(\alpha)}$ zur Construction eines äquivalenten Büschels von C_{n-3} benutzen können. — In Folge des letzten Satzes erledigt sich aber auch der Fall $R_\alpha = p - 1$ für $q = 2$ von selbst. Nach demselben können wir nämlich durch irgend eine Punktgruppe von $p - 1$ Punkten, in der eine durch die festen Punkte R_α gehende $C_{n-3}^{(\alpha)}$ die C_n noch trifft, immer eine C_{n-3} legen, welche durch den Punkt α hindurchgeht und also wieder einen zu dem Büschel der $C_{n-3}^{(\alpha)}$ äquivalenten Büschel von anderen, *durch α gehenden C_{n-3}* construiren, wie im Falle $q > 2$.

Für den Fall $R_\alpha < p - 1$, d. h.

$$Q - 1 > p - 1 , \quad \text{oder} \quad Q - 2 \geq p - 1 ,$$

(der auch im Allgemeinen eintreten wird, da durch $p - 1$ Punkte nur in besonderen Fällen unendlich viele C_{n-3} gehen) construiren wir neben

*) Wir werden nämlich später sehen, dass man zu $p - 3$ Punkten immer 2 weitere finden kann, so dass alle $p - 1$ eine adjungirte C_{n-3} *nicht* bestimmen. Vgl. die VI. Abtheilung dieser Vorlesungen (Normalcurven).

der Schaar $C_{n-3}^{(\alpha)}$ eine zweite ∞^{q-1}-Schaar $C_{n-3}^{(\beta)}$, welche eine $g_{Q-1}^{(q-1)}$ ausschneidet und zu allen Curven der ursprünglich gegebenen Schaar $g_Q^{(q)}$, die durch einen beliebigen festen Punkt β gehen, äquivalent ist. Wir betrachten die Punktgruppen der gegebenen $g_Q^{(q)}$ welche gleichzeitig die Punkte α und β enthalten, was für $q > 2$ immer möglich ist. Durch die $Q - 2$ beweglichen Punkte einer solchen Gruppe können wir dann der Annahme nach 2 Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, von denen eine der Schaar $C_{n-3}^{(\alpha)}$ angehört und durch β geht, die andere der Schaar $C_{n-3}^{(\beta)}$ angehört und durch α geht. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich*), denn durch die $Q - 2$ $(\geqq p-1)$ Punkte ist eine C_{n-3} im Allgemeinen bestimmt. Die beiden erwähnten C_{n-3} müssen daher identisch sein, und somit jede durch *beide* Punkte gehen. Da ferner β völlig beliebig war, so folgt, dass jede Curve der Schaar $C_{n-3}^{(\alpha)}$ den Punkt α enthält, dass also letzterer unter den R_α festen Punkten der Schaar mit enthalten ist; q. e. d.

Das folgende Beispiel möge den hiermit bewiesenen Satz erläutern; wir behaupten: Die einzigen auf einer Curve 5ter Ordnung mit 2 Doppelpunkten möglichen Gruppen $g_3^{(1)}$ sind die beiden ∞^1-Schaaren, welche von den durch die Doppelpunkte gehenden Strahlen ausgeschnitten werden. Nach unserem Satze nämlich kann jede $g_3^{(1)}$ durch adjungirte Kegelschnitte ausgeschnitten werden; soll also ein C_2-Büschel ausser den Doppelpunkten noch 3 $(= p - 1)$ feste Punkte mit der C_5 gemein haben, so muss jede C_2 des Büschels zerfallen.

In dem Beweise haben wir an keiner Stelle von der Bedingung $Q \leq 2p - 2$ Gebrauch gemacht. Auch wenn diese nicht erfüllt wäre, würde dieselbe Schlussweise, und somit auch der resultirende Satz gelten. Weil aber adjungirte C_{n-3}, die in mehr als $2p - 2$ Punkten schneiden, nicht existiren, so müssen wir rückwärts schliessen, *dass Punktgruppen* $G_Q^{(q)}$ *von mehr als* $2p - 2$ *Punkten, für welche* $q \geqq Q - p + 1$ *ist, nicht existiren.*

Diese Bemerkung kann man zum Beweise eines wichtigen Satzes benutzen. Gruppen G_Q, welche durch adjungirte C_{n-3} ausgeschnitten werden, bilden mindestens eine $(Q - p + 1)$-fach unendliche Schaar; also Gruppen G_{2p-2} *mindestens* eine ∞^{p-1}-Schaar; sie bilden aber auch *höchstens* eine solche. Denn bildeten sie z. B. eine ∞^p-Schaar,

*) Sollte dies doch in speciellen Fällen möglich sein, so könnte man einen dritten Punkt γ und eine dritte Schaar $C_{n-3}^{(\gamma)}$ hinzunehmen und entsprechende Ueberlegungen anstellen, etc.

so könnte man, durch Hinzufügen *desselben* willkürlichen *festen* Punktes β auf C_n zu jeder Gruppe der Schaar, eine Schaar $g_{2p-1}^{(p)}$ herstellen; eine solche kann aber zufolge der eben gemachten Bemerkung nicht existiren. Es gibt somit keine Schaar $g_{2p-2}^{(p)}$, und um so weniger eine $g_{2p-2}^{(p+1)}$ u. s. w.

Es gibt also nur eine $(p-1)$*-fach unendliche Schaar, d. h. nur* p *linear von einander unabhängige adjungirte Curven* $(n-3)^{ter}$ *Ordnung.*

Mit diesem Satze, dem wir später noch wieder begegnen werden, brechen wir die Untersuchungen dieser Art über Schnittpunktsysteme ab, um darauf später in Verbindung mit der Theorie der Abel'schen Functionen zurückzukommen, wo sie dann unter neuem Gesichtspunkte erscheinen und unter Anwendung neuer Hülfsmittel formal einfacher auszusprechen sind. Das hier Angeführte wird zunächst genügen, um einen Einblick in die von Brill und Nöther befolgte Methode zu gewähren.

VIII. Fortsetzung. — Das erweiterte Correspondenzprincip.

Mit den letzten Betrachtungen nicht in unmittelbarem Zusammenhange steht ein für die Geometrie auf einer Curve nicht minder wichtiger Satz, *das sogenannte erweiterte Correspondenzprincip,* zu dessen Aufstellung wir uns wenden. Dasselbe ist eine von Cayley angegebene, von Brill bewiesene Verallgemeinerung des auf der Geraden gültigen und uns bekannten (vgl. p. 210) Chasles'schen Correspondenzprincips für eine beliebige Curve. Von dem Chasles'schen Principe ist dasselbe für Curven vom Geschlecht Null nicht verschieden; es kommt eben nur ein vom Geschlechte der Curve (C_n) abhängiges Glied zu der von jenem gegebenen Zahl hinzu, so dass auch hier wieder die hohe Bedeutung des Geschlechtes für eine Curve hervortritt.*) Die zahlreichen Probleme, deren Erledigung mittelst dieser allgemeineren *Correspondenzformel* gelingt, und von denen wir einige weiterhin bezeichnen, werden ein näheres Eingehen auf den Gegenstand hinreichend rechtfertigen.

---

*) Das Princip wurde zuerst ohne Beweis von Cayley ausgesprochen: Comptes rendus, t. 62, p. 586; ausführlicher in: On the correspondence of two points on a curve, Proceedings of the London math. society, vol. I. 1866 (Beweis für einen speciellen Fall) und mit zahlreichen Anwendungen in: Second memoir on the curves, which satisfy given conditions, Philos. Transactions of the R. Soc. London, vol. 158, 1868. Einen algebraischen Beweis zugleich für eine allgemeinere Formel gab Brill: Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve, Math. Annalen, Bd. VI, p. 33, 1873, und mehr geometrisch: Ueber die Correspondenzformel, ib. Bd. VII, p. 607, 1874. — Die Gültigkeit seines Princips für Curven vom Geschlechte Null benutzte schon Chasles: Comptes rendus, t. 62, p. 584, März 1866.

Die Gleichung der betrachteten Curve (C_n) von der Ordnung n und dem Geschlechte p sei:

(1) $$f(x) = 0;$$

und zwar setzen wir sie zunächst ohne Doppel- und Rückkehrpunkte voraus. Es sei ferner eine Gleichung:

(2) $$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0$$

gegeben, vermöge deren jedem Punkte x der Ebene eine Curve s^{ter} Ordnung, jedem Punkte y eine Curve r^{ter} Ordnung entspricht. Auf der Curve f haben wir dann, wenn gleichzeitig

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(y) = 0,$$

eine *Correspondenz*, vermöge deren jedem Punkte y der Curve $a = rn$ Punkte x und jedem Punkte x derselben $b = sn$ Punkte y zugeordnet sind. Dabei soll zunächst vorausgesetzt werden, dass *nicht alle beweglichen (zu y (bez. x) gehörenden) Curven dieselben festen Punkte gemein haben**), dass also die a bez. b Punkte sämmtlich mit y bez. x beweglich seien. Die Curve $(r + s)^{\text{ter}}$ Ordnung

(3) $$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}) = 0$$

stellt nun den Ort eines Punktes dar, für welchen die ihm entsprechende Curve durch ihn selbst hindurchgeht. Sie schneidet auf f daher $(r + s)\,n = a + b$ Punkte aus, für welche einer der y correspondirenden Punkte x in y fällt, oder umgekehrt. Diese $a + b$ Punkte nennen wir die *Coincidenzpunkte der Correspondenz* φ; die Correspondenz selbst werden wir, insofern sie in Bezug auf f betrachtet wird, kurz durch (a, b) bezeichnen.

Diese Betrachtung verliert jedoch ihre Gültigkeit, wenn die Gleichung (3) vermöge $f(x) = 0$ und $f(y) = 0$ für *jeden* Punkt x oder y von f erfüllt ist**), d. h. wenn von den Schnittpunkten der einem Punkte x entsprechenden Curven einer oder mehrere, sagen wir γ, in x selbst hineinfallen, und von den Schnittpunkten der zu y gehörenden Punkte δ in y liegen. Es kann dies dadurch eintreten, dass die betreffende Curve in x eine $(\gamma - 1)$-fache Berührung mit f hat, d. h. γ unendlich benachbarte Schnittpunkte, oder einen γ-fachen Punkt, oder einen ϱ-fachen Punkt und $\gamma - \varrho$ successive Schnittpunkte, wobei sich die letzteren noch in verschiedener Weise auf die ϱ Zweige der Curve φ vertheilen können. Wir sagen in allen diesen Fällen, die

*) In Betreff dieser Fälle sei auf den Abschnitt über eindeutige Transformationen in der 6ten Abtheilung dieses Bandes verwiesen.

**) Dies tritt z. B. ein, wenn $\varphi = \psi(x) \cdot \chi(y) - \chi(x) \cdot \psi(y)$ ist, oder wenn φ für $x = y$ eine Potenz von f zum Factor erhält.

Curve habe mit f *einen „γ-werthigen Schnittpunkt in $x = y$“.* Analoges gilt für y und δ. Es ist aber sehr wichtig, *dass immer*

$$(4) \qquad \gamma = \delta$$

sein muss. Denken wir uns nämlich aus $\varphi(x, y) = 0$ mit Hülfe von $f(x) = 0$ eine der Coordinaten x_i von x, etwa x_3, eliminirt, so muss in der Eliminationsgleichung, da sie für $x_i = y_i$ γ-fach verschwindet, der Factor $x_1 y_2 - x_2 y_1$ γ-mal auftreten. Eliminirt man dann noch y_3 mittelst $f(y) = 0$, so enthält die Resultante diesen Factor $n\gamma$-mal. Dasselbe Resultat muss sich aber ergeben, wenn man umgekehrt erst y_3 und dann x_3 eliminirt, wodurch jener Factor $m\,\delta$-mal vorkommen würde. Daher hat man in der That $\gamma = \delta$. Die Zahl γ zeigt sich für die Correspondenz φ charakteristisch; wir werden eine solche mit einem γ-werthigen Punkte in x durch $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ bezeichnen, oder durch $(\alpha, \beta)_\gamma$, wenn $a - \gamma = \alpha$, $b - \gamma = \beta$ gesetzt wird.

Unsere Aufgabe ist es nun, anzugeben, wie oft noch ein $(\gamma + 1)^{\text{ter}}$ Schnittpunkt der zu x gehörigen Curve mit x zusammenfällt, d. h. *wie oft in der Correspondenz $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ ein Punkt y mit einem entsprechenden x zusammenfällt.*

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst für $\gamma = 0$ gleichzeitig zwei Correspondenzen (a, b) und (a', b'):

$$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(\overset{r'}{x}, \overset{s'}{y}) = 0$$

und fragen nach der Zahl der Punktepaare x, y auf f, welche gleichzeitig beiden Correspondenzen genügen.*) Nun entsprechen jedem Punkte y der Ebene die rr' Schnittpunkte x der ihm zugehörigen Curven $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$; ebenso sind jedem Punkte x der Ebene ss' Punkte y zugeordnet. Bewegt sich y auf einer Geraden, so durchlaufen die entsprechenden rr' Punkte x, wie wir bei einer anderen Gelegenheit sahen (p. 387), eine Curve der Ordnung $rs' + sr'$, also wenn y unsere Curve f beschreibt, durchlaufen sie eine Curve von der Ordnung

$$(5) \qquad n(rs' + sr').$$

Jeder Schnittpunkt x der letzteren mit f wird mit *einem* auf f liegenden Punkte y ein Paar der gesuchten Art geben. Die Zahl der zwei Correspondenzen (a, b), (a', b') zugleich genügenden Punktepaare auf f ist daher gleich

$$(6) \qquad n^2(rs' + sr') = ab' + ba'.$$

Zeigen die Punkte x und y zu jeder der beiden Correspondenzen ein *symmetrisches* Verhalten (wofür nothwendig $a = b$, $a' = b'$), so

*) Das Verhalten dieser Aufgabe zu der vorhergehenden ist analog demjenigen der Bestimmung des Grades der Resultante zweier Gleichungen zu der Bestimmung des Grades der Discriminante einer Gleichung.

ergibt das angeführte Verfahren *dieselbe* Curve der Ordnung $n(rs'+sr')$, wenn wir y, und wenn wir x auf der Curve f wandern lassen; jeder Schnittpunkt mit f trägt daher zweimal zur Bildung eines Paares bei. Die Zahl der gesuchten Paare ist also gleich der Hälfte der eben gefundenen Zahl: $r = aa' = bb'$.

Eine Reduction ist jedoch an obiger Zahl $ab' + ba'$ anzubringen, wenn eine oder jede der beiden Correspondenzen einen mehrwerthigen Punkt in $x = y$ hat, und wenn man dann die Anzahl von *getrennt* liegenden Punkten x, y auf f angeben will, welche beiden genügen. Wenn nämlich etwa φ' einen γ'-werthigen Punkt besitzt (also für φ' beim Wandern von x auf f immer γ' Punkte y mit x vereinigt liegen), so genügt ein aus zwei solchen benachbarten Punkten x, y bestehendes Paar zugleich der Correspondenz φ an denjenigen $a + b$ Stellen von f, wo Coincidenzen von φ stattfinden, und zwar an jeder solchen Stelle γ'-fach; wir haben daher $\gamma'(a + b)$ abzuziehen. *Die Anzahl der getrennt liegenden Punktepaare, welche zwei Correspondenzen*

$$(a, b) \quad \textit{und} \quad (a' - \gamma', b' - \gamma')_{\gamma'}$$

gleichzeitig genügen, ist also gleich

$$a(b' - \gamma') + b(a' - \gamma'). \tag{7}$$

Die weitere Reduction, welche eintritt, wenn φ zugleich einen γ-werthigen Punkt in $x = y$ hat, d. h. wenn die Correspondenzen

$$\varphi = (a - \gamma, b - \gamma)_\gamma, \quad \varphi' = (a' - \gamma', b' - \gamma')_{\gamma'}$$

gegeben sind, bestimmen wir durch folgenden Grenzprocess. Wir denken uns zunächst die eine Correspondenz, etwa φ, ein wenig deformirt (d. h. die Coëfficienten der entsprechenden Gleichung $\varphi = 0$ sehr wenig geändert) in eine andere

$$\pi = (a, b)_0,$$

welche dann in $x = y$ keinen ein- oder mehrwerthigen Punkt besitzt, *dagegen γ diesem benachbarte Punkte x, bez. y auf der C_n für jeden Punkt y bez. x ergibt.* Die Zahl der gemeinsamen Punktepaare für die Correspondenzen π und φ' ist nun nach dem Vorigen gleich:

$$ab' + ba' - \gamma'(a + b).$$

Unter diesen Paaren gibt es noch solche, welche aus zwei nahe benachbarten Punkten x, y bestehen und, indem diese Punkte zusammenfallen, zu einer weiteren Reduction unserer Zahl Veranlassung geben, sobald die Deformation von φ in π rückgängig gemacht wird. Diese Paare sind zu finden.

Wir betrachten einen Coincidenzpunkt G der Correspondenz φ' näher, d. h. einen Punkt, in dem $\gamma' + 1$ Punkte $x = y$ von φ' liegen. Während sich x dem Punkte G nähert, rückt der mit ihm später

coincidirende Punkt y zunächst in die Nähe von x, fällt, wenn x G erreicht, mit x zusammen und entfernt sich wieder von x, wenn x sich von G entfernt. Während also x durch einen Coincidenzpunkt von φ' geht, durchläuft y alle zu x benachbarten Punkte von f, indem der eine Punkt den andern gewissermassen einholt und dann über ihn hinaus eilt. Unter den benachbarten Punkten von x sind aber auch die γ Punkte, welche aus dem γ-werthigen Punkte von φ in Folge unserer Deformation entstanden: auch jeden dieser γ Punkte muss daher, wenn x durch einen Coincidenzpunkt G von φ' geht, der coincidirende Punkt y einmal passiren. Für jeden Punkt G entstehen dadurch γ aus nahe benachbarten Punkten x, y gebildete Paare, welche zugleich den Correspondenzen φ' und π genügen, und welche bei Aufhören der Deformation von φ eine entsprechende Reduction der Zahl $ab' + ba' - \gamma'(a + b)$ hervorrufen.*) *Ist also C' die Zahl der Coincidenzpunkte von φ'*, so bleiben

$$(8) \qquad (\varphi\varphi') = ab' + ba' - \gamma'(a + b) - \gamma C'$$

Paare von getrennt fallenden Punkten x, y, die den Correspondenzen φ und φ' zugleich genügen.

Nun verfahren wir aber unsymmetrisch, wenn wir die eine Correspondenz φ deformiren; hätten wir statt dessen φ' deformirt, so würden wir die Formel

$$(9) \qquad (\varphi\varphi') = a'b + b'a - \gamma(a' + b') - \gamma' C$$

erhalten haben, *wo C die Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz φ bedeutet.* Da die beiden Werthe für $(\varphi\varphi')$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Vergleichung:

$$(10) \qquad \frac{C - (a - \gamma) - (b - \gamma)}{\gamma} = \frac{C' - (a' - \gamma') - (b' - \gamma')}{\gamma'}.$$

Dieser Quotient hat für φ dieselbe Form, wie für φ' und muss daher von der speciellen Natur der Correspondenz ganz unabhängig sein; er kann durch irgend eine Correspondenz, für welche die Zahl C anderweitig bekannt ist, bestimmt werden. Nehmen wir z. B. die Correspondenz zwischen dem Berührungspunkte y einer Tangente der C_n und ihren anderen $n - 2$ Schnittpunkten x mit der C_n, für welche C gleich der Anzahl der Wendepunkte von f, also gleich $3n(n - 2)$ ist. Hier haben wir

$$a = n, \quad b = n(n - 1), \quad \gamma = 2,$$

*) Die Schlussweise des Textes würde zunächst nur für reelle Punkte gelten. Man kann jedoch den gemachten Grenzprocess auch algebraisch verfolgen, wodurch sich dann auch imaginäre Vorkommnisse erledigen; vgl. Brill, Math. Annalen, Bd. VI, a. a. O.

und also den Werth des Quotienten gleich $(n-1)(n-2)$, gleich $2p$. Daher hat man die *Correspondenzformel*:

$$C = (a-\gamma) + (b-\gamma) + 2\gamma p, \tag{11}$$

und ferner durch Substitution:

$$(\varphi\varphi') = (a-\gamma)(b'-\gamma') + (b-\gamma)(a'-\gamma') - 2p\gamma\gamma'.$$

Setzt man noch:

$$a-\gamma = \alpha; \qquad a'-\gamma' = \alpha',$$
$$b-\gamma = \beta; \qquad b'-\gamma' = \beta',$$

wo dann also α die Zahl der vermöge der Correspondenz φ dem Punkte y entsprechenden *nicht* mit y zusammenfallenden Punkte x ist, u. s. w., so haben wir den Satz:*)

Die Anzahl der Coincidenzpunkte einer Correspondenz $\varphi = (\alpha, \beta)_\gamma$ auf einer Curve vom Geschlecht p (zunächst ohne Doppelpunkte etc.) ist:

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma; \tag{12}$$

und die Zahl der den beiden Correspondenzen $\varphi = (\alpha, \beta)_\gamma$, $\varphi' = (\alpha', \beta')_{\gamma'}$ zugleich genügenden Punktepaare x, y ist:

$$(\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma'. \tag{13}$$

Von der letzteren Zahl ist wieder nur die *Hälfte* zu nehmen, wenn φ und φ' ein völlig *symmetrisches* Verhalten zeigen, wie früher für den Fall $\gamma = \gamma' = 0$ schon ausgeführt wurde. —

Wir stellen uns nunmehr die Frage, wie die Coincidenzpunkte einer Correspondenz algebraisch durch ein Eliminationsverfahren zu bestimmen sind. Wir werden insbesondere zeigen, dass sich immer eine Curve angeben lässt, welche die Coincidenzpunkte C auf f ausschneidet, dass also *die Coincidenzpunkte immer das vollständige Schnittpunktsystem von f mit einer anderen Curve bilden.* Diese Curve möge zunächst für die einfachsten Fälle $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ wirklich gebildet werden; für $\gamma = 0$ ist sie ja direct durch $\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}) = 0$ gegeben.

Es sei also erstens $\gamma = 1$. Wir setzen symbolisch:

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots, \quad \varphi = \alpha_x^r \beta_y^s = \alpha'^r_x \beta'^s_y = \ldots, \tag{14}$$

so dass in φ erst je r Symbole α zusammen mit je s Symbolen β eine wirkliche Bedeutung gewinnen. Der Annahme nach haben wir:

$$\alpha_x^r \beta_x^s = 0, \quad \text{(eventuell vermöge } f = 0); \tag{15}$$

---

*) Es sei besonders hervorgehoben, dass die gefundenen Formeln ihrer Ableitung nach nur angewandt werden dürfen, wenn die Correspondenz zwischen den Punkten x und y durch *eine* Gleichung $\varphi = 0$ darstellbar ist, d. h. wenn die $a = \alpha + \gamma$ zu y gehörigen, sowie auch die $b = \beta + \gamma$ zu x gehörigen Punkte durch eine bewegliche Curve ausgeschnitten werden.

und es soll sein für $y = x + dx$:

(16) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_{dx} = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0.$$

Um zwischen beiden Gleichungen die Differentiale dx_i in symmetrischer Weise eliminiren zu können, sei bemerkt, dass man zwischen den x_i, um ihnen absolute Werthe zu ertheilen, immer eine Gleichung der Form

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1$$

annehmen kann, wo die k_i Constante bedeuten. Hieraus ergibt sich dann als dritte Gleichung:

(17) $$k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0.$$

Aus ihr und den Gleichungen (16) kann man nun die dx eliminiren und findet die Bedingung:

(18) $$(a \beta k)\, a_x^{n-1} \alpha_x^r \beta_x^{s-1} = 0.$$

Aber statt (16) hätte man auch die Gleichungen:

(19) $$\alpha_x^{r-1} \beta_x^s \alpha_{dx} = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0$$

zu Grunde legen können; es ist also auch

(20) $$(a \alpha k)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{r-1} \beta_x^s = 0.$$

Hieraus schaffen wir die k_i durch Anwendung der Identität (p. 283):

$$(a \alpha k)\, \beta_x = (a \beta k)\, \alpha_x + (\beta \alpha k)\, a_x + (a \alpha \beta)\, k_x$$

fort; denn wegen (18) und wegen $f = 0$ geht dann (20) bis auf den constanten Factor k_x über in

(21) $$(a \alpha \beta)\, \alpha_x^{r-1} \beta_x^{s-1} a_x^{n-1} = 0,$$

und *diese Gleichung stellt die gesuchte Curve dar.* Die Zahl ihrer Schnittpunkte mit f ist in der That gleich:

$$nr + ns + n(n-3) = nr - 1 + ns - 1 + 2p.$$

Es sei zweitens $\gamma = 2$; und zwar möge dies zunächst dadurch geschehen, dass die zu x gehörige Curve in x und ebenso die zu y gehörige in y einen Doppelpunkt hat; d. h. dass unabhängig von den z:

(22) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_z \equiv 0, \qquad \alpha_x^{r-1} \beta_x^s \alpha_z \equiv 0.$$

Wir fragen nach den Punkten x, in denen ein Zweig des Doppelpunktes die Curve f berührt, d. h. für welche

(23) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-2} \beta_{dx}^2 = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0.$$

Die Elimination der dx aus diesen Gleichungen und (17) ergibt:

(24) $$(\beta a k)\, (\beta b k)\, \alpha_x^r \beta_x^{s-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0.$$

Statt (23) hätte man aber auch die Gleichungen:

(25) $$\alpha_x^{r-2} \alpha_{dx}^2 \beta_x^s = 0, \qquad a_x^{n-1} a_{dx} = 0$$

zu Grunde legen können; es ist also auch:

$$(26)\qquad (\alpha a k)\,(\alpha b k)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^s a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0\,.$$

Es sei ferner bemerkt, dass auch die Gleichungen (18), (20) und (21) wegen (22) für jeden auf f gelegenen Punkt x erfüllt sind. — Zur Fortschaffung der k_i aus (24) wenden wir die Identitäten an:

$$(\beta a k)\,\alpha_x = (\beta a \alpha)\,k_x + (\beta \alpha k)\,a_x + (\alpha a k)\,\beta_x\,,$$
$$(\beta b k)\,\alpha_x = (\beta b \alpha)\,k_x + (\beta \alpha k)\,b_x + (\alpha b k)\,\beta_x\,.$$

In dem entstehenden Ausdrucke verschwinden die Glieder mit den Factoren a_x, b_x wegen $f = 0$, das mit β_x^2 wegen (26); es bleiben ein in k_x^2 und zwei in $k_x \beta_x$ multiplicirte Glieder. Die letzteren sind wegen der Vertauschbarkeit von a und b bis auf gemeinsame Factoren:

$$(\alpha a k)\,(\beta b \alpha)\,\beta_x + (\beta a \alpha)\,(\alpha b k)\,\beta_x = 2\,(\alpha a k)\,(\beta b \alpha)\,\beta_x\,.$$

Für den rechts stehenden Term benutzen wir die Identität:

$$(\alpha a k)\,b_x = (\alpha a b)\,k_x + (\alpha b k)\,a_x + (b a k)\,\alpha_x\,.$$

In dem entstehenden Ausdrucke verschwindet das zweite Glied wegen $f = 0$, das dritte wegen der Gleichungen (22). Der Ausdruck (24) geht also, abgesehen von dem Factor k_x^2, über in:

$$P = (\alpha\beta b)\left\{(\alpha\beta a)\,b_x + 2\,(\alpha a b)\,\beta_x\right\}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2} b_x^{n-2} a_x^{n-1}\,.$$

Diesen können wir noch symmetrischer schreiben; es ist nämlich:

$$(\alpha a b)\,\beta_x = (\alpha\beta b)\,a_x + (\beta a b)\,\alpha_x + (\alpha a \beta)\,b_x\,,$$

und also, indem sich die übrigen Glieder fortheben:

$$P = (a\beta b)\left\{(\alpha a b)\,\beta_x + (\beta a b)\,\alpha_x\right\} a_x^{n-1} b_x^{n-2}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}\,.$$

Hierin können wir noch a und b vertauschen und die Summe beider Ausdrücke bilden. An Stelle von $(\alpha\beta b)\,a_x$ tritt dann der Factor:

$$\tfrac{1}{2}\left\{(\alpha\beta b)\,a_x - (\alpha\beta a)\,b_x\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(\alpha a b)\,\beta_x - (\beta a b)\,\alpha_x\right\}.$$

Die Gleichung der gesuchten Curve ist also schliesslich:

$$(27)\quad 2\,P = \left\{(\alpha a b)^2\,\beta_x^2 - (\beta a b)^2\,\alpha_x^2\right\}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0\,.$$

Die Zahl der von ihr auf $f = 0$ ausgeschnittenen Coincidenzpunkte stimmt mit der oben gefundenen überein.

Eine andere Curve gleicher Ordnung erhalten wir bei der Annahme, dass der 2-werthige Punkt in $x = y$ durch Berührung entsteht. In dem Falle treten an Stelle von (22) die Gleichungen:

$$(28)\qquad \alpha_x^r\,\beta_x^{s-1}\beta_{dx} = 0\,,\qquad \alpha_x^{r-1}\beta_x^s\,\alpha_{dx} = 0\,,$$

und an Stelle von (23) die Bedingungen:

(29) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_{d^2x} + (s-1)\, \alpha_x^r \beta_x^{s-2} \beta_{dx}^2 = 0$$

(30) $$a_x^{n-1} a_{d^2x} + (n-1)\, a_x^{n-2} a_{dx}^2 = 0$$

(31) $$k_1\, d^2 x_1 + k_2\, d^2 x_2 + k_3\, d^2 x_3 = 0\,,$$

während wieder die Gleichungen (18), (20), (21) für jeden Punkt von f erfüllt sind. Man kann sich hier die dx_i aus (29) und (30) in Function der d^2x_i berechnet denken, ihre Werthe in $a_x^{n-1} a_{dx} = 0$ und eine der Gleichungen (28) einsetzen, und aus diesen beiden Gleichungen zusammen mit (31) die d^2x_i eliminiren. Symmetrischer geschieht diese Elimination jedoch in folgender Weise.

Man füge die an Stelle von (19) tretende Gleichung:

(32) $$\alpha'^{\,r-1}_x \alpha'_{d^2x} \beta'^{\,s}_x + (r-1)\, \alpha'^{\,r-2}_x \alpha'^{\,2}_{dx} \beta'^{\,s}_x = 0$$

hinzu, und eliminire aus ihr, sowie aus (29), (30) und (31) die Grössen d^2x_i. Dies gibt das Resultat:

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_1 \beta_x & \beta_2 \beta_x & \beta_3 \beta_x & (s-1)\, \beta_{dx}^2 \\ \alpha'_1 \alpha'_x & \alpha'_2 \alpha'_x & \alpha'_3 \alpha'_x & (r-1)\, \alpha'^{\,2}_{dx} \\ a_1 a_x & a_2 a_x & a_3 a_x & (n-1)\, a_{dx}^2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \end{vmatrix} \alpha_x^r \beta_x^{s-2} \alpha'^{\,r-2}_x \beta'^{\,s}_x a_x^{n-2}.$$

Diese Determinante entwickeln wir nach den Gliedern der letzten Verticalreihe. Alsdann verschwinden wegen der Gleichungen (18) und (20) zunächst alle Glieder einzeln; das Glied mit dem Factor $a_x^{n-2} a_{dx}^2$ aber verschwindet sogar quadratisch. Letzteres ist nämlich gleich

$$(n-1)\, (\beta \alpha' k)\, a_{dx}^2 \,.\, \alpha_x^r \beta_x^{s-1} \alpha'^{\,r-1}_x \beta'^{\,s}_x a_x^{n-2};$$

und durch Anwendung der Identität

$$(\beta \alpha' k)\, a_{dx} = (\beta \alpha' a)\, k_{dx} + (\beta a k)\, \alpha'_{dx} + (a \alpha' k)\, \beta_{dx}$$

entsteht aus ihm eine Summe, deren einzelne Glieder je für sich quadratisch verschwinden. Für die beiden letzten Glieder folgt dies unmittelbar aus den Gleichungen (18), (20) und (28); das erste Glied enthält den verschwindenden Factor k_{dx}, und das Verschwinden des andern Factors ergibt sich durch Elimination der dx_i aus (28) und $a_x^{n-1} a_{dx} = 0$. Den Term mit $a_x^{n-2} a_{dx}^2$ als Factor können wir daher gegen die beiden andern Terme der Determinante fortfallen lassen; die letztere reducirt sich somit auf die Summe:

(33) $$\left\{ (s-1) (\alpha' a k)\, \alpha'_x \beta_{dx}^2 - (r-1) (\beta a k)\, \beta_x \alpha'^{\,2}_{dx} \right\} \alpha_x^r \beta_x^{s-2} \alpha'^{\,r-2}_x \beta'^{\,s}_x a_x^{n-1}.$$

Zur weiteren Umformung dieser Summe dienen folgende Bemerkungen. Jedem Punkte x entsprechen unserer Annahme nach die Punkte x und $x + dx$; umgekehrt müssen daher dem Punkte $x + dx$ wieder die Punkte $x + dx$ und x entsprechen, d. h. *neben* (28) *besteht noch die Gleichung:*

(34) $$\alpha_x^{r-1}\alpha_{dx}\beta_x^{s-1}\beta_{dx} = 0\,.$$

Da ferner in unserm Falle, wie oben bemerkt (p. 446), der Ausdruck $\alpha_x^r\beta_x^s$ identisch Null ist oder den Factor f hat, so ist auch vermöge $f=0$ und $df=0$:

(35) $$s\,.\,\alpha_x^r\beta_x^{s-1}\beta_{dx} + r\,.\,\alpha_x^{r-1}\beta_x^s\alpha_{dx} = 0\,,$$

oder wegen $a_x^{n-1}a_{dx}=0$, $k_{dx}=0$:

$$s\,.\,(\beta a k)\,\alpha_x^r\beta_x^{s-1}a_x^{n-1} = -\,r\,.\,(\alpha a k)\,\alpha_x^{r-1}\beta_x^s a_x^{n-1}\,.$$

In Folge dieser Gleichung kann man aus (33) einen gemeinsamen verschwindenden Factor absondern. Vertauscht man noch im zweiten Gliede die gestrichenen Buchstaben mit den nicht gestrichenen, so erhält man also als das *Resultat der Elimination der d^2x_i aus* (29), (30), (31):

(36) $$\left\{s\,(s-1)\,\beta_{dx}^2\alpha_x^2 + r\,(r-1)\,\alpha_{dx}^2\beta_x^2\right\}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2} = 0\,.$$

Die Elimination der dx_i aus dieser Gleichung und aus $a_x^{n-1}a_{dx}=0$, $k_{dx}=0$ gibt also:

$$0=\left\{s(s-1)(\beta a k)(\beta b k)\,\alpha_x^2 + r(r-1)(\alpha a k)(\alpha b k)\beta_x^2\right\}\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1};$$

oder, wie wir kurz schreiben wollen:

(37) $$s\,(s-1)\,.\,\Pi_1 + r\,(r-1)\,.\,\Pi_2 = 0\,.$$

Zur Fortschaffung der k_i wenden wir im ersten Gliede die Identitäten an:

$$(\beta a k)\,\alpha_x = (\beta a \alpha)\,k_x + (\beta \alpha k)\,a_x + (\alpha a k)\,\beta_x\,,$$
$$(\beta b k)\,\alpha_x = (\beta b \alpha)\,k_x + (\beta \alpha k)\,b_x + (\alpha b k)\,\beta_x\,.$$

Es wird dann wegen $f=0$:

$$\Pi_1 = (\alpha\beta a)\,(\alpha\beta b)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1}\,.\,k_x^2 + \Pi_2 + 2\,k_x\,.\,\Pi_3\,,$$

wenn: $$\Pi_3 = (\beta a\alpha)\,(\alpha b k)\,\alpha_x^{r-2}\,\beta_x^{s-1}\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,.$$

Letzteren Ausdruck formen wir nochmals mittelst der Identität

$$(\beta a \alpha)\,k_x = (\beta a k)\,\alpha_x - (\beta\alpha k)\,a_x - (\alpha a k)\,\beta_x$$

um. Von den drei dann entstehenden Gliedern verschwindet das erste wegen (34), das zweite wegen $f=0$, das dritte ist gleich $-\Pi_2$; und also wird, wenn S den Factor von k_x^2 bezeichnet:

(38) $$\Pi_1 + \Pi_2 = S\,.\,k_x^2\,.$$

Um auch die Differenz $\Pi_1 - \Pi_2$ zu bilden, benutzen wir für Π_1 folgende Identität (IV, p. 283)

$$2\,(\beta a k)\,(\beta b k)\,a_x b_x = (\beta a k)^2\,b_x^2 + (\beta b k)^2\,a_x^2 - (a b k)^2\,\beta_x^2$$
$$-\,(ab\beta)^2\,k_x^2 + 2\,(\beta a b)\,(a b k)\,k_x\beta_x\,.$$

Setzt man dies in Π_1 ein, so bleiben nur die letzten beiden Glieder der rechts stehenden Summe. Es wird also bis auf die Factoren $\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}b_x^{n-2}$ der Ausdruck Π_1 gleich

$$-\tfrac{1}{2}(ab\beta)^2\alpha_x^2 \,.\, k_x^2 + (\beta a b)(abk)\beta_x\alpha_x^2 \,.\, k_x,$$

und ebenso bis auf dieselben Factoren Π_2 gleich

$$-\tfrac{1}{2}(ab\alpha)^2\beta_x^2 \,.\, k_x^2 + (\alpha a b)(abk)\alpha_x\beta_x^2 \,.\, k_x.$$

Bei Bildung der Differenz benutzen wir für die letzten beiden Glieder die Identität:

$$(\beta a b)\alpha_x - (\alpha a b)\beta_x = (\alpha\beta a)b_x - (\alpha\beta b)a_x.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von a, b und wegen des Factors (abk) können wir für die rechts stehende Differenz $2(\alpha\beta a)b_x$ schreiben. Den so umgeformten Factor von k_x in $\Pi_1 - \Pi_2$ wollen wir für den Augenblick mit $2X$ bezeichnen. Derselbe lässt sich auf Π_1 und Π_2 zurückführen.

Die Form $(\alpha\beta a)\alpha_x^{r-1}\beta_x^{s-1}a_x^{n-1}$ nämlich ist für unsern Fall identisch Null oder hat $f = a_x^n$ zum Factor; jedenfalls ist also auch vermöge $f = 0$ und $df = 0$:

$$(\alpha\beta a)\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}\left\{(r-1)\beta_x a_x \alpha_{dx} + (s-1)\alpha_x a_x \beta_{dx} + (n-1)\alpha_x\beta_x a_{dx}\right\} = 0.$$

Ersetzen wir aber hierin wieder die dx_i durch die Unterdeterminanten $(bk)_i b_x^{n-1}$, so wird der Coëfficient von $(n-1)$ gerade gleich jener Form X; der Coëfficient von $(r-1)$ dagegen wird gleich dem oben mit Π_3 bezeichneten Ausdrucke, also sein Product mit k_x gleich $-\Pi_2$, und entsprechend muss der Coëfficient von $(s-1)$ bis auf den Factor k_x gleich $+\Pi_1$ werden. Wir haben sonach die Relation:

$$(n-1)k_x \,.\, X = (r-1)\Pi_2 - (s-1)\Pi_1.$$

Tragen wir dies in den für $\Pi_1 - \Pi_2$ gefundenen Ausdruck ein und bezeichnen den Coëfficienten von k_x^2 in Π_1 mit T_1, in Π_2 mit T_2, so ist also:

$$(n-1)(\Pi_1 - \Pi_2) = \tfrac{1}{2}k_x^2(n-1)(T_2 - T_1) + 2(r-1)\Pi_2 - 2(s-1)\Pi_1,$$

oder:

$$(39) \quad 2(2s+n-3)\Pi_1 - 2(2r+n-3)\Pi_2 = k_x^2(n-1)(T_2 - T_1).$$

Diese Gleichung zusammen mit (38) gibt die Resultate:

$$4(r+s+n-3)\Pi_1 = k_x^2\left\{2(2r+n-3)S + T_2 - T_1\right\}$$
$$4(r+s+n-3)\Pi_2 = k_x^2\left\{2(2s+n-3)S - T_2 + T_1\right\}.$$

Damit ist die Absonderung des Factors k_x^2 aus der Gleichung (37) geleistet. *Die Gleichung der gesuchten Curve, welche auf $f = 0$ die Coincidenzpunkte der Correspondenz $\alpha_x^r\beta_y^s = 0$ ausschneidet, ist also:*

$$(40) \quad 2S[s(s-1)(2r+n-3) + r(r-1)(2s+n-3)] + T(n-1)[r(r-1) - s(s-1)] = 0,$$

wo S, $T = T_1 - T_2$ *in folgender Weise definirt sind:*

$$S = (a\alpha\beta)(b\alpha\beta)\,\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1}$$

$$T = (ab\beta)^2\alpha_x^r\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}b_x^{n-2} - (ab\alpha)^2\alpha_x^{r-2}\beta_x^s a_x^{n-2}b_x^{n-2}.$$

Aus diesen Beispielen wird es klar sein, wie man im allgemeinen Falle zu verfahren hat: Man wird mit Rücksicht auf die Gleichungen $k_d{}^i{}_x = 0$ durch ein dem obigen analoges Verfahren, bei dem die Symbole α und β der Function $\varphi = \alpha_x^r\beta_y^s$ symmetrisch benutzt werden, nach einander die Differentiale verschiedener Ordnung aus den Gleichungen eliminiren können, welche den γ-werthigen Punkt der Correspondenz in $x = y$ definiren; sei es dass letzterer durch einen mehrfachen Punkt der Curven φ daselbst oder durch mehrpunktige Berührung derselben mit $f = 0$ oder durch gleichzeitiges Eintreten beider Vorkommnisse entsteht. Aus dem Endresultate hat man dann immer noch durch identische Umformungen in obiger Weise eine Potenz von k_x als Factor abzusondern, um schliesslich die Gleichung der Curve zu erhalten, welche die Coincidenzpunkte auf f ausschneidet. *Die Ordnung dieser Curve* können wir indess ohne nähere Betrachtung jener algebraischen Operationen angeben, da wir nach Formel (11) die Zahl ihrer Schnittpunkte mit f kennen, dieselbe ist ($a = rn$, $b = sn$) gleich:

(41) $$[r + s + \gamma(n - 3)].$$

Diese Zahl bleibt die nämliche, wenn $f = 0$ Doppel- und vielfache Punkte besitzt, denn die angedeuteten algebraischen Operationen bleiben immer ausführbar. Andererseits wird aber auch unsere zur Aufstellung der Zahl $C = \alpha + \beta + 2\gamma p$ führende Ueberlegung durch das Auftreten vielfacher Punkte auf f nicht modificirt, wenigstens nicht, wenn die verschiedenen Aeste des vielfachen Punktes alle getrennt verlaufen.*) Die Zahl C wird alsdann aber kleiner, wie die Zahl der Schnittpunkte obiger Curve mit $f = 0$. Dies erklärt sich dadurch, dass diese Curve durch die vielfachen Punkte von f hindurchgeht, dass in diesen also Coincidenzen entstehen, ohne dass die coincidirenden Punkte einander benachbart auf demselben Curvenzweige liegen, wie sogleich noch deutlicher werden wird; und für Coincidenzen dieser Art gelten unsere obigen geometrischen Schlüsse nicht. Demgemäss führen wir folgende Unterscheidungen ein: *Wir bezeichnen als eigentliche Coincidenz*

---

*) Bei der oben zur Bestimmung der Zahl der Wendepunkte (p. 445) benutzten Correspondenz tritt noch die Besonderheit ein, dass die Curven φ (die ersten Polaren) in den vielfachen Punkten *gemeinsame feste* Punkte haben. Zur Umgehung der dadurch vielleicht entstehenden Schwierigkeiten (auf die wir später eingehen), kann man ein anderes Beispiel wählen, z. B. die Correspondenz $(n-1, n-1)_1$, welche durch die Linien eines Strahlbüschels auf $f = 0$ bestimmt wird.

eine jede, welche dadurch entsteht, dass einer der α beweglichen einem Punkte y entsprechenden Punkte diesem Punkte auf demselben Curvenzweige unendlich nahe liegt; als uneigentliche Coincidenz eine jede, für welche dies nicht der Fall ist. Nach dem Obigen gilt dann in Folge dieser Definitionen der Satz, dass *die uneigentlichen Coincidenzen zusammen mit den eigentlichen Coincidenzen auf $f=0$ ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden.* Bezeichnen wir also mit G die Zahl der ersteren, so muss die Zahl

$$C + G = nr - \gamma + ns - \gamma + [\gamma (n-1)(n-2) - 2d] + G,$$

wo d die Zahl der Doppelpunkte von $f=0$ angibt, durch n theilbar sein, d. h. es ist $G = 2\gamma d$.

In jeden Doppelpunkt von f fallen also 2γ (ebenso in jeden i-fachen Punkt mit getrennten Tangenten $\gamma \cdot i(i-1)$) uneigentliche Coincidenzen.

In der That verschwindet für $\gamma = 1$ die linke Seite von (21) in jedem i-fachen Punkte von f $(i-1)$-fach. Um dies in (27) zu erkennen, hat man für einen Doppelpunkt x von f nur zu beachten, dass der Ausdruck $(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ in einem solchen proportional zu u_x^2 wird.

Von diesem Verhalten der die Coincidenzpunkte ausschneidenden Curve, die wir im Folgenden kurz als „*Coincidenzcurve*“ bezeichnen wollen*), in den singulären Punkten von f mag man sich in folgender Weise direct Rechenschaft geben für den Fall, dass die zu x gehörigen Curven φ in $x=y$ einen γ-fachen Punkt haben.**) Nähert sich dann x einem Doppelpunkte von f auf dem einen Zweige dieser Curve (mit dem also die zugehörige Curve φ immer γ Schnittpunkte in $x=y$ hat), so wird die Curve φ, sobald x in den Doppelpunkt eintritt, in x noch weitere γ Schnittpunkte mit dem andern durch den

---

*) Dass dies Wort früher in anderem Sinne gebraucht wurde (p. 387), wird nicht zu Missverständnissen Anlass geben können.

**) Dies kann *entweder* unabhängig von $f=0$ eintreten *oder* vermöge $f=0$. In ersterem Falle hat die Curve φ selbstverständlich auch in einem Doppelpunkte von f einen γ-fachen Punkt, dessen Tangenten von den Doppelpunktstangenten verschieden sind. Dass letzteres auch im zweiten Falle im Allgemeinen eintritt, beweist man, indem man die Function $\varphi(x,y) = \alpha_x^r \beta_y^s$ nach dem von Gordan gegebenen Satze (Math. Annalen, Bd. 5, p. 100) in eine Reihe entwickelt, deren $s+1$ Glieder für $r > s$ bis auf Zahlenfactoren bez. aus den Formen:

$$\varphi_0 = \alpha_x^r \beta_x^s, \quad \varphi_1 = (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)\alpha_x^{r-1}\beta_x^{s-1}, \ldots \varphi_s = (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)^s \alpha_x^{r-s}$$

durch einen Polarenprocess entstehen. Die Formen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\gamma$ müssen dann bez. die Potenzen $f^\gamma, f^{\gamma-1}, f^{\gamma-2} \ldots f^0$ zu Factoren haben. Verschwinden insbesondere die Formen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\gamma-1}$ alle identisch, so hat man den Fall, wo der γ-fache Punkt in $x=y$ unabhängig davon eintritt, ob x auf f liegt oder nicht.

Doppelpunkt gehenden Zweige von f besitzen, so dass γ uneigentliche Coincidenzen eintreten. Dasselbe gilt, wenn x auf diesem andern Zweige an den Doppelpunkt heranrückt; und so haben wir in der That zusammen 2γ uneigentliche Coincidenzen, wie es sein soll.

Betrachten wir ferner den Fall, wo der γ-werthige Punkt in $x = y$ durch Berührung entsteht. Hier können wir uns immer die zu Punkten x gehörigen Curven φ aus einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Curven s^{ter} Ordnung, deren jede die Curve $f = 0$ in $\gamma - 1$ consecutiven Punkten trifft, eben durch die Bedingung ausgeschieden denken, dass eine solche Curve noch einen weiteren benachbarten Punkt mit f gemein habe. Jedem Punkte x entsprechen dann die übrigen $ns - \gamma$ einfachen Schnittpunkte y einer solchen Curve mit f, von denen im Allgemeinen keiner in den Doppelpunkten liegt. Durch jeden Punkt y dagegen gehen einfach unendlich viele Curven jener ∞^2-Schaar, deren jede in einem nicht in y liegenden Punkte die Curve f in $\gamma - 1$ benachbarten Punkten trifft; unter diesen wird aber eine endliche Zahl von Curven sein, welche f in je γ benachbarten Punkten schneiden: Dem Punkte y entspricht daher eine Curve, welche die so ausgezeichneten Berührungspunkte der letzterwähnten Curven ausschneidet, d. h. die Coincidenzcurve (p. 453) einer Correspondenz mit $(\gamma - 1)$-werthigem Punkte. Eine solche Correspondenz hat aber, wie wir sogleich sehen werden, $\gamma(\gamma - 1)$ uneigentliche Coincidenzen in jedem Doppelpunkte von f; und also fallen in jeden $\gamma(\gamma - 1)$ Schnittpunkte der zu y gehörigen Curve. *Hat also eine Correspondenz in $x = y$ einen γ-werthigen Punkt, der durch $(\gamma - 1)$-punktige Berührung entsteht, und gehen die zu x gehörigen Curven nicht durch die Doppelpunkte von f, so fallen doch für jede zu einem Punkte y gehörige Curve $\gamma(\gamma - 1)$ Schnittpunkte in jeden Doppelpunkt von f; d. h. wir haben eine Correspondenz mit festen Punkten.*

Solche Correspondenzen haben wir allerdings von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen. Für sie soll später der folgende Satz bewiesen werden*), den wir einstweilen wiederholt werden benutzen müssen und deshalb hier mittheilen: *Entfallen bei einer Correspondenz mit γ-werthigem Punkte in $x = y$ für jede der zu x gehörigen Curven σ, für jede der zu y gehörigen τ Schnittpunkte mit f in einen festen einfachen Punkt von f, so liegen in diesem $\sigma + \tau$ uneigentliche Coincidenzen; ist der feste Punkt jedoch Doppelpunkt von f, so liegen in ihm $\sigma + \tau + 2\gamma$ uneigentliche Coincidenzen. — Die eigentlichen Coincidenzen dagegen bestimmen sich wieder durch die Formel* (12), *wenn man nur unter α, β die Zahlen der beweglichen zu x, bez. y gehörenden Punkte versteht.*

---

*) Vgl. den Abschnitt über eindeutige Transformationen in der 6. Abtheilung dieser Vorlesungen.

Wir wollen nun voraussetzen, dass σ Schnittpunkte der zu x gehörenden Curve in einem Doppelpunkte liegen. Ist dann $\gamma = 2$ (durch Berührung in x), so bestimmt sich die zu y gehörige Curve in der geschilderten Weise als Coincidenzcurve einer Correspondenz mit $\gamma = 1$, $\sigma = \sigma$, und auch $\tau = \sigma$. Für diese liegen aber $\sigma + \tau + 2\gamma = 2(\sigma + 1)$ uneigentliche Coincidenzen im Doppelpunkte, d. h. in der Correspondenz mit $\gamma = 2$ liegen $2(\sigma + 1)$ Schnittpunkte der zu y gehörigen Curve im Doppelpunkte. Wir haben also hier $\sigma = \sigma$, $\tau = 2(\sigma + 1)$; und somit wird die Zahl u der uneigentlichen Coincidenzen: $u = 3(\sigma + 2)$. Für eine Correspondenz mit $\gamma = 3$ ergibt sich hieraus $\sigma = \sigma$, $\tau = 3(\sigma + 2)$, und also: $u = 4(\sigma + 3)$. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise (durch einen Schluss von γ auf $\gamma + 1$) findet man allgemeiner, wenn $\sigma = \sigma$ gegeben ist:

$$\tau = \gamma(\sigma + \gamma - 1), \quad u = \sigma + \tau + 2\gamma = (\gamma + 1)(\sigma + \gamma).$$

Fallen also in einer Correspondenz mit γ-werthigem Punkte in $x = y$ für die zu x gehörige Curve, welche in x $(\gamma - 1)$-punktig berührt, σ feste Schnittpunkte in einen Doppelpunkt von f, so fallen in diesen für jede zu y gehörige Curve $\gamma(\sigma + \gamma - 1)$ feste Schnittpunkte; und es liegen in ihm $(\gamma + 1)(\sigma + \gamma)$ uneigentliche Coincidenzen. — Für $\sigma = 0$ folgt hieraus der oben ausgesprochene Satz; ebenso beweist man auch den folgenden: *Wenn bei der genannten Correspondenz für die zu x gehörige Curve σ Schnittpunkte in einen festen einfachen Punkt von f fallen, so fallen in ihn $\gamma\sigma$ feste Schnittpunkte für jede zu y gehörige Curve und $(\gamma + 1)\sigma$ uneigentliche Coincidenzen.*

Lassen wir andererseits den Punkt x in einen Doppelpunkt von f rücken, so wird ihm zunächst keine bestimmte Curve zugehören, indem der Ausdruck $\varphi(x, y)$ *unabhängig von den y zu Null wird.* Man erhält daher erst eine bestimmte Curve, wenn man unter den beiden von x aus auf f möglichen Fortschreitungsrichtungen eine Wahl trifft und demgemäss $x + dx$ statt x in $\varphi(x, y)$ setzt. *Dem Doppelpunkte, als Punkte x, entsprechen daher 2 völlig verschiedene Curven, deren jede einen Zweig von f $(\gamma - 1)$-punktig berührt.* — Es möge dies noch an folgendem Beispiele erläutert werden:

Man soll die Correspondenz $\varphi = 0$ angeben, vermöge deren jedem Punkte x die in ihm die Curve $f = 0$ berührende Curve m^{ter} Ordnung eines Netzes entspricht. Sind $\alpha_x{}^m = 0$, $\alpha_x'{}^m = 0$, $\alpha_x''{}^m = 0$ drei beliebige Curven des Netzes, so hat man zu dem Zwecke zunächst $\varkappa, \lambda, \mu$ aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\varkappa\alpha_x{}^m + \lambda\alpha'_x{}^m + \mu\alpha''_x{}^m = 0,\\
&\varkappa\alpha_y{}^m + \lambda\alpha'_y{}^m + \mu\alpha''_y{}^m = 0,\\
&\varkappa\alpha_x{}^{m-1}\alpha_{dx} + \lambda\alpha'_x{}^{m-1}\alpha'_{dx} + \mu\alpha''_x{}^{m-1}\alpha''_{dx} = 0,
\end{aligned}$$

und aus dem Resultate die dx_i vermöge der Relationen $a_x^{n-1} a_{dx} = 0$, $k_{dx} = 0$ zu eliminiren. Mittels einiger identischer Umformungen hat man dann noch einen Factor k_x abzusondern, um schliesslich das Resultat zu erhalten:

$$a_x^{n-1} \left\{ (a\alpha'\alpha'') \alpha'^{m-1}_x \alpha''^{m-1}_x \alpha_y^m + (a\alpha''\alpha) \alpha''^{m-1}_x \alpha_x^{m-1} \alpha'^m_y \right.$$
$$\left. + (a\alpha\alpha') \alpha_x^{m-1} \alpha'^{m-1}_x \alpha''^m_y \right\} = 0 .$$

Die Richtigkeit des Resultats verificirt man auch leicht nachträglich. Die Gleichung stellt nämlich in den Veränderlichen y jedenfalls eine Curve des Netzes dar; setzt man in ihr $y = x$, so sondert sich in der That wegen der Identität*)

$$(a\alpha'\alpha'') \alpha_x + (a\alpha\alpha') \alpha''_x + (a\alpha''\alpha) \alpha'_x = (\alpha\alpha'\alpha'') a_x$$

ein Factor a_x^n ab; und ebenso, wenn man $y = x + dx$ setzt, ein Factor $a_x^{n-1} a_{dx}$, wie es sein soll. Die Gleichung kann aber als lineare Function der Grössen $a_x^{n-1} a_i$ angesehen werden; und daraus folgt, dass *jede* zu einem Punkte y gehörige Curve in der That durch die Doppelpunkte von f gehen muss, wie behauptet wurde.

Ausserdem kann es natürlich eintreten, dass der γ-werthige Punkt dadurch entsteht, dass die Curve φ in $x = y$ einen vielfachen Punkt hat, dessen einzelne Zweige die Curve noch ein- oder mehrpunktig berühren. Diese Fälle können als Combinationen der soeben behandelten angesehen werden. —

Lassen wir nun den Doppelpunkt von f in einen Rückkehrpunkt ausarten. Alsdann behalten die vorstehenden Betrachtungen jedenfalls ihre Gültigkeit, insofern es auf die uneigentlichen Coincidenzen ankommt. In einem Rückkehrpunkte aber sind zwei zusammenfallende Punkte immer als auf *demselben* Curvenelemente gelegen zu betrachten; es werden daher die in einen solchen fallenden Coincidenzen theilweise als eigentliche gezählt werden müssen, so dass auch an der Zahl C in (12) noch eine Reduction anzubringen ist, wenn man nach der Zahl der *nicht in singuläre Punkte von f fallenden eigentlichen Coincidenzen fragt.* Wir geben im Folgenden einige Beispiele für die Bestimmung dieser Reduction.

Nehmen wir an, dass die Curven φ in $x = y$ einen γ-fachen Punkt haben; dasselbe wird dann der Fall sein, wenn x ein Rückkehrpunkt ist, und im Allgemeinen sind die Tangenten des γ-fachen Punktes von der Rückkehrtangente verschieden. Die Zahl der in x

*) Aus dem Satze (p. 382), dass die Curven eines Netzes, welche durch einen Punkt der Jakobi'schen Curve desselben gehen, sich in diesem alle berühren, folgt, dass die zu einem Schnittpunkte x der Jakobi'schen Curve mit f gehörige Curve φ in x einen Doppelpunkt hat, also nicht eigentlich berührt; was man auch direct bestätigt.

liegenden eigentlichen Coincidenzen ist dann offenbar unabhängig von der speciellen Correspondenz und kann für dieselbe Zahl γ an einem beliebigen Beispiele bestimmt werden. In der Nähe von x können wir aber die Curve mit γ-fachem Punkte durch ihre γ Tangenten ersetzen. Wir brauchen also die betreffende Zahl an einem Beispiele nur für den Fall zu bestimmen, dass die zu x gehörigen Curven φ in γ gerade Linien zerfallen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Correspondenz $(n-1,\, n-1)_\gamma$, welche einem Punkte von f die $\gamma\,(n-1)$ von ihm an eine beliebige Curve γ^{ter} Klasse zu legenden Tangenten zuordnet. Die Zahl der eigentlichen Coincidenzen muss gleich der Zahl der gemeinsamen Tangenten beider Curven sein, d. h., gleich

$$k\,.\,\gamma = \gamma\,\{n\,(n-1) - 2\,d - 3\,r\},$$

wenn k, d, r für die Curve f die bekannten Bedeutungen haben. Unsere Correspondenzformel ergibt aber die Zahl:

$$C = 2\,\gamma\,(n-1) + 2\,\gamma p = \gamma\,\{n\,(n-1) - 2\,d - 2\,r\};$$

und hieran haben wir noch eine Reduction von γr anzubringen, um die Zahl $k\gamma$ zu erhalten. *Entsteht also der γ-werthige Punkt in $x = y$ durch einen γ-fachen Punkt der Curven φ, so entfallen in jeden Rückkehrpunkt γ eigentliche Coincidenzen.*

Entsteht dagegen der γ-werthige Punkt durch Berührung, so kann man für $\gamma = 2$ die Curven φ in der Nähe von x wieder durch gerade Linien ersetzen und so die eintretende Reduction aus den Plückerschen Formeln bestimmen. Wir werden erst später auch den allgemeinen Fall erledigen*) unter der Voraussetzung, dass die zu x gehörigen Curven φ aus einer linearen γ-fach unendlichen Schaar von Curven eben durch die Bedingung der Berührung ausgeschieden werden. Es scheint jedoch misslich ganz allgemeine Regeln anzugeben. Insbesondere treten z. B. Ausnahmen ein, wenn die zu x und die zu y gehörenden Curven φ durch einen Rückkehrpunkt von f gehen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Man bestimme die Zahl der von einem Rückkehrpunkte an die Curve f zu legenden Tangenten. Die Berührungspunkte sind die Coincidenzpunkte einer Correspondenz $(n-3,\, n-3)_1$ mit einem zweifach zählenden festen Punkte im Rückkehrpunkte für jede Curve φ (d. i. Gerade durch den Rückkehrpunkt). Die Zahl der eigentlichen Coincidenzen ist also, wenn ausserdem (der Kürze wegen) keine Rückkehrpunkte auf f mehr vorhanden sind (also $r = 1$), gleich

$$2\,n - 6 + 2\,p = k - 3\,.$$

Andererseits sind diese Punkte die nicht in Doppelpunkte von f

*) Vgl. den Schluss dieses Abschnittes.

fallenden Schnittpunkte der ersten Polare des Rückkehrpunktes mit f. Für diese fallen aber in den Rückkehrpunkt 6 Schnittpunkte mit f, d. i. 3 mehr, als wie für einen beliebigen Pol; wir erhalten also noch $k-3$ andere Schnittpunkte; und somit fällt in den einen Rückkehrpunkt *keine* eigentliche Coincidenz. —

Wir gehen dazu über, im Folgenden eine Reihe von *Beispielen und Anwendungen für die Correspondenzformel* zu geben, wobei wir gleichzeitig verschiedene, an sich wichtige Theoreme, sowie eine Verallgemeinerung unserer Correspondenzformel kennen lernen werden.

1) Als Beispiel zu der Formel (13) für $(\varphi\varphi')$ diene das folgende: Gegeben sei ein einfach unendlicher Curvenbüschel, der die C_n in einer Zahl fester und in M beweglichen Punkten schneidet, worunter die Punkte x und y sich befinden mögen. Es soll die Zahl der Paare von Schnittpunkten x, y bestimmt werden, welche in Bezug auf einen beliebigen festen Kegelschnitt conjugirte Pole sind. Ein solches Paar muss zugleich der Correspondenz $\varphi = (M-1,\ M-1)_1$ zwischen den beweglichen Schnittpunkten und der Correspondenz $\varphi' = (n,\ n)_0$ zwischen einem Punkte y der C_n und den n Schnittpunkten x der Polaren von y genügen. Man erhält daher

$$\tfrac{1}{2}\,(\varphi\varphi') = n\,(M-1)$$

für die Anzahl der gesuchten Paare (den Zahlenfactor $\frac{1}{2}$ wegen der Symmetrie).

2) Die Formel (12) benutzen wir zuerst zur Ableitung des schon früher angegebenen Satzes von der *Gleichheit des Geschlechtes zweier eindeutig auf einander bezogenen Curven* (vgl. p. 368). Wir fragen sogleich allgemein: Wie ist das Geschlecht (p) einer Curve C von demjenigen (p') einer Curve C' abhängig, wenn beide so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte P von C x' Punkte P' von C' entsprechen, und jedem Punkte P' von C' x Punkte P von C?*)

Wir bezeichnen mit y und y' die Zahlen der Coincidenzen von 2 Punkten, welche bez. auf C und C' demselben Punkte der andern Curve entsprechen, wobei die durch Doppelpunkte der Curven hervorgerufenen Coincidenzen nicht mitgezählt sind. Ausserdem möge es z-mal (auf jeder Curve) vorkommen, dass *zugleich* zwei einem Punkte P entsprechende Punkte in P' zusammenfallen, und umgekehrt zwei von den P' zugehörigen Punkten in P. Wir setzen ferner voraus, dass die Curven C und C' nur Doppelpunkte, keine Rückkehrpunkte haben. Zur Bestimmung der Punkte y und z auf C haben wir nun eine Correspondenz:

$$(x'(x-1),\quad x'(x-1))_{x'}\,.$$

---

*) Vgl. im Folgenden Zeuthen: Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. Math. Annalen, Bd. 3, p. 150.

Jedem Punkte P von C entsprechen nämlich x' Punkte P' von C', jedem dieser Punkte wieder x Punkte Q auf C, von denen je einer (also im Ganzen x') mit P zusammenfällt; und so entsteht die erwähnte Correspondenz, welche zufolge unserer Bezeichnung $y + 2z$ Coincidenzpunkte hat; denn als solcher zählt jeder der z Punkte zweimal, indem dann noch *zwei* Punkte Q mit P zusammenfallen. Es ist daher:

$$y + 2z = 2x'(x-1) + 2x'p\,,$$

und ebenso:

$$y' + 2z = 2x(x'-1) + 2xp'\,;$$

also durch Subtraction:*)

$$y - y' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1)\,.$$

*Zwischen zwei „x-x'-deutig auf einander bezogenen Curven", bez. vom Geschlecht p und p' mit y bez. y' Coincidenzpunkten besteht die Relation:***)

$$y - y' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1)\,.$$

Für $x = x' = 1$, also $y = y' = 0$ haben wir insbesondere $p = p'$; und so ergibt sich das Theorem, dessen Darlegung im Einzelnen uns noch später beschäftigen wird:

Zwei eindeutig auf einander bezogene Curven sind von gleichem Geschlechte.

3) Mit Hülfe der Correspondenzformel können wir ferner die Frage nach der Zahl der Curven eines Systems beantworten, welche eine gegebene Curve f vom Geschlechte p in gewissen Punkten mehrfach berühren.***) Die dabei auftretenden Correspondenzen sind nach dem Obigen (p. 454) immer solche mit festen Punkten; bei Bestimmung der eigentlichen Coincidenzen hat man aber nach der daselbst

---

*) Dieselben Gleichungen würden übrigens beim Auftreten von Rückkehrpunkten fortbestehen, wenn man nur unter y, bez. y' die *Gesammtheit der eigentlichen Coincidenzpunkte* versteht (vgl. oben), also ohne die durch Rückkehrpunkte noch besonders veranlassten Reductionen.

**) Nimmt man insbesondere $x' = 1$, also $y' = 0$, und $p = p'$, so wird $y = 2(p-1) - 2x(p-1)$. Weil nun y immer eine positive Zahl sein muss, so ist auch $x = 1$ (wenn nicht $p = 1$); und es folgt der Satz: *Sind zwei Curven von gleichem Geschlechte ($p > 1$) so auf einander bezogen, dass jedem Punkte der ersten ein Punkt der zweiten entspricht, so ist diese Beziehung auch eindeutig umkehrbar.* Hierfür gab Weber mit Hülfe Riemann'scher Principien auch einen directen Beweis: Crelle's Journal, Bd. 76, p. 345. — Der Fall $p = 1$ bedarf einer besondern Erörterung; er bezieht sich auf die Transformation der ellipt. Functionen.

***) Die betreffenden Formeln sind (für $r = 0$) zuerst von de Jonquières aufgestellt: Sur les problèmes de contact des courbes algébriques, Crelle's Journal, Bd. 66, 1866; erweitert für Curven mit Rückkehrpunkten von Cayley: Philos. Transactions, vol. 158, p. 109, 1868. Vgl. auch Bischoff: Crelle's Journal, Bd. 56. Exacte Beweise für jene Formeln gab Brill: Math. Annalen, Bd. 6, p. 46.

angegebenen Regel nur auf die beweglichen Schnittpunkte der Curven $\varphi(x, y) = 0$ und $f = 0$ zu achten. Wenn wir also im Folgenden Curvensysteme betrachten, die linear von q Parametern abhängen, so können auch immer einzelne einfache oder Doppelpunkte von f allen Curven des Systems gemeinsam sein, ohne dass unsere Formeln dadurch beeinflusst würden; denn diese zeigen sich nur von *der Zahl M der beweglichen Schnittpunkte* abhängig. Wir setzen hier zunächst voraus, dass *f keine Rückkehrpunkte habe*, fügen aber der Vollständigkeit halber die betreffenden (später zu beweisenden) Reductionen sogleich hinzu.

Es sei zunächst ein Curvenbüschel ($q = 1$) gegeben. Durch jeden Punkt x von f geht eine Curve desselben, die f in $M - 1$ weiteren Punkten y schneidet. Wir haben also eine Correspondenz $(M - 1, M - 1)_1$; *und die Zahl α_1 der berührenden Curven ist:*

$$\alpha_1 = 2(M - 1) + 2p - r = 2(M + p - 1) - r,$$

wobei die in etwa auf der C_n liegenden *festen* Punkten berührenden Curven *nicht* mitgezählt sind.*)

Nehmen wir ein Curvennetz mit M beweglichen Schnittpunkten, also $q = 2$, so berührt in einem beliebigen Punkte x der C_n eine Curve des Systems, denn durch zwei (hier successive) Punkte ist eine solche bestimmt. Dieselbe schneidet $M - 2$ correspondirende Punkte y aus. Durch jeden Punkt y geht dagegen ein Büschel von Curven des Netzes mit $M - 1$ beweglichen Schnittpunkten, unter denen nach dem Früheren $\alpha_1 - 2$ berührende sind; denn die Zahl α_1 geht in $\alpha_1 - 2$ über, wenn man M durch $M - 1$ ersetzt. Wir haben $\gamma = 2$, denn es gibt ausserdem noch 2 unendlich benachbarte Curven, welche in y selbst berühren. Wir finden so zwischen den Berührungspunkten x und den andern Schnittpunkten y der Curven eine Correspondenz $(M - 2, \alpha_1 - 2)_2$.

Es gibt daher

$$\alpha_2 = M - 2 + \alpha_1 - 2 + 4p - r = 3(M + 2p - 2) - 2r$$

---

*) Ist die Gleichung des Büschels durch $a'^{m}_{x} + \lambda a''^{m}_{x} = 0$ gegeben, so ist die Correspondenz auf f bestimmt durch

$$\varphi = \alpha_x^m \beta_y^m = a'^{m}_{x} a''^{m}_{y} - a''^{m}_{x} a'^{m}_{y} = 0.$$

Beachtet man nun, dass in nicht symbolischer Form:

$$m^2 n (a\alpha\beta)\, \alpha_x^{m-1} \beta_x^{m-1} a_x^{n-1} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial y_2}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_1}\right)\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

so ersieht man, dass die Coincidenzpunkte ausgeschnitten werden durch die Curve (p. 447):

$$(a a' a'')\, a_x^{n-1} a'^{m-1}_{x} a''^{m-1}_{x} = 0.$$

*osculirende (in 3 successiven Punkten schneidende) Curven im Netze.**) Ganz in derselben Weise kann man weiter von q auf $q+1$ schliessen, und gelangt dann zu dem Satze:

In einer q-fach unendlichen linearen Schaar von Curven, welche die C_n in M beweglichen Punkten schneiden, gibt es

$$\alpha_q = (q+1)(M+qp-q) - qr$$

Curven, welche die C_n in $q+1$ benachbarten Punkten treffen (q-punktig berühren).

Sind die Curven der Schaar von der m^{ten} Ordnung und keiner Bedingung unterworfen, so haben wir insbesondere $M = nm$, $q = \frac{1}{2}m$ $.(m+3)$ zu setzen. Es gibt also z. B. *auf der C_n*

$$12n + 30(p-1) - 5r$$

*Punkte, in denen ein Kegelschnitt 5-punktig berühren kann.***)

4) Um weiter auch die Zahl der Curven eines Netzes zu bestimmen, welche die C_n in zwei getrennten Punkten berühren, muss man zuvor die Correspondenzformel in gewisser Weise verallgemeinern. Wir haben bisher immer vorausgesetzt, dass die zu einem Punkte x oder y gehörigen Curven $\varphi(x, y) = 0$ ausser in $x = y$ die Curve f nur in lauter einfach zählenden Punkten schneiden. Es kann aber vorkommen, dass dieselben z. B. in einem Punkte ein- oder mehrfach berühren und in den übrigen mehrfach schneiden. Diese complicirteren Fälle wollen wir hier nur kurz erwähnen.***) — Man beweist zunächst (ähnlich wie oben die Formel $\gamma = \delta$, p. 443) den folgenden Satz:

Wenn unter den beweglichen einem Punkte x' entsprechenden Punkten y ein i-werthiger Punkt y' vorkommt (d. h. ein solcher Punkt, in welchem i einfache Schnittpunkte vereinigt liegen), so verhält sich umgekehrt unter den zu y' gehörigen Punkten x der Punkt x' ebenfalls wie ein i-werthiger.

Gehören nun zu einem Punkte x in einer Correspondenz mit γ-werthigem Punkte in $x = y$ allgemein β' (nicht in x fallende) i'-werthige Punkte y', β'' i''-werthige Punkte y'', u. s. w., also zusammen

$$\beta = \beta' i' + \beta'' i'' + \beta''' i''' + \dots$$

Punkte y, so wird man nach dem erwähnten Satze zu jedem Punkte $y^{(\varrho)}$ eine Anzahl $\alpha^{(\varrho)}$ von Punkten $x^{(\varrho)}$ finden können, die ihm $i^{(\varrho)}$-

---

*) Eine die Osculationspunkte ausschneidende Curve ist von Brill angegeben, Math. Annalen, Bd. 3, p. 459. Man wird dieselbe aus der obigen Gleichung (40) auf p. 451 ableiten können, wenn man die Form $\varphi(x, y)$ wie auf p. 456 gegeben denkt.

**) Cayley hat auch eine Curve angegeben, welche diese Punkte auf der Grundcurve ausschneidet: Philos. Transactions, 1859 und 1865.

***) Vgl. Cayley: Comptes rendus, t. 62, 1866 und Brill a. a. O.

fach entsprechen, so dass die Zahl der einem Punkte y im Ganzen entsprechenden Punkte x gleich

$$\alpha = \alpha' i' + \alpha'' i'' + \alpha''' i''' + \dots$$

wird. *Die Zahl der Coincidenzpunkte der so entstehenden Correspondenz* $(\alpha, \beta)_\gamma$ *ist dann nach der Correspondenzformel* (12): $C = \alpha + \beta + 2\gamma p$; *d. h. es besteht die Relation:*

$$i' (C' - \alpha' - \beta') + i'' (C'' - \alpha'' - \beta'') + \dots = 2\gamma p,$$

wenn $C^{(\varrho)}$ angibt, wie oft eine Coincidenz zwischen einem $i^{(\varrho)}$-werthigen Punkte $x^{(\varrho)}$, bez. $y^{(\varrho)}$ mit dem γ-werthigen Punkte $y = x$ eintritt, wenn also gesetzt wird:

$$C = i' C' + i'' C'' + i''' C''' + \dots$$

Das einfachste Beispiel für die Anwendung dieser Formel gibt die Bestimmung der Zahl der Doppeltangenten der Curve f, oder allgemeiner die Bestimmung der Zahl der an zwei verschiedenen Stellen der C_n berührenden Curven eines Netzes mit M beweglichen Schnittpunkten auf f. Durch jeden Punkt x geht ein Büschel von Curven mit $M - 1$ beweglichen Schnittpunkten, in dem sich nach der früheren Bezeichnung $\alpha_1 - 2$ berührende Curven befinden (denn die obige Zahl α_1 wird um 2 verringert, wenn man in ihr $M - 1$ statt M schreibt). Von diesen schneidet jede die C_n in 1 zweiwerthigen und in $M - 3$ einwerthigen Punkten. Wir haben also:

$$i' = 1, \quad \beta' = \alpha' = (\alpha_1 - 2)(M - 3), \quad \gamma = \alpha_1 - 2$$
$$i'' = 2, \quad \beta'' = \alpha_1 - 2, \quad \alpha'' = M - 2^{*)}.$$

Ferner ist $C'' = \alpha_2$ die (uns schon bekannte) Zahl der osculirenden Curven, während $C' = 2\alpha_{11}$ das *Doppelte* der gesuchten Zahl angibt. Setzen wir also die Curve f ohne Rückkehrpunkte voraus, so finden wir für *die Zahl der doppelt berührenden Curven des Netzes:*

$$\alpha_{11} = (\alpha_1 - 2)(M - 3) - \alpha_2 + (\alpha_1 - 2) + (M - 2) + (\alpha_1 - 2) p.$$

In derselben Weise können wir aber auch die Zahl α_{1q} der an einem Punkte q-punktig, an einem andern 1-punktig berührenden Curven eines linearen q-fach unendlichen Systems von Curven mit M beweglichen Schnittpunkten finden. Es ergibt sich:

$$\alpha_{1q} = 2(\alpha_q - q - 1)(M - q - 2) - (q + 1)\{\alpha_{q+1} - (\alpha_q - q - 1) - (M - q - 1)\} + 2(\alpha_q - q - 1) p;$$

---

*) Die Zahl α'' bestimmt sich, wie folgt. In jedem Punkte y'' berührt eine Curve des Netzes. Dieselbe zählt aber doppelt in der Gesammtheit der α_1 durch y'' gehenden Curven des Netzes, welche f berühren; also ist in der That jeder der übrigen $M - 2$ Schnittpunkte mit f als 2-werthiger zu y'' gehöriger Punkt x'' zu zählen, wie es obiger Satz verlangt.

oder wenn wir mit $[q]_M$ die Zahl der in einem Punkte q-punktig berührenden (in $q+1$ Punkten schneidenden) Curven einer in M beweglichen Punkten schneidenden linearen ∞^q-Schaar bezeichnen und analog $\alpha_{1q} = [1, q]_M$ setzen, die *Recursionsformel:*

$$[1, q]_M = 2\,[q]_{M-1}\,(M-2-q) - (q+1)\Big\{[q+1]_M - [q]_{M-1} - (M-1-q)\Big\} + 2p\,[q]_{M-1}.$$

In ganz analoger Weise kann man eine Formel bilden, welche die Zahl $[s, q]_M$ aus der Zahl $[s-1, q]_{M-1}$ bilden lehrt; und eine weitere Verallgemeinerung gibt schliesslich eine Recursionsformel für die Zahl $[q, q', \ldots q^{(\varrho)}]_M$, d. i. für die Zahl der an ϱ verschiedenen Stellen bez. q-, q'-, ... $q^{(\varrho)}$-punktig berührenden Curven einer linearen Schaar von der Mannigfaltigkeit $q + q' + \ldots + q^{(\varrho)}$ (vgl. Brill a. a. O.).

5) Wir geben noch einige Beispiele für die Bestimmung mehrfach berührender Curven aus einer nicht linearen Schaar, auf die wir uns schon früher bezogen (p. 407); und zwar beschränken wir uns auf *Kegelschnitt*schaaren. Zunächst folgt aus der obigen Formel für α_2, dass *es* $3k + r$ $(= 3n + w)$ *Kegelschnitte gibt, welche durch 3 feste Punkte gehen und die gegebene Curve osculiren.* Nehmen wir aber für die Schaar 2 beliebige Punkte und 1 Tangente fest, so gehen durch 2 benachbarte Punkte der C_n noch 2 C_2 der Schaar, während durch einen beliebigen Punkt derselben $2k + 4n - 4$ C_2 gehen, welche die C_n noch in einem andern Punkte berühren (vgl. p. 401); wir haben also eine Correspondenz $(4n-4,\ 2k+4n-4)_4$ zu betrachten. Dieselbe hat zunächst $6k + 4r$ eigentliche Coincidenzen; davon sind aber nach obiger Bemerkung über den Einfluss von Rückkehrpunkten (p. 457) noch $2r$ abzuziehen. *Es gibt daher* $2(3k + r) = 2(3n + w)$ *Kegelschnitte, welche unsere feste* C_n *osculiren, durch 2 Punkte gehen, und 1 Gerade berühren;* und dualistisch entsprechend gibt es ebenso viele, die ausserdem 2 Gerade berühren und durch 1 Punkt gehen. — Analog bestimmt sich *die Zahl der dreipunktig berührenden* C_2, *welche durch 1 Punkt gehen und 1 Gerade berühren* mittelst einer Correspondenz

$$(4n-6,\ 6k+2r-6)_6.$$

Die Zahl der Coincidenzpunkte findet man zunächst gleich $n + 3k + 3w + 5r$; davon sind aber nach jener Bemerkung noch $2r$ abzuziehen. Die übrig bleibenden Coincidenzen sind zwar alle eigentliche und liegen nicht in singulären Punkten der C_n, sind aber nicht alle durch eigentliche berührende Kegelschnitte bedingt. Jede von dem festen Punkte an die C_n gelegte Tangente nämlich ist doppelt genommen auch ein Kegelschnitt, welcher den gestellten Bedingungen genügt; er schneidet die C_n im Berührungspunkte ebenfalls in 4 zusammenfallenden Punkten. Da ferner die *beiden* in einem be-

liebigen Punkte der C_n osculirenden C_2 der Schaar für einen jener Berührungspunkte in die doppelt zählende Tangente desselben zusammenfallen, so zählt der Berührungspunkt einer jeden dieser k Doppellinien 2-fach als eine Lösung; und wir haben von obiger Zahl noch $2k$ abzuziehen. Dieselbe wird dann gleich

$$n + k + 3r + 3w = -8n - 8k + 6\alpha,$$

wenn $\alpha = 3k + r = 3n + w$ gesetzt wird; eine Zahl, welche, wie es bei dem sich selbst dualistischen Charakter der Aufgabe sein muss, symmetrisch in n, k und r, w ist. In letzterem Umstande haben wir gleichzeitig eine Controlle für die richtige Berücksichtigung der Rückkehrpunkte. —

Schliesslich kehren wir noch einmal zu den Formeln für die Zahlen α_q zurück, da die nähere Untersuchung derselben zu bemerkenswerthen geometrischen Beziehungen zwischen gewissen Curvensystemen führt. Wir werden dabei ein Gesetz der Reciprocität*) kennen lernen, welches in gewissem Sinne als Verallgemeinerung des Princips der Dualität anzusehen ist.

Es seien zunächst zwei Correspondenzen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ gegeben; es sei $\Phi = 0$ die Coincidenzcurve (p. 453) von φ, $\Psi = 0$ die von ψ; ferner mögen φ und ψ beide von der Ordnung r in den x, der Ordnung s in den y sein und keinen gemeinsamen Coincidenzpunkt haben. Wir betrachten die lineare Schaar von Correspondenzen $\varphi + \lambda\psi = 0$. Jeder Punkt von f wird dann Coincidenzpunkt einer Correspondenz der Schaar sein, und auch nur einer. Sollten nämlich zwei Correspondenzen der Schaar einen Coincidenzpunkt gemein haben, so müsste derselbe offenbar Coincidenzpunkt für alle Correspondenzen der Schaar sein, also auch für φ und ψ, was der Annahme widerspricht. Hieraus folgt, dass durch jeden Punkt von f nur *eine* der zu der Schaar $\varphi + \lambda\psi = 0$ gehörenden Coincidenzcurven hindurchgeht, d. h. dass diese Curven den Büschel $\Phi + \lambda\Psi = 0$ bilden; oder mit anderen Worten: *Die Gleichung der Coincidenzcurve einer Correspondenz $\varphi(x, y) = 0$ ist linear in den Coëfficienten von φ; einer linearen Schaar von Correspondenzen entspricht daher auch eine lineare Schaar von Coincidenzcurven.* Es wird dies durch die oben von uns berechneten Beispiele (bei $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$) bestätigt.

In der Schaar $\varphi + \lambda\psi = 0$ wird nun eine Zahl von Correspondenzen enthalten sein, für die zwei Coincidenzpunkte benachbart liegen, und zwar sind dies diejenigen, deren entsprechende Coincidenzcurven aus dem Büschel $\Phi + \lambda\Psi = 0$ die Curve $f = 0$ berühren. Wir kennen

*) Vgl. Brill: Math. Annalen, Bd. 4, p. 527.

aber nach dem Obigen (p. 452) die Ordnung der Curven Φ und Ψ, aber auch nach der Formel für α_1 die Zahl dieser berührenden Curven des Büschels und somit die Zahl der in genannter Weise ausgezeichneten Correspondenzen.

Für die spätere Anwendung dieser Ueberlegungen ist noch folgende Bemerkung von Nutzen. Für die Zahl α_q der q-punktig berührenden Curven einer linearen ∞^q-Schaar*) mit M beweglichen Schnittpunkten fanden wir oben den Werth (p. 461):

$$\alpha_q = (q+1)\left\{M + qp - q\right\}.$$

Setzen wir hierin $M-1$ statt M, d. h. betrachten wir eine Schaar von Curven von derselben Mannigfaltigkeit mit nur $M-1$ beweglichen Schnittpunkten, so erkennt man, dass es in ihr nur $\alpha_q - (q+1)$ q-punktig berührende Curven gibt. *Die eine in dem festen Punkte selbst q-punktig berührende Curve der Schaar zählt also* $(q+1)$-*fach unter der Gesammtheit der q-punktig berührenden Curven.* —

Es seien nun $(q+1)$ Curven gegeben $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$; wir betrachten die ∞^q-Schaar:

$$\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_q\varphi_q = 0,$$

deren einzelne Curven in M beweglichen (und ausserdem in a festen einfachen oder Doppel-Punkten von f) die Curve f schneiden. Durch die Berührungspunkte der $(q-1)$-punktig berührenden Curven der ∞^{q-1}-Schaar:

$$\varphi_1 + \mu_1\varphi_2 + \cdots + \mu_{q-1}\varphi_q = 0,$$

legen wir eine Curve Φ_0 (also die Coincidenzcurve einer Correspondenz zwischen einem Punkte von f und den Punkten, in welchen eine durch ihn gehende Curve der Schaar $(q-1)$-punktig berührt). Durch die entsprechenden Punkte der Schaar

$$\varphi_0 + \nu_1\varphi_2 + \nu_2\varphi_3 + \cdots + \nu_{q-1}\varphi_q = 0$$

legen wir eine andere Curve Φ_1 etc., so dass wir im Ganzen $q+1$ Curven $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_q$ erhalten. Irgend eine lineare Combination der so bestimmten $q+1$ ∞^{q-1}-Schaaren der φ gibt dann auf f eine Correspondenz, welche sich *linear***) aus den $q+1$ genannten (d. i. die Φ bestimmenden) Correspondenzen zusammensetzt; und also setzt sich die Coincidenzcurve derselben nach obigem Satze ebenfalls linear aus den Φ zusammen. Den q-fach unendlich vielen ∞^{q-1}-Schaaren, welche die gegebene ∞^q-Schaar der φ enthält, entspricht so eine

*) Unter *Schaar* soll hier immer eine *lineare Schaar* verstanden werden.

**) Einem Punkte x von f nämlich muss dann eine in ihm $(q-2)$-punktig berührende Curve φ der ∞^{q-1}-Schaar entsprechen, also eine Curve, die sich *linear* aus den Curven φ zusammensetzt; vgl. auch unten p. 472.

lineare ∞^q-Schaar von Curven Φ. Aus der letzteren wählen wir wieder eine ∞^{q-1}-Schaar

$$\text{(I)} \qquad \Phi_1 + \mu_1 \Phi_2 + \ldots + \mu_{q-1} \Phi_q = 0$$

aus. Jeder Curve derselben entspricht eine bestimmte ∞^{q-1}-Schaar von Curven φ, und zwar immer eine solche, welche die Curve φ_0 enthält; denn die bez. zu den Curven Φ_1, $\Phi_2 \ldots \Phi_q$ gehörenden Schaaren enthalten einzeln die Curve φ_0. In der Schaar (I) nun wird es eine Anzahl von $(q-1)$-punktig berührenden (q-punktig schneidenden) Curven geben. Einer solchen Curve Φ muss dann eine ∞^{q-1}-Schaar von Curven φ entsprechen, für welche q der in ihr enthaltenen $(q-1)$-punktig berührenden Curven zusammenfallen; denn jedem Schnittpunkte einer Curve Φ mit f entspricht *eine* daselbst $(q-1)$-punktig berührende Curve φ der zugehörigen Schaar von φ. Unter den ∞^{q-1}-Schaaren von Curven φ, welche in der gegebenen ∞^q-Schaar möglich sind und die Curve φ_0 enthalten, sind aber jedenfalls diejenigen, deren Curven sämmtlich durch einen Schnittpunkt von φ_0 mit f hindurchgehen (denn dies gibt *eine* lineare Bedingung für die q Parameter). In einer solchen Schaar zählt die in dem festen Punkte selbst $(q-1)$-punktig berührende Curve nach der soeben gemachten Bemerkung q-fach. Unter den Berührungspunkten der $(q-1)$-punktig berührenden Curven Φ unserer ∞^{q-1}-Schaar sind folglich jedenfalls die Schnittpunkte von f mit φ_0; ausserdem noch andere (nur von der Gesammtheit der Curven φ abhängende) Punkte, die uns später beschäftigen sollen.

*Die Reciprocität zwischen den Curven Φ und φ lässt sich demnach in folgender Weise aussprechen**): Gruppirt man die $q+1$ Curven φ zu $q+1$ Schaaren von je q und sucht diejenigen Curven einer solchen Schaar, welche f $(q-1)$-punktig berühren, so lässt sich durch die Berührungspunkte eine Curve Φ legen, welche ausser in diesen f nur noch in den festen Punkten der φ und den singulären Punkten trifft. Jede Schaar liefert so eine Curve Φ, welche zusammen wieder eine Schaar von $q+1$ Curven bilden. Auf letztere kann man dieselbe Operation, welche man auf die φ angewendet hat, wiederum anwenden; und die hieraus hervorgehenden beweglichen Curven sind alsdann keine anderen, als die φ, von denen man ausging.

Bevor wir weiter gehen, erläutern wir dies an einem *Beispiele*. Es sei $q = 2$, also das Netz

$$\varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0$$

gegeben. Wir bilden die 3 Curvenbüschel:

---

*) In der von Brill gegebenen Ableitung (a. a. O.) erscheinen diese Sätze als Anwendungen eines auch sonst wichtigen Determinantensatzes, auf den hier nicht eingegangen werden soll.

$$\varphi_0 + \lambda\varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0\,, \quad \varphi_2 + \nu\varphi_0 = 0\,.$$

In jedem von ihnen gibt es eine Anzahl berührender Curven, deren Berührungspunkte bez. durch die Curven $\Phi_2 = 0$, $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 0$ ausgeschnitten werden. Wir betrachten nun z. B. die einfach unendliche Reihe der Büschel

$$(\varphi_0 + \lambda\varphi_1) + \varrho\,(\varphi_1 + \mu\varphi_2) = 0\,,$$

welche alle Curven des Netzes umfasst, dieselben nur in besonderer Weise anordnet, indem allen Büscheln die Curve φ_1 gemeinsam ist. Einem Punkte x von f entspricht nun im ersten Büschel die Curve $\varphi_0(x)\,\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\,\varphi_0(y) = 0$, im zweiten die Curve $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\,\varphi_1(y) = 0$, also im Netze (bei unserer Anordnung) der Büschel von Curven:

$$\{\varphi_0(x)\,\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\,\varphi_0(y)\} + \varrho\,\{\varphi_1(x)\,\varphi_2(y) - \varphi_2(x)\,\varphi_1(y)\} = 0;$$

in der That eine Correspondenz, welche sich linear aus den durch die beiden ersten Büschel gegebenen Correspondenzen zusammensetzt. Ihre Coincidenzcurve ist demnach gegeben durch $\Phi_2 + \varrho\,\Phi_0 = 0$ (p. 464). Einer berührenden Curve des letzteren Büschels entspricht nun ein Büschel der φ, in welchem zwei berührende Curven zusammenfallen, welcher also entweder (in der geschilderten Weise) in einem Schnittpunkte von f mit φ_1 einen festen Punkt hat oder eine osculirende Curve des Netzes der φ enthält. Bezeichnen wir also die Coincidenzcurve der Correspondenz

$$\Phi_2(x)\,\Phi_0(y) - \Phi_0(x)\,\Phi_2(y) = 0$$

mit $X_1 = 0$, so ist $X_1 = \varphi_1 \,.\, L$, wo $L = 0$ auf f die Punkte ausschneidet, in denen Curven des Netzes osculiren. Diese Punkte aber sind von der speciellen Anordnung der Curven zu Büscheln, wie wir sie treffen, unabhängig; man hat also auch $X_2 = \varphi_2 \,.\, L$, $X_3 = \varphi_3 \,.\, L$, wenn $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ die berührenden Curven der Büschel $\Phi_0 + \varrho\Phi_1 = 0$, $\Phi_1 + \varrho\Phi_2 = 0$ bestimmen (dass auf den rechten Seiten bei φ_1, φ_2, φ_3 keine constante Factoren mehr auftreten können, wird weiterhin noch gezeigt werden). Es folgt hieraus, dass in *jedem* Büschel, welcher in dem Netze der Φ enthalten ist, Curven vorkommen, die $f = 0$ in den Schnittpunkten mit $L = 0$ berühren. Während also in einem beliebigen Punkte von f nur eine Curve des Netzes der Φ berührt, berühren in jedem dieser Punkte unendlich viele Curven dieses Netzes. Ein Punkt, in dem dies stattfindet, liegt aber bekanntlich auf der Jakobi'schen Curve desselben (p. 382); und somit haben wir den Satz:

Die Punkte, in denen eine Curve des Netzes der φ die Curve f osculirt, liegen auf der Jakobi'*schen Curve des Netzes der* Φ.*)

Wir können hier auch die Zahl dieser Punkte direct bestimmen. Die Φ schneiden in α_1 beweglichen Punkten, wo $\alpha_1 = 2\,(M + p - 1)$, wenn f keine Rückkehrpunkte hat. Die Coincidenzpunkte der durch einen Büschel der Φ gegebenen Correspondenz bestimmen sich daher mittelst einer Correspondenz $(\alpha_1, \alpha_1)_1$; und ihre Zahl ist gleich

$$\alpha_2 + M = 2\,(\alpha_1 + p - 1)\,.$$

Hieraus folgt in der That, wie oben (p. 460):

$$\alpha_2 = 3\,(M + 2p - 2)\,.$$

---

*) Man kann dies auch direct algebraisch nachweisen, wobei sich dann ergibt, dass L die schon früher erwähnte Coincidenzcurve der die osculirenden Curven bestimmenden Correspondenz mit $\gamma = 2$ ist (p. 461 Anmk.). — Wir bezeichnen mit $(\varphi\chi\psi)$ die Functionaldeterminante dreier Functionen φ, χ, ψ dividirt durch das Product ihrer Ordnungen; dann ist nach der Anmk. auf p. 460:

$$(1) \qquad \Phi_0 = (f\varphi_1\varphi_2)\,, \qquad \Phi_1 = (f\varphi_2\varphi_0)\,, \qquad \Phi_2 = (f\varphi_0\varphi_1)\,;$$

$$(2) \qquad X_0 = (f\Phi_1\Phi_2)\,, \qquad X_1 = (f\Phi_2\Phi_0)\,, \qquad X_2 = (f\Phi_0\Phi_1)\,;$$

also auch nach den Erörterungen des Textes:

$$(3) \qquad (f\Phi_1\Phi_2) = \varphi_0\,.\,L\,, \qquad (f\Phi_2\Phi_0) = \varphi_1\,.\,L\,, \qquad (f\Phi_0\Phi_1) = \varphi_2\,.\,L\,.$$

Ferner bestehen, wie schon auf p. 456 bemerkt, die Identitäten:

$$(f\Phi_0\Phi_1)\,\Phi_2 + (f\Phi_1\Phi_2)\,\Phi_0 + (f\Phi_2\Phi_0)\,\Phi_1 = (\Phi_0\Phi_1\Phi_2)\,f\,,$$
$$(f\varphi_0\varphi_1)\,\varphi_2 + (f\varphi_1\varphi_2)\,\varphi_0 + (f\varphi_2\varphi_0)\,\varphi_1 = (\varphi_0\varphi_1\varphi_2)\,f\,;$$

und durch Benutzung derselben findet man wegen (1) und (3) zur Bestimmung von L die Relation:

$$(4) \qquad (\varphi_0\varphi_1\varphi_2)\,.\,L = (\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\,,$$

womit der Satz des Textes bewiesen ist. Es lässt sich weiter zeigen, dass L immer eine ganze Function ist. Die φ mögen von der Ordnung m sein und der Einfachheit wegen nicht sämmtlich durch die Doppelpunkte von f gehen. Dann sind die Φ nach (1) von der Ordnung $2m + n - 3$; und L ist nach (3) von der Ordnung $3\,(m + n - 2)$, also in der That von derselben Ordnung, wie die Coincidenzcurve der auf p. 456 betrachteten Correspondenz (vgl. dazu p. 452);

$$(5) \qquad (f\varphi_0\varphi_1)\,\varphi_2\,(y) + (f\varphi_1\varphi_2)\,\varphi_0\,(y) + (f\varphi_2\varphi_0)\,\varphi_1\,(y) = 0\,.$$

Von den Schnittpunkten der letzteren Curve mit f liegen in jedem Doppelpunkte von f $\gamma\,(\gamma + 1) = 6$ vereinigt (nach dem Satze über uneigentliche Coincidenzen p. 454); in demselben liegen aber auch ebenso viele Schnittpunkte einer jeden der Curven $(f\Phi_i\Phi_k) = 0$ mit f, wie aus einem Satze auf p. 455 folgt (denn die Φ gehen als Coincidenzcurven alle durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von f). Die Curve $(f\Phi_i\Phi_k)$ schneidet also f in ganz denselben Punkten, wie das Product $\varphi_l\,.\,L$ und kann daher in der Form $\varphi_l\,.\,L + K\,.\,f$ dargestellt werden. Da sich somit L auch in den singulären Punkten von f verhält, wie die Coincidenzcurve der Correspondenz (5), so folgt, dass *L die von* Brill (Math. Annalen, Bd. 3, p. 462) *berechnete Function ist* (bis auf einen Zahlenfactor). — Die in den Gleichungen (3), (4) ausgesprochenen *Sätze über Functionaldeterminanten* schliessen sich an die von Clebsch (Crelle's Journal, Bd. 69 und 70) gegebenen an.

Ganz analog gestalten sich diese Verhältnisse im allgemeinen Falle. Wir haben hier zunächst noch zu zeigen, dass in einer ∞^{q-1}-Schaar von Φ nur M der $(q-1)$-punktig berührenden Curven bei der gewählten Gruppirung der q betrachteten ∞^{q-1}-Schaaren von Curven φ abhängen, die übrigen dagegen nur von der Gesammtheit der Curven φ; und zwar wollen wir nachweisen, dass diese übrigen die α_q Punkte sind, in denen eine Curve φ q-punktig berühren kann. Zu dem Zwecke stellen wir folgende Betrachtung an.

Eine in der gegebenen ∞^q-Schaar der φ enthaltene ∞^{q-1}-Schaar ist jedenfalls durch q aus ersterer beliebig herausgewählte Curven bestimmt. Wir betrachten nun eine solche ∞^{q-1}-Schaar, welche eine beliebige Curve φ (etwa φ_0) enthält und ausserdem andere zu einander benachbarte $q-1$ Curven φ, welche in $q-1$ zu einander benachbarten Punkten ξ von f je $(q-1)$-punktig berühren (d. i. q-punktig schneiden).*) Die zu der so construirten Schaar gehörige Curve Φ wird dann immer f in ξ $(q-2)$-punktig berühren, sonst aber noch in weiteren Punkten einfach schneiden, in denen andere Curven φ unserer Schaar die Curve f $(q-1)$-punktig berühren. Lassen wir nun ξ auf f wandern, so wird sich unsere ∞^{q-1}-Schaar mit ξ ändern (aber immer noch φ_0 enthalten); und insbesondere kann ξ so liegen, dass die zugehörige Curve Φ $(q-1)$-punktig berührt (q-punktig schneidet). In dem Falle haben wir in der betreffenden ∞^{q-1}-Schaar der φ nicht $q-1$, sondern q benachbarte Curven, welche f in den Punkten ξ je $(q-1)$-punktig berühren. Dies tritt nach dem Früheren *erstens* in den Schnittpunkten von f mit φ_0 ein (p. 465); *zweitens* in den α_q Punkten, wo eine Curve φ q-punktig berühren ($(q-1)$-punktig schneiden) kann, indem diese Curve dann doppelt zählt. In andern Punkten von f kann dies aber nicht eintreten. Eine anderswo $(q-1)$-punktig berührende Curve φ zählt nämlich immer einfach; durch q benachbarte Curven der Art ist daher eine in der ∞^q-Schaar der φ enthaltene ∞^{q-1}-Schaar schon völlig bestimmt, wird also nicht mehr die vollkommen willkürlich zu wählende Curve φ_0 enthalten. Unter den Berührungspunkten der $(q-1)$-punktig berührenden Φ der zu φ_0 gehörigen ∞^{q-1}-Schaar sind also in der That ausser den Schnittpunkten von φ_0 mit f nur *die von der Gesammtheit der φ abhängenden Punkte α_q* enthalten.

Diese Punkte sind aber je $(q-1)$-fach zu zählen. Da nämlich die Φ zufolge ihrer Definition f in α_{q-1} beweglichen Punkten treffen, wo nach p. 461 (wenn f zunächst keine Rückkehrpunkte hat):

$$\alpha_{q-1} = q\left\{M + (q-1)(p-1)\right\};$$

*) Solche Curven φ kann man in jedem Punkte von f bestimmen, da eine Curve φ gerade durch q (hier benachbarte) Punkte festgelegt wird.

so ist die Zahl A_{q-1} der Curven, welche der Schaar (I) angehören und $(q-1)$-punktig berühren:

$$A_{q-1} = q\left\{\alpha_{q-1} + (q-1)(p-1)\right\} = q^2 M + q(q^2-1)(p-1).$$

Diese Punkte sollen theilweise in den M nicht allen Curven φ gemeinsamen Schnittpunkten von φ_0 mit f liegen (denn durch die gemeinsamen Punkte gehen auch die Φ), theilweise in den α_q Punkten; d. h. es soll für alle Werthe von M die Relation bestehen:

$$q^2 M + q(q^2-1)(p-1) = \varkappa M + \lambda(q+1)(M+qp-q).$$

Hieraus folgt aber $\varkappa = 1$ und $\lambda = q-1$, q. e. d.

Die A_{q-1} Punkte werden durch eine Curve ausgeschnitten, die wir mit X_0 bezeichnen wollen, und welche ausserdem noch durch die singulären Punkte sowie durch die den φ gemeinsamen einfachen Punkte von f hindurchgeht. *Das Verhalten von X_0 in letzteren Punkten wollen wir bestimmen.* Dies können wir nach einem obigen Satze (p. 455), da X_0 Coincidenzcurve einer Correspondenz mit $(q-1)$-werthigem Punkte in $x=y$ ist, vermöge deren jedem Punkte x eine Curve Φ der Schaar (I) zugeordnet wird. Das Verhalten der Φ in den betreffenden Punkten kennen wir aber, da dieselben Coincidenzcurven von Correspondenzen sind, vermöge deren jedem Punkte x eine in ihm $(q-2)$-punktig berührende Curve φ zugehört. Und zwar liegen in jedem Doppelpunkte von f, in welchem σ feste Schnittpunkte der φ liegen, nach jenem Satze, indem $\gamma = q-1$ ist, $q(\sigma+q-1)$ Schnittpunkte der Φ, und also

$$\text{(II)} \qquad q\left\{q(\sigma+q-1)+q-1\right\} = q^2\sigma + q(q^2-1)$$

Schnittpunkte von X_0. In jedem einfachen Punkte von f dagegen, in dem die Φ σ Punkte mit f gemein haben, liegen $q\sigma$ Schnittpunkte der Φ, und also $q^2\sigma$ Schnittpunkte von X_0. Es ist nun leicht zu sehen, dass sich in allen Schnittpunkten von X_0 mit f das Product $\varphi_0 \,.\, L_q^{q-1}$ ebenso verhält, wenn $L_q = 0$ die Coincidenzcurve ist, welche die α_q Punkte ausschneidet. Für letztere nämlich fallen nach demselben Satze $(q+1)\sigma$ Schnittpunkte von L_q in jeden einfachen Punkt von f der zuletzt genannten Art, also in der That

$$\sigma + (q-1)(q+1)\sigma = q^2\sigma$$

Schnittpunkte des Productes $\varphi_0 L_q^{q-1}$. Ferner liegen in jedem Doppelpunkte von f, in denen σ feste Schnittpunkte der φ liegen, $(q+1)$ $.\,(\sigma+q)$ Punkte von L_q, also wie in (II)

$$\sigma + (q-1)(q+1)(\sigma+q) = q^2\sigma + q(q^2-1)$$

Punkte von $\varphi_0 \,.\, L_q^{q-1}$; und endlich geht letzteres Product einfach durch die M Schnittpunkte von φ_0 mit f und $(q-1)$-fach durch die

α_q Punkte, wie es sein soll. Bedeutet also C einen constanten Factor, so können wir (unter Adjunction von $f = 0$) setzen*):

$$X_0 = C \cdot \varphi_0 \cdot L_q^{q-1}. \tag{III}$$

Der Factor C aber kann nur ein Zahlenfactor sein, d. h. die Coëfficienten der φ und f nicht mehr enthalten. Andernfalls nämlich würde er durch sein Verschwinden aussagen, dass es in der Schaar (I) unendlich viele $(q-1)$-punktig berührende Curven Φ gibt (indem $X_0 = 0$); dann aber müsste entweder φ_0 unendlich viele Punkte mit f gemein haben, oder es müssten auch unendlich viele q-punktig berührende Curven φ in der gegebenen Schaar sein (also $L_q = 0$). Beide Bedingungen können aber offenbar nicht durch das Verschwinden eines einzigen Ausdrucks C angezeigt werden. Da somit C ein Zahlenfactor ist, muss derselbe der Symmetrie wegen in allen Gleichungen den gleichen Werth haben, welche aus (III) durch Vertauschung von φ_0 mit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ entstehen; und wir können ihn in die Definition der X_i eingehen lassen, wenn $X_1, X_2, \ldots X_q$ entsprechende Bedeutung wie X_0 haben. *Es bestehen dann also die Gleichungen:*

$$X_i = \varphi_i \cdot L_q^{q-1}. \tag{IV}$$

Damit ist obiges Reciprocitätsgesetz völlig bewiesen (p. 466).

Dasselbe findet seinen Ausdruck in dem Entsprechen der Zahlen M und α_{q-1}, d. h. der Zahlen für die beweglichen Schnittpunkte der Curven φ und Φ. Aus jeder Relation zwischen den Zahlen M, α_{q-1} und andern von den φ abhängenden Zahlen kann man daher eine zweite ableiten, indem man M mit α_{q-1} vertauscht und jene anderen Zahlen mit den ihnen im Systeme der Φ entsprechenden. Insbesondere wirft sich hier die Frage auf, welche Zahl β_q in letzterem als der Zahl α_q entsprechend angesehen werden muss. Die Punkte α_q sind zusammen mit den (eventuell mehrfach zu zählenden) Rückkehrpunkten von f die eigentlichen Coincidenzpunkte einer Correspondenz, deren Coincidenzcurve durch $L_q = 0$ gegeben ist. Um die Zahl β_q zu finden, haben wir also die Curve L_q für das System der Φ statt für das der φ zu bilden. *Wir wollen zeigen, dass diese Curve mit der Curve L_q identisch ist.*

Die Correspondenz, für welche L_q Coincidenzcurve ist, ordnet jedem Punkte x eine in ihm $(q-1)$-punktig berührende Curve der Schaar von Curven φ zu, jedem Punkte y aber eine Curve, welche

---

*) Man überzeugt sich auch leicht, dass auf beiden Seiten die Ordnungen übereinstimmen; denn (vgl. p. 452) L_q ist von der Ordnung $(q+1)\{m + \frac{1}{2}(n-3)q\}$, wo m die Ordnung von φ_0, n die von f bezeichnet, und X_i ist von der Ordnung:

$$q\{q[m + \tfrac{1}{2}(n-3)(q-1)] + \tfrac{1}{2}(n-3)(q-1)\} = q^2 m + \tfrac{1}{2}(n-3)q(q-1).$$

auf f die Berührungspunkte der durch y gehenden $(q-1)$-punktig berührenden φ ausschneidet, d. h. eine Curve der Schaar Φ. Diese Correspondenz wird daher durch eine Gleichung dargestellt, welche linear in den $\varphi(y)$ und linear in den $\Phi(x)$ ist. Betrachtet man nun einen Punkt x, für welchen Φ_0 verschwindet, so muss die in ihm $(q-1)$-punktig berührende Curve φ zufolge der Definition von Φ_0, eine lineare Combination der Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ sein; d. h. in unserem lineo-linearen Ausdrucke muss jedenfalls Φ_0 in φ_0 multiplicirt sein, die übrigen Φ dagegen dürfen den Factor φ_0 nicht haben. Betrachtet man ferner einen auf φ_0 gelegenen Punkt y von f, so erkennt man ebenso, dass Φ_0 auch nicht in $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ multiplicirt vorkommen darf. Zu dem Producte $\Phi_0 \varphi_0$ kann ferner kein constanter Factor (keine simultane Invariante der φ und f) hinzutreten. Das Verschwinden eines solchen nämlich würde zur Folge haben, dass in der Gleichung der Correspondenz ein Glied mit $\varphi_0(y)$ nicht mehr vorkommt. Vermöge der Correspondenz würde also jedem Punkte x von f eine in ihm $(q-1)$-punktig berührende Curve aus der durch $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_q$ bestimmten ∞^{q-1}-Schaar zugeordnet; die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass in dieser Schaar unendlich viele $(q-1)$-punktig berührende φ sind, ist aber offenbar das identische Verschwinden von Φ_0; dieselbe Bedingung kann daher nicht durch das Verschwinden *einer* Invariante ausgedrückt werden. Das Product $\Phi_0 \varphi_0$ kann sonach in der Correspondenzgleichung nur in einen Zahlenfactor multiplicirt sein; ein solcher aber muss der Symmetrie wegen dann ebenso bei den Gliedern $\Phi_1 \varphi_1, \ldots \Phi_q \varphi_q$ auftreten. *Die fragliche Correspondenz kann man daher in folgender Form darstellen**):

$$\Phi_0(x) \cdot \varphi_0(y) + \Phi_1(x) \cdot \varphi_1(y) + \cdots + \Phi_q(x) \cdot \varphi_q(y) = 0.$$

Stellt man die entsprechende Correspondenz für die Φ auf, so *erhält man ganz dieselbe Gleichung;* nur sind die x und y vertauscht. Man hat nämlich Φ_i statt φ_i, X_i statt Φ_i zu schreiben; dann sondert sich aber wegen (IV) ein Factor L_q^{q-1} ab, und man erhält das erwähnte Resultat. Da nun die beiden Correspondenzen dieselben sind, so sind auch ihre Coincidenzcurven identisch, q. e. d.

Die aus vorstehenden Betrachtungen geschlossenen algebraischen Resultate behalten offenbar ihre Gültigkeit, wenn die Curve f Rückkehrpunkte besitzt; es rücken dann nur einzelne der α_q eigentlichen Coincidenzpunkte in diese Rückkehrpunkte (in näher zu bestimmender Weise) hinein. Die Untersuchung dieser Verhältnisse wird uns zu der geforderten Bestimmung der Zahl β_q führen. — Die Schnittpunkte von L_q mit f, welche eigentliche Coincidenzen geben, zerfallen in 2

*) Vgl. dazu das Beispiel $q = 2$ auf p. 456.

Gruppen: die nicht in den Rückkehrpunkten liegenden Punkte α_q und die r Rückkehrpunkte von f, durch welche die Curven φ zunächst nicht hindurchgehen mögen. In jedem Punkte der ersteren Gruppe berührt *eine* Curve φ q-punktig, und zwar geht *jede* Curve φ, welche daselbst q benachbarte Punkte von f enthält, auch durch einen $(q+1)^{\text{ten}}$ benachbarten Punkt von f. In einem Punkte derselben Gruppe berührt ebenfalls *eine* Curve Φ q-punktig (eventuell mehrfach zählend), ausserdem aber *einfach unendlich viele* Curven Φ je $(q-1)$-punktig.*) In einem Rückkehrpunkte dagegen verhalten sich die φ gerade so, wie die Φ in einem der α_q Punkte; in der That berührt jede der einfach unendlich vielen φ, welche durch den Rückkehrpunkt und $q-2$ benachbarte Punkte gehen $(q-1)$-punktig, da der Rückkehrpunkt doppelt zählt; und unter diesen wird es eine (event. mehrfach zählende) Curve geben, welche noch einen $(q-1)^{\text{ten}}$ benachbarten Punkt von f (d. i. zusammen wieder $q+1$ benachbarte Punkte) enthält. Hieraus folgt nach unserem Reciprocitätsgesetze, dass sich umgekehrt die Φ in den Rückkehrpunkten von f verhalten wie die φ in den Punkten α_q; d. h. wir haben $\beta_q = r$ zu nehmen: *Vermöge der Reciprocität zwischen den φ und Φ entsprechen sich die Zahlen α_q und r.*

Das besondere Verhalten der Φ in den Rückkehrpunkten kann nur dadurch begründet sein, dass dieselben sämmtlich (als Coincidenzcurven) durch die Rückkehrpunkte hindurchgehen; denn andernfalls würde für sie dieselbe Schlussweise wie für die φ gültig sein. Hieraus kann man rückwärts schliessen, dass unsere Schlussweise auch für die φ ungültig wird, wenn dieselben in den Rückkehrpunkten gemeinsame feste Punkte haben, d. h. dass sich diese dann verhalten wie die α_q Punkte. *Gehen also die φ sämmtlich durch r' Rückkehrpunkte von f hindurch, so entsprechen sich die Zahlen α_q und $r-r'$ oder r und $\alpha_q + r'$, so dass jeder der r' Rückkehrpunkte sich selbst entspricht.* —

Die letzteren Ueberlegungen gestatten uns endlich auch die in den Gleichungen auf p. 460 f. vorläufig mitgetheilten Reductionen zu bestimmen, welche die Zahl α_q beim Auftreten von Rückkehrpunkten erleidet. Wir betrachten eine q-fach unendliche Schaar von Curven φ, für welche M, r, r' die angegebenen Bedeutungen haben mögen. Die Zahl der Curven φ, welche durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen und die Grundcurve $(q-1)$-punktig berühren, ist dann:

$$\alpha_{q-1} = q\left\{M + (q-1)(p-1)\right\} - \varrho r - \varrho' r',$$

wo ϱ, ϱ' noch zu bestimmen sind. Hieraus folgt aber, wenn man nach unserem Reciprocitätsgesetze α_{q-1} mit M, r mit $\alpha_q + r'$, vertauscht, die andere Gleichung:

---

*) Man erkennt dies in ganz derselben Weise, wie oben das Entsprechende für $q = 2$.

$$M = q\,\{\alpha_{q-1} + (q-1)(p-1)\} - \varrho\,(\alpha_q + r') - \varrho' r',$$

und durch Elimination von α_{q-1} aus beiden Gleichungen:

$$\varrho\,\alpha_q = (q^2-1)(M+qp-q) - \varrho\,q\,r - r'\,\{\varrho + (q+1)\,\varrho'\}.$$

Für $r = r' = 0$ ist aber bekanntlich $\overset{\bullet}{\alpha}_q = (q+1)(M+qp-q)$, und somit $\varrho = q-1$. Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so haben alle Glieder derselben den Factor $(q-1)$ bis auf den in ϱ' multiplicirten Term; es ist also $\varrho' = \pm (q-1)$ zu nehmen, so dass

$$\alpha_q = (q+1)(M+qp-q) - qr - [1 \pm (q+1)]\,r'.$$

Diese Zahl muss aber für $r = r' = 1$, $M = n-2$, $q = 1$, d. h. wenn man den von einem Rückkehrpunkte ausgehenden Strahlbüschel betrachtet, nach p. 457 den Werth $k-3$ annehmen, was nur bei Wahl des negativen Zeichens eintritt. Man hat also den Satz:

In einer q-fach unendlichen linearen Schaar von Curven, welche auf f beliebige gemeinsame feste Punkte haben und unter diesen r' Rückkehrpunkte von f, ausserdem aber f in M beweglichen Punkten treffen, gibt es

$$\alpha_q = (q+1)(M+qp-q) - q\,(r-r')$$

Curven, die f (nicht in den festen Punkten) q-punktig berühren. Dabei ist p das Geschlecht, r die Zahl der Rückkehrpunkte von f.

Es sei schliesslich bemerkt, dass sich analoge Reciprocitätsgesetze für die niederen aus der ∞^q-Schaar der φ auszuscheidenden linearen Mannigfaltigkeiten von Curven φ aufstellen lassen.*) Dieselben gestatten dann die genaue Bestimmung der an verschiedenen Punkten von f mehrpunktig berührenden Curven (vgl. Brill, a. a. O.).

IX. Eindeutige Abbildung zweier Ebenen auf einander.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen über algebraische Curven bildete die Theorie der linearen Transformation. Wir lernten letztere als analytischen Ausdruck für die projectivische Beziehung zweier Ebenen zu einander auffassen, und konnten demgemäss die von uns allein berücksichtigten Eigenschaften der Curven als diejenigen definiren, die durch beliebige (reelle oder imaginäre) Projection der Curven nicht geändert werden. Im Anschlusse an diese Auffassung trat zuerst die Theorie der ternären algebraischen Formen und mit ihr die symbolische Bezeichnung und Rechnung in den Vordergrund, um einen eleganten algebraischen Apparat für die geometrische Ueberlegung zu liefern. Bei weiterem Fortschreiten jedoch haben wir die

---

*) Es sei darauf hingewiesen, dass diese Reciprocitätsgesetze in enger Beziehung stehen zu dem gewöhnlichen Dualitätsgesetze, wie dieses bei Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen auftritt (vgl. auch die Anmk. auf p. 385).

Grenzen des durch diese Gesichtspunkte bezeichneten Gebietes allmählich überschritten: In der That boten uns schon die gegenseitigen Beziehungen zwischen der Hesse'schen und Steiner'schen Curve ein Beispiel für die Untersuchung zweier nicht linear, aber doch eindeutig auf einander bezogenen Curven, und noch mehr wurden wir beim Studium der Geometrie auf einer Curve gelegentlich zu der Bemerkung veranlasst, dass die entwickelten Sätze nicht nur gegenüber *linearen*, sondern überhaupt gegenüber *eindeutigen* Transformationen der Grundcurve einen invarianten Charakter zeigen, d. h. für die transformirte Curve ebenso gelten, wie für die ursprüngliche. Während wir aber hier nur von zwei einzelnen, eindeutig auf einander bezogenen Curven sprachen, kann man auch die Frage stellen, ob es möglich ist, zwei ganze Ebenen Punkt für Punkt eindeutig auf einander zu beziehen, und welche Eigenschaften derartigen Transformationen zukommen. Diese auf die *ganze* Ebene bezüglichen Transformationen sollen uns hier zunächst allein beschäftigen; auf die anderen, nur für zwei einzelne Curven eindeutigen werden wir bei einer anderen Gelegenheit eingehen.

Die Möglichkeit einer nicht linearen eindeutig umkehrbaren Beziehung zwischen zwei Ebenen zeigt sofort ein einfachstes Beispiel: die *quadratische Verwandtschaft.**) Dieselbe wird zwischen den Punkten x und y zweier vereinigt oder getrennt gedachten Ebenen E_x und E_y vermittelt durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \varrho x_1 = y_2 y_3 , \quad \varrho x_2 = y_3 y_1 , \quad \varrho x_3 = y_1 y_2 ;$$

und diese geben unmittelbar die ebenfalls eindeutige Umkehrung:

$$(2) \qquad \sigma y_1 = x_2 x_3 , \quad \sigma y_2 = x_3 x_1 , \quad \sigma y_3 = x_1 x_2 .$$

Wir wollen diesen für das folgende besonders wichtigen Specialfall noch näher betrachten. Einer geraden Linie $u_x = 0$ entspricht vermöge (1) in E_y ein Kegelschnitt

$$(3) \qquad u_1 y_2 y_3 + u_2 y_3 y_1 + u_3 y_1 y_2 = 0$$

und umgekehrt einer Linie $v_y = 0$ vermöge (2) in E_x ein Kegelschnitt

$$v_1 x_2 x_3 + v_2 x_3 x_1 + v_3 x_1 x_2 = 0 ;$$

wir sehen, dass die Beziehung beider Ebenen auf einander vollkommen dieselbe ist. Die *Eindeutigkeit* dieser Beziehung wird geometrisch folgendermassen evident. Dem Schnittpunkte zweier Linien $u_x = 0$

---

*) Sie wurde zuerst betrachtet von Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833, und vorher im Crelle's Journal, Bd. 8; später von Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit, etc. Gelegentlich finden sich quadratische Verwandtschaften auch schon bei Poncelet (Traités des propriétés projectives des figures, 1822, p. 198) und Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5).

und $u_x' = 0$ in E_x entsprechen in E_y die Schnittpunkte des Kegelschnittes (3) mit dem Kegelschnitte

$$u_1' y_2 y_3 + u_2' y_3 y_1 + u_3' y_1 y_2 = 0 .$$

Wir bemerken aber, dass von diesen vier Schnittpunkten drei immer dieselben sind: die Ecken des Dreiecks $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. *Den Geraden der einen Ebene entsprechen also Kegelschnitte durch drei feste Punkte, „Fundamentalpunkte", in der andern; und dem Schnittpunkte zweier Geraden der vierte bewegliche Schnittpunkt der beiden zugehörigen Kegelschnitte.**)

In der Weise können wir uns diese *„quadratische Verwandtschaft"* überhaupt geometrisch definirt denken: wir setzen die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Geraden einer Ebene entsprechend zu der Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Kegelschnitte eines Netzes mit drei festen Fundamentalpunkten. Den Kegelschnitten durch einen Punkt der einen sind dann die Geraden durch einen Punkt der andern Ebene zugeordnet; jedem Punkte der einen Ebene entspricht also der Schnittpunkt zweier (und somit unendlich vieler) Geraden der andern Ebene und umgekehrt. Demgemäss können wir die algebraische Darstellung der Verwandtschaft allgemeiner folgendermassen fassen. Es seien Q_1, Q_2, Q_3 und Q_1', Q_2', Q_3 beliebige lineare Functionen in y_1, y_1, y_3, dann geben die beiden linearen Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 &= 0 \\ Q_1' x_1 + Q_2' x_2 + Q_3' x_3 &= 0 \end{aligned}$$

wieder unsere Beziehung; denn durch Auflösung erhalten wir**):

---

*) Von den Fundamentalpunkten können zwei oder alle drei einander benachbart liegen, wo sich dann alle Kegelschnitte des Netzes bez. ein- oder zweipunktig berühren.

**) Die Gleichungen (4) kann man in der Form schreiben $\Sigma\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0$, $\Sigma\Sigma b_{ik} x_i y_k = 0$. Nimmt man dann insbesondere $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ und lässt die Ebenen E_x und E_y zusammenfallen, so bilden je zwei entsprechende Punkte x und y ein conjugirtes Polepaar in Bezug auf die beiden Kegelschnitte $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$. Die Fundamentalpunkte der einen Ebene fallen mit denen der andern zusammen und bilden die Ecken des beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks. — Eine andere einfache geometrische Darstellung der Beziehung ergibt sich, wenn man zwei Fundamentalpunkte (bei vereinigter Lage beider Ebenen) in die imaginären Kreispunkte, den dritten in den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems legt. Setzen wir demgemäss:

$$\frac{x_1}{x_3} = x + iy , \qquad \frac{x_2}{x_3} = x - iy , \qquad \frac{y_1}{y_3} = \xi + i\eta , \qquad \frac{y_2}{y_3} = \xi - i\eta ,$$

so gehen die Gleichungen (1) für $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$ über in:

$$x = \frac{\xi}{\varrho^2} , \qquad y = -\frac{\eta}{\varrho^2} ;$$

und diese Gleichungen stellen bekanntlich die sogenannte Verwandtschaft der *reciproken Radien* dar.

$\varrho x_1 = Q_2 Q_3' - Q_3 Q_2'$, $\varrho x_2 = Q_3 Q_1' - Q_1 Q_3'$, $\varrho x_3 = Q_1 Q_2' - Q_2 Q_1'$, und die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ stellen in der That wieder drei Kegelschnitte mit drei festen Punkten dar, den Fundamentalpunkten der Ebene E_y. Die Umkehrung dieser Formeln würde sich ergeben, wenn wir die Gleichungen (4) nach den y_i ordnen und auflösen wollten.

Wir bezeichnen mit β_1, β_2, β_3 die drei Fundamentalpunkte in E_y, mit α_1, α_2, α_3 die drei Fundamentalpunkte in E_x. *Für diese Punkte selbst ist unsere Verwandtschaft nicht mehr eindeutig;* und solche Ausnahmepunkte treten bei allen höheren eindeutigen Beziehungen auf. Dem Punkte α_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) entsprechen nämlich nach (1) und (2) *alle* Punkte der Geraden $\overline{\beta_2 \beta_3}$ ($y_1 = 0$) in E_y; und umgekehrt entspricht *jedem* Punkte dieser Geraden ein und derselbe Punkt α_1 in E_x. Da aber die Gerade $\overline{\beta_2 \beta_3}$ die Punkte β_2, β_3 enthält, denen bez. die ganzen Geraden $\overline{\alpha_3 \alpha_1}$, $\overline{\alpha_3 \alpha_2}$ entsprechen, so erleidet gleichwohl der Satz, dass *jeder* Geraden in dem einen Systeme in dem andern ein Kegelschnitt durch die drei Fundamentalpunkte zugehört, für die Gerade $\overline{\beta_2 \beta_3}$ keine Ausnahme.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen können wir leicht die Aenderungen angeben, welchen eine Curve durch unsere Transformation unterworfen wird. Es ist klar, dass einer C_n in E_x eine C_{2n}' in E_y entspricht, deren Gleichung sich einfach durch Einsetzen von $y_2 y_3$ statt x_1 etc. aus der Gleichung der C_n ergibt. Da aber die Geraden $\alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_3 \alpha_1$, $\alpha_1 \alpha_2$ von der C_n in je n Punkten geschnitten werden, denen immer derselbe Punkt (bez. β_1, β_2, β_3) in E_y entspricht, so geht die C_{2n}' durch die Punkte β_1, β_2, β_3 je n-mal; und zwar werden diese n Zweige der C_{2n}' alle von einander getrennt verlaufen, wenn die n Schnittpunkte der C_n mit der betreffenden Fundamentalgeraden der andern Ebene alle von einander getrennt liegen. Geht dagegen die C_n durch einen Fundamentalpunkt α_1, so wird von der zugehörigen C_{2n}' ein fester Theil, die α_1 entsprechende Gerade $\overline{\beta_2 \beta_3}$ abgesondert: es bleibt nur eine Curve von der Ordnung $2n - 1$; und dieselbe geht durch β_2 und β_3 nur noch je $(n - 1)$-mal hindurch.

Allgemein entspricht daher einer Curve n^{ter} Ordnung der einen Ebene, welche durch die Fundamentalpunkte α_1, α_3, α_3 derselben bez. k_1-, k_2-, k_3-mal hindurchgeht in der andern Ebene eine Curve von der Ordnung $2n - k_1 - k_2 - k_3$, welche durch die Fundamentalpunkte β_1, β_2, β_3 dieser Ebene bez. $n - (k_2 + k_3)$, $n - (k_3 + k_1)$, $n - (k_1 + k_2)$ mal hindurchgeht. So entspricht z. B. einer C_4 mit je einem Doppelpunkte in α_1, α_2, α_3 eine C_2, die nicht durch β_1, β_2, β_3 hindurchgeht; und umgekehrt jedem solchen Kegelschnitte eine C_4 mit 3 Doppelpunkten in α_1, α_2, α_3.

Durch directe Verallgemeinerung dieser Anschauung werden wir zu der geometrischen Definition einer allgemeinen eindeutigen Transformation der Ebene geführt, einer sogenannten *rationalen* oder Cremona'schen Transformation; Cremona ist es nämlich, welcher diese wichtige Theorie zuerst in voller Allgemeinheit aufgestellt hat.*) An Stelle des Kegelschnittsystems mit 3 festen Punkten haben wir ein doppelt unendliches lineares System von Curven n^{ter} Ordnung mit einem beweglichen, also $n^2 - 1$ festen Schnittpunkten zu setzen. Nun sind aber nach unserem Fundamentaltheoreme über Schnittpunktsysteme (vgl. p. 427) durch $\frac{1}{2} n (n+3)$ Schnittpunkte zweier Curven n^{ter} Ordnung den übrigen $\frac{1}{2} (n-1 (n-2)$ Punkte im Allgemeinen schon völlig bestimmt. Soll daher bei $n^2 - 1$ festen Schnittpunkten noch ein beweglicher möglich sein, so müssen diese $n^2 - 1$ festen Punkte eine ganz besondere Lage zu einander haben, bez. die Curven des Systems sich in ihnen besonders verhalten; und die Feststellung dieser Verhältnisse ist im Folgenden unsere wesentliche Aufgabe. Daran knüpft sich dann von selbst eine Erörterung über die Natur der die Transformation vermittelnden Functionen, und die andere Frage, ob noch andere eindeutige Transformationen einer Ebene möglich sind, als die durch solche Curvensysteme mit $n^2 - 1$ festen Punkten vermittelten.

Eine eindeutig umkehrbare Transformation sei durch die drei Gleichungen

$$\varrho y_i = f_i (x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

gegeben, wo die f_i Functionen n^{ter} Ordnung sind, welche keinen Factor gemein haben, und deren Functionaldeterminante nicht identisch verschwindet.**) Nehmen wir an, es sei in Folge derselben jedem Punkte y umgekehrt *ein* Punkt x zugeordnet vermittelst der Gleichungen:

$$\sigma x_i = \varphi_i (y_1, y_2, y_3), \tag{6}$$

wo die φ_i rationale, ganze Functionen ν^{ter} Ordnung in den y sein mögen.

Den Geraden $u_x = 0$ in E_x entsprechen dann die Curven ν^{ter} Ordnung $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ in E_y und den Geraden $v_y = 0$ in E_y die Curven n^{ter} Ordnung $\Sigma v_i f_i$ in E_x. Den Schnittpunkten von

---

*) In den beiden Abhandlungen: Sulle transformazioni geometriche delle figure piane, Memorie dell' Accademia di Bologna, Serie II, t. 2, 1863 und t. 5, 1865; abgedruckt in Battaglini's Giornale, t. 1 und 3. Vgl. die zusammenfassenden (für den Text benutzten) Darstellungen von Cayley: On the rational transformations between two spaces, Proceedings of the London math. Society, vol. 3, 1870; und Rosanes: Ueber rationale Substitutionen, Crelle's Journal, Bd. 73, 1871; sowie Bulletin des sciences mathématiques, vol. 5, p. 207. — Verallgemeinerungen für mehrdeutige Abbildungen findet man bei Wiener: Math. Annalen, Bd. 3, p. 11.

**) In letzterem Falle würden die drei Curven f einem Büschel angehören, vgl. p. 377, Anmk.

$$u_x = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma v_i f_i = 0$$

entsprechen also die Schnittpunkte von

$$v_y = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma u_i \varphi_i = 0 .$$

Die Anzahl derselben muss aber wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit unserer Beziehung zwischen E_x und E_y beide Male die gleiche sein; also ist $n = \nu$:

Die eindeutig umkehrbaren Substitutionen sind von derselben Ordnung wie ihre inversen.

Suchen wir den Punkt x, welcher dem Durchschnitte zweier in E_y gelegenen Geraden v und w entspricht, so haben wir aus den Gleichungen:

$$(7) \qquad v_y \equiv \Sigma v_i f_i = 0 , \quad w_y \equiv \Sigma w_i f_i = 0 , \quad u_x = 0$$

die x zu eliminiren. Das Endresultat, welches die u zum Grade n^2, die v, w je zum Grade n enthält, gibt die Gleichung des Productes der n^2 Schnittpunkte der Curven (7). Unter letzteren muss sich der gesuchte befinden, dessen Gleichung, wie wir wissen, durch $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ dargestellt wird, der Ausdruck $\Sigma u_i \varphi_i$ muss also, wenn wegen (7)

$$y_1 = v_2 w_3 - w_2 v_3 , \quad y_2 = v_3 w_1 - w_3 v_1 , \quad y_3 = v_1 w_2 - w_1 v_2$$

gesetzt wird, ein Factor des Eliminationsresultates sein. Aber auch $\Sigma u_i \varphi_i$ enthält dann die v, w je in der n^{ten} Ordnung; die übrigen Factoren jenes Resultates können daher v, w nicht mehr enthalten, und man hat den Satz:

Je zwei Curven des Systems $\Sigma v_i f_i = 0$ schneiden sich nur in einem beweglichen und in $n^2 - 1$ festen Punkten, „den Fundamentalpunkten der Transformation“. Dasselbe gilt natürlich für das System der Curven $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ in der andern Ebene. *Jede eindeutige Beziehung der beiden Ebenen auf einander ist daher eine* Cremona'*sche.*

Wir haben nunmehr die Lage der $n^2 - 1$ festen Punkte in den beiden Ebenen festzustellen. Da den Punkten einer Geraden $v_y = 0$ eindeutig die Punkte einer Curve $\Sigma v_i f_i = 0$ zugeordnet sind, so folgt nach einem früheren Theoreme (p. 459), dass diese Curve und die Gerade von demselben Geschlechte sind; d. h. *die Curven des eine eindeutige Transformation vermittelnden Netzes sind sämmtlich vom Geschlechte $p = 0$:* sie haben mehrfache Punkte, welche mit $\frac{1}{2}(n-1) \cdot (n-2)$ Doppel- bez. Rückkehrpunkten äquivalent sind. Wir wollen nun zeigen, *dass diese vielfachen Punkte sämmtlich in den festen Fundamentalpunkten liegen müssen.* Nehmen wir nämlich an, dass in ihnen die hinreichende Zahl noch nicht vereinigt wäre, so müsste jede Curve des doppelt unendlichen Netzes ausser den festen jedenfalls noch einen Doppelpunkt besitzen. Da es aber auch nur doppelt unendlich viele Punkte in einer Ebene gibt, so könnte dies nur in den beiden folgen-

den Fällen eintreten. *Entweder* müsste jeder Punkt ein solcher Doppelpunkt sein, d. h. die drei Gleichungen:

$$\Sigma v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0, \quad \Sigma v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_2} = 0, \quad \Sigma v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_3} = 0$$

müssten für jedes Werthsystem x_1, x_2, x_3 ein bestimmtes Werthsystem v_1, v_2, v_3 ergeben, im Ganzen also *zwei*fach unendlich viele solche Werthsysteme. Dann aber müssten sich die drei Gleichungen auf eine reduciren, d. h. es beständen die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \frac{\partial f_1}{\partial x_2} : \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} : \frac{\partial f_2}{\partial x_2} : \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} : \frac{\partial f_3}{\partial x_2} : \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$

was der Voraussetzung widerspricht, dass f_1, f_2, f_3 keinen gemeinsamen Factor besitzen. *Oder* es gäbe *ein*fach unendlich viele Werthsysteme x, denen je ein Werthsystem v zugehört, nämlich diejenigen, für welche die Functionaldeterminante der f_i verschwindet; und es müsste jeder solche Punkt x Doppelpunkt für einfach unendlich viele Curven des Netzes sein. Dann würden aber für je zwei dieser einfach unendlich vielen Curven vier Schnittpunkte in x zusammenfallen, während wir voraussetzen, dass je zwei Curven f sich nur in einem beweglichen Punkte schneiden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Von den allen Curven des Netzes gemeinsamen Fundamentalpunkten wird nun im Allgemeinen jeder einer mehrfachen Anzahl von Schnittpunkten je zweier Curven äquivalent sein; es können jedoch höhere als $(n-1)$-fache Punkte nicht auftreten, denn sonst würden alle Curven φ_i zerfallen. Nehmen wir an, es seien α_1 einfache Punkte aller Curven, α_2 Doppelpunkte, α_3 dreifache, ... α_{n-1} $(n-1)$-fache Punkte darunter, so müssen dieselben zusammen ein System von $n^2 - 1$ Punkten darstellen, d. h. man muss haben:

$$(8) \qquad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1.$$

Dabei setzen wir voraus, dass die Curven φ sich in den Fundamentalpunkten nicht berühren und dass die Tangenten einer beliebigen Curve φ in den vielfachen Punkten getrennt verlaufen.

Eine zweite Relation für die Zahlen α_i folgt aus der Bemerkung, dass ein k-facher Punkt mit getrennten Tangenten immer mit $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten äquivalent ist (p. 329). Da nämlich die Gesammtzahl der Singularitäten gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sein muss (d. i. $p = 0$), so haben wir:

$$(9) \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

und ferner durch Combination mit (8):

(10) $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+3) - 2$.*)

Für ein bestimmtes n erhält man aus diesen beiden Gleichungen je nach der Zahl ihrer brauchbaren ganzzahligen Lösungen eine bestimmte Reihe verschiedener Möglichkeiten für die Transformation, wofür von Cremona und Cayley Tabellen gegeben sind. Von $n = 1$ bis $n = 7$ hat man z. B.:

n	2	3	4	5	6	7
α_1	3	4	6, 3	8, 3, 0	10, 1, 4, 3	12, 2, 0, 5, 3
α_2		1	0, 3	0, 3, 6	0, 4, 1, 4	0, 3, 3, 0, 5
α_3			1, 0	0, 1, 0	0, 2, 3, 0	0, 2, 4, 3, 0
α_4				1, 0, 0	0, 0, 0, 1	0, 1, 0, 1, 0
α_5					1, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0, 1
α_6						1, 0, 0, 0, 0

Den in E_x gegebenen Fundamentalpunkten α entsprechen nun in E_y nicht einzelne, sondern je unendlich viele Punkte, wie schon das Beispiel der quadratischen Transformation zeigte. Betrachten wir einen Fundamentalpunkt k^{ter} Ordnung α_1. Sind ξ_i die Coordinaten dieses Punktes und setzen wir für den Augenblick

$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 = a_x{}^n,$$

so haben wir die identische Gleichung

$$a_\xi{}^{n-k+1} a_x{}^{k-1} \equiv 0,$$

während $a_\xi{}^{n-k} a_x{}^k = 0$ das Product der Tangenten im k-fachen Punkte darstellt. Ist ferner ζ irgend ein Punkt der Ebene, so sind $\xi_i + \lambda\zeta_i$ die Coordinaten eines in der Richtung $\overline{\xi\zeta}$ zu ξ unendlich benachbarten Punktes, wenn λ unendlich klein genommen wird. Für $f_i = a^{(i)}x^n$ haben wir also in erster Annäherung

(11) $$\varrho y_i = a^{(i)}{}_\xi{}^{n-k} a^{(i)}{}_\zeta{}^k$$

d. h. jeder von ξ ausgehenden Fortschreitungsrichtung entspricht in E_y *ein* ganz bestimmter Punkt; und, wenn ζ sich um ξ bewegt, so durchlaufen alle diese Punkte eine Curve k^{ter} Ordnung, deren Gleichung sich durch Elimination der ζ_i aus den Gleichungen (11) ergibt. Die Coordinaten eines Punktes dieser Curve sind durch (11) gleichzeitig als rationale Functionen eines Parameters dargestellt, denn wir

*) Da es nach p. 339 $\frac{1}{2}k(k+1)$ Bedingungen äquivalent ist, wenn eine Curve in einem bestimmten Punkte einen k-fachen Punkt haben soll, folgt aus dieser Gleichung, dass das Netz der Transformationscurven *allein* durch die gemeinsamen Punkte derselben bestimmt wird.

können zwischen den ζ_i noch eine beliebige, z. B. lineare Gleichung annehmen. Eine solche Darstellung ist aber, wie wir später sehen werden, nur bei Curven vom Geschlechte $p = 0$ möglich. Wir haben also den Satz:

Einem Fundamentalpunkte k^{ter} Ordnung in E_x entspricht eine Curve k^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p = 0$ in E_y.

Den k in ξ vereinigten Punkten einer Curve des Systems $\Sigma v_i f_i = 0$ entsprechen hiernach k einzelne Punkte der Geraden $v_y = 0$: die Schnittpunkte derselben mit der zu ξ gehörigen Curve k^{ter} Ordnung.

Die Beziehungen dieser sogenannten *Fundamentalcurven* zu den in E_y gelegenen Fundamentalpunkten des Systems $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ sind nun von besonderer Wichtigkeit. Zunächst müssen natürlich auch für diese die Gleichungen (8), (9) und (10) bestehen; d. h. wenn es in E_y β_1 einfache, β_2 zweifache . . . Punkte gibt, so ist:

$$\begin{aligned}
\sum_i i^2 \beta_i &= n^2 - 1 \\
\sum_i i(i-1)\beta_i &= (n-1)(n-2) \\
\sum_i i(i+1)\beta_i &= n(n+3) - 4 .
\end{aligned}$$

Durch Combination der letzten beiden Gleichungen folgt ferner:

$$\sum_i i \beta_i = 3n - 3 = \sum_i i \alpha_i .$$

Legen wir auf die Werthe der Zahlen α_i, β_i kein besonderes Gewicht, und sind die Fundamentalpunkte in E_x der Grösse nach geordnet von den Ordnungen $r_1, r_2 \ldots$, so dass $r_1 > r_2 \geq r_3 \ldots$, ebenso die Fundamentalpunkte in E_y von den Ordnungen $s_1, s_2 \ldots$, so dass $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \ldots$, so können wir diese Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$(12) \qquad \begin{aligned}
\sum_i r_i^2 &= n^2 - 1 , & \sum_k s_k^2 &= n^2 - 1 \\
\sum_i r_i &= 3n - 3 , & \sum_k s_k &= 3n - 3 .
\end{aligned}$$

Alsdann gilt ferner, wenn wir als k^{te} Fundamentalcurve von E_x die zum k^{ten} Fundamentalpunkte von E_y gehörige bezeichnen, der Satz: *Die k^{te} Fundamentalcurve von E_x geht ebenso oft durch den i^{ten} Fundamentalpunkt von E_x, wie die i^{te} Fundamentalcurve von E_y durch den k^{ten} Fundamentalpunkt von E_y geht.*

Sind nämlich zwei Fundamentalpunkte A, B gegeben, bez. in E_x und in E_y, und F_A, F_B die ihnen zugehörigen Fundamentalcurven, und geht F_A ϱ-mal durch B, so entsprechen diesen ϱ von B ausgehenden Fortschreitungsrichtungen ϱ Punkte auf der F_B; letztere müssen aber alle mit A zusammenfallen, da jedem Punkte der F_A eben wieder A entspricht. Also die F_B geht ebenfalls ϱ-mal durch A,

w. z. b. w. Aus diesem Beweise erkennt man ferner die Richtigkeit des Satzes:

Die Fundamentalcurven in E_x haben ihre vielfachen Punkte in den Fundamentalpunkten von E_x.

Wir bezeichnen nun mit α_{ik} die Zahl, welche aussagt, wie oft die i^{te} Fundamentalcurve in E_y durch den k^{ten} Fundamentalpunkt in E_y geht. Zwischen diesen Zahlen α_{ik} und den Zahlen r, s besteht dann eine Reihe von Relationen. Zunächst gibt der Satz, *dass die Fundamentalcurven vom Geschlechte Null sind,* die Gleichungen:

$$(13)\quad (r_i-1)(r_i-2)=\sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik}-1),\quad (s_k-1)(s_k-2)=\sum_i \alpha_{ik}(\alpha_{ik}-1).$$

Würden sich zwei Fundamentalcurven F_A, $F_{A'}$ derselben Ebene ausser in den Fundamentalpunkten dieser Ebene schneiden, so müssten dem Schnittpunkte die *beiden* Punkte A und A' der andern Ebene entsprechen; also:

Fundamentalcurven schneiden sich nur in Fundamentalpunkten, d. h. es ist:

$$(14)\qquad r_i r_{i'} = \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{i'k},\quad s_k s_{k'} = \sum_i \alpha_{ik}\alpha_{ik'}.$$

Wenn eine Curve des Netzes $\Sigma v_i f_i = 0$ von einer Fundamentalcurve F_B ausser in den Fundamentalpunkten noch geschnitten wird, so müsste einem solchen Schnittpunkt zugleich ein Punkt der Linie $v_y = 0$ und der Punkt B entsprechen, was nicht möglich ist. Also:

Die Curven, welche Bilder von Geraden sind, werden von den Fundamentalcurven nur in Fundamentalpunkten geschnitten; es ist somit:

$$(15)\qquad n r_i = \sum_k s_k \alpha_{ik},\quad n s_k = \sum_i r_i \alpha_{ik}.$$

Schliesslich werden wir sogleich den Satz beweisen:

Die Anzahl aller Zweige von Fundamentalcurven, welche durch einen Fundamentalpunkt gehen, ist gleich dem Dreifachen der Ordnung des letzteren, vermindert um Eins; was die Gleichungen gibt:

$$(16)\qquad 3r_i - 1 = \sum_k \alpha_{ik},\quad 3s_k - 1 = \sum_i \alpha_{ik}.$$

Durch Combination der Gleichungen (16) mit (13) folgt ferner:

$$(17)\qquad r_i^2 + 1 = \sum_k \alpha_{ik}^2,\quad s_k^2 + 1 = \sum_i \alpha_{ik}^2.$$

Zum Beweise des zuletzt erwähnten Satzes bemerken wir, dass *die Fundamentalcurven der Ebene E_y zusammen die* Jakobi'*sche Curve des Netzes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, und ebenso die Fundamentalcurven von E_x die* Jakobi'*sche Curve des Netzes $\Sigma v_i f_i = 0$ bilden.*

Die Jakobi'sche Curve nämlich ist der Ort der neuen Doppelpunkte derjenigen Curven des Netzes, welche ausser in den Fundamentalpunkten noch einen weiteren Doppelpunkt haben. Dies ist

aber nur möglich, wenn die betreffenden Curven zerfallen, denn alle Curven des Netzes haben schon das Maximum der möglichen vielfachen Punkte. Solche zerfallende Curven können wir nun in der Ebene E_y auf folgende Weise construiren. Wir betrachten eine Gerade, welche durch einen Fundamentalpunkt von der Ordnung r in E_x geht. Ihr entspricht in E_y eine C_n des Netzes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, welche in die zu dem Fundamentalpunkte gehörige Fundamentalcurve C_r und in eine C_{n-r} zerfallen muss. Dreht sich nun die Gerade in E_x um den Punkt r, so bleibt jene C_r fest, während die C_{n-r} sich ändert. Letztere wird dabei von der C_r in einem beweglichen Punkte, einem neuen Doppelpunkte der betreffenden $C_{(n-r)+r}$, geschnitten werden; und also ist die C_r ein Theil des Ortes dieser Doppelpunkte, d. i. ein Theil der Jakobi'schen Curve. Umgekehrt entspricht auch *jeder* zerfallenden Curve des Netzes der φ eine Gerade durch einen Fundamentalpunkt in E_x. Einer solchen Curve in E_y nämlich entspricht jedenfalls eindeutig eine Gerade; zerfällt nun die Curve, so müsste auch die Gerade zerfallen, was nicht möglich ist. Dem einen Theile der zerfallenden Curve muss daher ein einzelner Punkt der Geraden, d. i. ein Fundamentalpunkt entsprechen; q. e. d. Nun haben wir aber früher gesehen (p. 383), dass die Jakobi'sche Curve in einem Punkte einen $(3r-1)$-fachen Punkt hat, wenn daselbst die Curven des Netzes alle einen r-fachen Punkt haben; und damit ist die Formel (16) bewiesen. —

Mittelst der aufgestellten Gleichungen finden wir nun weitere Beziehungen zwischen den Fundamentalpunkten in den beiden Ebenen. Wir bezeichnen mit ϱ die Anzahl der Punkte r, mit σ die der Punkte s, d. h. wir setzen

$$\varrho = \Sigma \alpha_i, \quad \sigma = \Sigma \beta_i .$$

Summiren wir nun die eine Seite der Gleichungen (16) nach i, die andere nach k, wobei die rechten Theile einander gleich werden, so folgt:

$$3 \sum_i r_i - \varrho = 3 \sum_k s_k - \sigma .$$

Aber nach (12) ist $\sum_i r_i = \sum_k s_k$, und daher $\varrho = \sigma$: *Die Zahl der Fundamentalpunkte in den beiden Ebenen ist dieselbe, es ist* $\Sigma \alpha_i = \Sigma \beta_i$.

Wir wollen auch noch weiter zeigen, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ von den Zahlen $\beta_1, \beta_2 \ldots$ überhaupt nur der Anordnung, nicht der Grösse nach verschieden sind, dass es also zu jedem α_i ein ihm gleiches β_k geben muss.*) Wir führen diesen längeren Beweis um so mehr

*) Den Beweis dieses von Cremona schon aufgestellten Satzes gab Clebsch: Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen, Math. Annalen, Bd. 4, p. 490.

an, als er allein auf Constantenzählen und gewissen Symmetriebetrachtungen beruht und so an sich von Interesse ist.

Wir können den Werth für das Quadrat der aus den Zahlen α_{ik} zu bildenden Determinante Δ mittelst der Gleichungen (14) und (17) angeben, denn in diesen stehen rechts unmittelbar die einzelnen Glieder dieses Quadrates, d. i. diejenigen Ausdrücke, welche als Glieder in der ϱ $(=\sigma)$-reihigen Determinante auftreten, die aus Δ durch Multiplication mit sich selbst nach dem Determinantenmultiplicationssatze hervorgeht. Der Werth derselben (Δ^2) ist demnach unter Benutzung von (12) gleich den beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} r_1^2+1 & r_1 r_2 & r_1 r_3 & \dots \\ r_2 r_1 & r_2^2+1 & r_2 r_3 & \dots \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2+1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} = 1 + \sum_i r_i^2 = n^2$$

$$= \begin{vmatrix} s_1^2+1 & s_1 s_2 & s_1 s_3 & \dots \\ s_2 s_1 & s_2^2+1 & s_2 s_3 & \dots \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3^2+1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} = 1 + \sum_k s_k^2 = n^2 .$$

Der absolute Werth der Determinante der α_{ik} ist also gleich n:

$$(18) \qquad \Delta = \pm n .$$

Das Vorzeichen bleibt unbestimmt, weil die Ordnung der Reihen in der Determinante durch die Anordnung der r, s nach ihrer Grösse nicht völlig bestimmt zu sein braucht. Unter denselben können nämlich gleiche sein, deren Vertauschung dann das Vorzeichen von Δ ändern würde; und dies ist auch bei den bisher bekannten Beispielen immer der Fall.

Wir denken uns nun die Determinante Δ der α_{ik} durch horizontale und verticale Linien getheilt, so dass in jedem der entstehenden Rechtecke nur Horizontalreihen vorkommen, welche zu *gleichen* r, und nur Verticalreihen, welche zu *gleichen* s gehören.

Betrachten wir eins dieser Rechtecke. Zu den in ihm vorkommenden*) r gehört eine Gruppe von Fundamentalpunkten in E_x und diese liefert für die Transformation eine gewisse Zahl von Constanten, welche bei der Bildung des Curvennetzes $\Sigma v_i f_i = 0$ in E_x voll-

---

*) Die Abhängigkeit zwischen den zu einem α_{ik} gehörigen r_i, s_k wird durch obige Formeln vermittelt. Dieselben können wir mit Hülfe von (18) noch in einfacherer Gestalt schreiben. Durch Auflösung von (15) nach den r, s ergibt sich nämlich:

$$\pm r_i = \Sigma_k s_k \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}, \qquad \pm s_k = \Sigma_i r_i \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}},$$

kommen symmetrisch benutzt werden.*) Dasselbe gilt für die in dem Rechtecke vorkommenden s: die entsprechende Gruppe von Fundamentalpunkten der Ebene E_y muss von jenen Constanten der zu r gehörigen Gruppe in E_x ebenfalls symmetrisch abhängen, und umgekehrt: *Zwischen den r und s muss völlige Symmetrie in dem Rechtecke herrschen.* Die in einer Verticalreihe unseres Rechtecks stehenden α müssen demnach in den verschiedenen Verticalreihen desselben sich wiederholen, und zwar in allen Permutationen, und jede Permutation *gleich oft*. Sei k die Zahl der Elemente einer Verticalreihe des Rechtecks, p die Zahl ihrer Permutationen, l die Zahl der Elemente in einer Horizontalreihe, q die Zahl ihrer Permutationen. Man muss dann haben:

$$l = \mu p, \tag{19}$$

wo μ eine ganze Zahl; und ebenso folgt, wenn man in Vorstehendem die Rolle der Horizontal- und Verticalreihen vertauscht:

$$k = \nu q; \tag{20}$$

wo ν eine ganze Zahl. Nun ist die Zahl der Permutationen immer grösser, als die der Elemente, ausgenommen

1) wenn alle Elemente gleich sind, wo die Zahl der Permutationen gleich 1 ist;

2) wenn alle Elemente bis auf eines einander gleich sind, wo dann die Zahl der Permutationen gleich der Zahl der Elemente.

Schliessen wir diese beiden Fälle vorläufig aus, so sind die Gleichungen (19), (20) unmöglich, denn sie würden gleichzeitig fordern, dass $k > l$ und $l > k$. Im Falle 1) haben wir dagegen $p = 1$, $q = 1$, also k und l beliebig; im Falle 2) aber wird $p = k$, $q = l$, also $l = \mu k$, $k = \nu l$. Demnach muss $\mu = \nu = 1$, $k = l$ sein: Das Rechteck geht in ein Quadrat über. Mithin gilt der Satz: *In den Recht-*

---

und unter Benutzung dieser Gleichungen aus (14) und (17) durch Auflösung nach den α_{ik} (bei constantem i' bez. k'):

$$r_i s_k = n\,\alpha_{ik} \mp \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}.$$

*) Eine Cremona'sche Transformation ist überhaupt durch eine gewisse Anzahl von absoluten Constanten charakterisirt, die allein von den Fundamentalpunkten abhängen können, da durch diese das Netz der φ völlig bestimmt ist. Betrachtet man projectivische Umformungen beider Ebenen (abhängig von 8 Constanten) als unwesentlich, so kann man ohne den Charakter der Transformation zu ändern, in jeder Ebene noch 4 Fundamentalpunkten beliebige Lagen geben und dann als eigentliche Constante der Transformation die $2\varrho - 8$ Doppelverhältnisse der Strahlbüschel auffassen, welche von zweien solcher 4 Punkte je nach den 3 anderen und einem 5ten Fundamentalpunkte gerichtet sind. Es sind dies *absolute Invarianten* der Transformation, insofern sie sich durch projectivische Umformung nicht mehr ändern.

ecken von Δ, welche durch die Gruppen gleicher r und gleicher s abgetheilt werden, sind immer die Elemente α einander gleich; nur in den Fällen, wo das Rechteck ein Quadrat ist, kann in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein von den übrigen verschiedenes Glied vorkommen. Diese Glieder sind dann unter sich gleich, und mit ihnen lässt sich durch Umstellen der Reihen die eine Diagonale des Quadrates ausfüllen.

Ferner kann man zeigen, dass in dem Schema der ganzen Determinante niemals zwei solche Quadrate horizontal oder vertical neben einander stehen können. Sonst nämlich würden wir in zwei Quadraten von gleicher Grösse die abweichenden Elemente an gewissen Stellen finden, die dadurch auf einander bezogen erschienen. Es würde also eine gewisse Zuordnung der r bez. s der dem einen Quadrate zugehörigen Gruppe von Fundamentalpunkten gegenüber den r und s der dem andern Quadrate zugehörigen Gruppe hervorgerufen. Da eine solche Zuordnung wegen der durchaus selbständig innerhalb jeder Gruppe auftretenden Symmetrie nicht existiren kann, so sieht man den Satz ein:

Jeder Gruppe von r kann höchstens eine Gruppe von s entsprechen, welche eine gleiche Zahl von Elementen enthält, und welche mit jener zusammen auf ein Quadrat von α_{ik} innerhalb Δ führt, dessen Elemente nicht sämmtlich gleich sind.

Aber andererseits muss auch *wenigstens eine* solche Gruppe existiren, denn sonst würden der Gruppe der r lauter Rechtecke entsprechen, welche gleiche Elemente enthielten, und die Determinante der α würde verschwinden, während doch ihr Werth nach (18) gleich $\pm n$ ist. Nur wenn die Gruppe der r sich auf ein *einziges* r reducirt, trifft dieser Schluss nicht zu. Jeder Gruppe von r, welche mehr als ein r enthält, entspricht also irgend eine gleich grosse Gruppe von s und umgekehrt. Lassen wir diese bei Seite, so bleiben nur noch einzelne r, bez. s übrig, welche sämmtlich unter sich verschieden sind; aber die Zahl dieser r muss der Zahl dieser s gleich sein, und sie bilden daher wieder ein System von Gruppenpaaren gleicher Grösse. Damit ist endlich unsere Behauptung bewiesen, d. h. der Satz:

Die Zahlen α_i, welche angeben, wie viele r jedesmal einander gleich sind, und die Zahlen β_i, welche angeben, wie viele s jedesmal einander gleich, sind höchstens der Anordnung, nicht der Grösse nach verschieden.

So haben wir z. B. in obiger Tabelle für $n=6$ eine Transformation:

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0$$

und eine andere:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 0.$$

Von beiden wird nach unserem Satze die eine die inverse Transfor-

mation der andern sein, wenn nicht etwa in einem besonderen Falle jede zu sich selbst invers ist. Letzteres ist für die Transformationen von $n = 2$ bis $n = 5$ zufolge der Tabelle immer der Fall; für diese Transformationen niedrigster Ordnung sagt also unser Satz nichts aus. Ebenso wie bei $n = 6$ verhält es sich mit den beiden letzten Verticalreihen der Tabelle für $n = 7$. —

Von ganz fundamentaler Bedeutung für diese Theorie ist endlich der folgende Satz:

Die Summe der Ordnungszahlen für die drei höchsten Fundamentalpunkte einer Transformation n^{ter} Ordnung ist grösser als n; d. h. es ist:

$$r_1 + r_2 + r_3 > n,$$

wo nach unserer früheren Annahme $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq r_4 \ldots$

Wir haben nämlich wegen (12) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma_i' r_i^2 + r_3^2 &= n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2, \\ \Sigma_i' r_i + r_3 &= 3n - 3 - r_1 - r_2, \end{aligned} \tag{21}$$

wo sich das Summenzeichen Σ' auf alle Indices i ausgenommen $i = r_1$, r_2, r_3 bezieht. Wir wollen zeigen, dass *unmöglich*

$$n \geqq r_1 + r_2 + r_3$$

sein kann.

Multipliciren wir die zweite der Gleichungen (21) mit r_3 und subtrahiren von ihr die erste, so kommt:

$$r_3 \Sigma_i' r_i - \Sigma_i' r_i^2 = r_3 (3n - 3 - r_1 - r_2) - n^2 + 1 + r_1^2 + r_2^2.$$

Hier steht aber links ein positiver Ausdruck, da $r_3 \geqq r_4 \ldots$; derselbe ist nur Null für $r_3 = r_4 = r_5 \ldots$ Wir haben also rechts

$$r_3 (3n - 3 - r_1 - r_2) \geqq n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2,$$

Nehmen wir nun an, es sei $n \geqq r_1 + r_2 + r_3$, so erhalten wir:

$$r_3 (3r_3 - 3 + 2r_1 + 2r_2) \geqq r_3^2 + 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) - 1,$$

oder:

$$2r_3^2 - 2r_1 r_2 - 3r_3 + 1 \geqq 0;$$

und dies ist nicht möglich, denn es ist der Annahme nach $r_1 r_2 \geqq r_3^2$ und $3r_3 > 1$, da r_3 mindestens gleich 1 sein muss. Damit ist der gewünschte Beweis geliefert.

Dieser Satz über die Multiplicität der drei höchsten Fundamentalpunkte erlangt so grosse Wichtigkeit durch die folgende aus ihm sich ergebende Folgerung. Wir unterwerfen die Ebene E_x einer quadratischen Transformation, deren drei Fundamentalpunkte mit den Punkten r_1, r_2, r_3 zusammenfallen. Durch dieselben geht jede Curve n^{ter} Ordnung des Netzes $\Sigma v_i f_i = 0$ bez. r_1-, r_2-, r_3-mal hindurch; einer jeden entspricht also nach der oben für quadratische Transformationen ge-

gebenen Regel eine Curve von der Ordnung $2n - r_1 - r_2 - r_3$ in der neuen Ebene E_z; und alle diese Curven bilden wieder ein Netz mit einem beweglichen Schnittpunkte, denn ihnen entsprechen durch Vermittlung der Ebene E_x eindeutig die Geraden der Ebene E_y. Die directe Beziehung zwischen E_y und E_z wird sonach durch Functionen der Ordnung $2n - r_1 - r_2 - r_3$ hergestellt. Nun ist aber $r_1 + r_2 + r_3 > n$, also jedenfalls

$$2n - r_1 - r_2 - r_3 < n;$$

d. h. die ursprüngliche Transformation ist auf eine andere von niedrigerer Ordnung zurückgeführt. Mit dieser kann man weiter in derselben Weise verfahren, bis man schliesslich auf eine quadratische oder lineare Transformation zurückkommt; und umgekehrt muss man natürlich durch wiederholte Anwendung quadratischer Transformationen wieder auf die ursprüngliche geführt werden. Wir haben also den Satz:

Jede Cremona'*sche Transformation kann durch eine Reihenfolge quadratischer Transformationen ersetzt werden, indem man die drei Fundamentalpunkte einer solchen je in die höchsten Basispunkte des Systems der Transformationscurven hineinlegt.**)

Ist z. B. die Transformation 4ter Ordnung mit

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$

gegeben, so legen wir die 3 Fundamentalpunkte einer quadratischen Transformation in den dreifachen und in zwei der einfachen Punkte. Dadurch kommen wir auf Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, welcher dadurch entsteht, dass die Verbindungslinie der beiden einfachen Fundamentalpunkte (lineare Fundamentalcurve der quadratischen Transformation) von den C_4 noch in zwei Punkten getroffen wird. Wir haben also eine Transformation dritter Ordnung mit $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$. Benutzen wir nun zwei Punkte α_1 und den Punkt α_2 zu einer neuen quadratischen Transformation, so erhalten wir Curven 2ter Ordnung mit drei einfachen Fundamentalpunkten, wie es sein sollte. —

Wie wir früher die Curven hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersuchten, welche gegenüber beliebigen *linearen* Transformationen ungeändert bleiben, so kann man, wie schon oben hervorgehoben, auch nach solchen Eigenschaften der Curven und überhaupt der ebenen

---

*) Dieser Satz wurde ziemlich gleichzeitig von Clifford (ohne Beweis, vgl. den angeführten Aufsatz von Cayley), Nöther (Math. Annalen, Bd. 3, p. 164) und Rosanes (a. a. O.) gefunden. Die Ungleichung $n < r_1 + r_2 + r_3$ und somit auch dieser Satz von der Zusammensetzbarkeit der Transformationen gilt auch noch, wenn mehrere Fundamentalpunkte einander unendlich nahe rücken, was im Texte nicht berücksichtigt wurde; vgl. Nöther, Math. Annalen, Bd. 5, p. 635.

Gebilde fragen, welche bei beliebigen Cremona'schen Transformationen erhalten bleiben, und andererseits nach der Art, wie solche Eigenschaften durch die Transformation beeinflusst werden. Dabei kann man sich wegen unserer letzten Ueberlegungen immer auf die Betrachtung quadratischer Transformationen beschränken. Wie bei einer solchen die Singularitäten einer einzelnen Curve geändert werden, haben wir schon früher erwähnt, wenigstens insoweit diese Aenderungen durch die Fundamentalpunkte der Transformation veranlasst werden (p. 477). Andere Aenderungen, als die dort erwähnten treten aber auch nicht ein. *Hat nämlich die C_n ausserhalb der Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt P in E_x, so entspricht diesem auch ein Doppelpunkt P' der zugehörigen C' in E_y.* Dies folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit unserer Transformation, denn in Folge derselben muss jeder von P aus auf der C_n möglichen Fortschreitungsrichtung *eine* von P' ausgehende Fortschreitungsrichtung auf der C' entsprechen. Analoges gilt für vielfache Punkte. — Insbesondere tritt hier nun wieder *der Satz von der Erhaltung des Geschlechts* in den Vordergrund (p. 459), den man auch für quadratische Transformationen leicht direct bestätigt. Einer C_m in E_x möge eine C_μ in E_y entsprechen. Dann ist $\mu = 2m - k_1 - k_2 - k_3$, wenn die C_m bez. k_1-, k_2-, k_3-mal durch die 3 Fundamentalpunkte in E_x geht; und die C_μ geht bez. $\varkappa_1$-, $\varkappa_2$-, $\varkappa_3$-mal durch die Fundamentalpunkte von E_y, wenn:

$$\varkappa_1 = m - k_2 - k_3, \quad \varkappa_2 = m - k_3 - k_1, \quad \varkappa_3 = m - k_1 - k_2.$$

Aus diesen Relationen ergibt sich direct die Identität:

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} k_i(k_i-1) = \tfrac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} \varkappa_i(\varkappa_i-1).$$

Von diesen Ausdrücken unterscheidet sich aber das Geschlecht beider Curven nur um eine Zahl, welche allein von den nicht in Fundamentalpunkten liegenden vielfachen Punkten derselben abhängt; und die letzteren sind für beide Curven dieselben. Folglich haben auch beide Curven dasselbe Geschlecht, q. e. d.

Man kann übrigens auch leicht den Einfluss einer Transformation n^{ter} Ordnung auf die C_m angeben; man gelangt mittelst der oben entwickelten Principien zu folgendem Satze:

Einer Curve C_m in E_x, welche l_i-mal durch einen Fundamentalpunkt r_i geht, entspricht eine Curve C_μ, wo $\mu = nm - \sum_i r_i l_i$, welche λ_k-mal durch jeden Fundamentalpunkt s_k geht, wo $\lambda_k = m s_k - \sum_i r_i \alpha_{ik}$.

Mittelst dieser Formeln könnte man ebenfalls die Gleichheit des Geschlechts bestätigen; doch gehen wir hierauf nicht ein, da wir später bei Betrachtung der nur für einzelne Curven eindeutigen Trans-

formationen ähnliche Verhältnisse ohnehin näher besprechen müssen. — Um Beispiele für andere Eigenschaften zu geben, welche bei Cremona'schen Transformationen erhalten bleiben, sei bemerkt, dass je zwei sich berührende Curven nothwendig wieder in zwei sich berührende (und zwar ebenso vielpunktig) Curven übergehen, oder mit andern Worten, dass einer Punktgruppe der einen Curve, welche einen γ-fachen Punkt enthält, auf der transformirten Curve wieder eine Punktgruppe mit einem γ-fachen Punkte entspricht. Hieraus folgt dann z. B., dass die zu einer auf einer Curve f gegebenen Correspondenz gehörige Coincidenzcurve (p. 453) nicht nur gegenüber linearen, sondern auch gegenüber Cremona'schen Transformationen Invarianteneigenschaft hat.*)

Wir betrachten im Folgenden noch eine *Anwendung* der hier entwickelten Theorie. Die Bemerkung nämlich, dass jedem vielfachen Punkte einer Curve durch eine Cremona'sche Transformation, sobald er Fundamentalpunkt derselben ist, einzelne getrennte Punkte der neuen Curve entsprechen, kann man dazu benutzen, um eine *gegebene Curve mit beliebigen singulären Punkten in eine andere zu transformiren, welche nur gewöhnliche vielfache Punkte enthält* (d. i. vielfache Punkte mit getrennten Tangenten). Durch solche Transformationen wird dann – und das ist das Wichtige — die Singularität des betrachteten vielfachen Punktes von f in analoger Weise in verschiedene *Klassen* zerlegt, wie wir es früher an der Hand der Methoden von Newton, Cramer und Puiseux kennen gelernt haben.**) Den Unterschied beider Methoden werden wir später noch kurz charakterisiren. — Wenn wir bei den betreffenden Untersuchungen nur quadratische Transformationen anwenden, so liegt darin keine Specialisirung, denn aus solchen lassen sich ja alle anderen Cremona'schen Transformationen zusammensetzen (p. 489).

Zur näheren Discussion dieser Verhältnisse nehmen wir nun *erstens* an, dass die betrachtete Curve C in P einen i-fachen Punkt mit lauter getrennten Tangenten besitzt. Wenden wir dann auf C die quadratische Transformation:

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 \tag{22}$$

an, deren einer Fundamentalpunkt ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) in P liegen möge, so entsprechen dem Punkte P von C auf der neuen Curve C' i einzelne Punkte der Geraden $y_3 = 0$ (vgl. p. 477), und damit ist die Singularität von P erschöpft.

*) Vgl. die Beispiele für solche Curven auf p 447, 448, 451 und p. 460 Anmk.

**) Vgl. im Folgenden Nöther: Göttinger Nachrichten, 1871, p. 267, sowie einen demnächst in den Math. Annalen erscheinenden Aufsatz desselben.

Zweitens mögen alle i Zweige von C in P zusammenfallen, jedoch so, dass je zwei Zweige sich nur einfach berühren, also nur in Grössen erster Ordnung der Kleinheit übereinstimmen. Dann ist, wenn C von der n^{ten} Ordnung

$$C \equiv (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2)^i x_3^{n-i} + f_{i+1}(x_1, x_2) x_3^{n-i-1} + \ldots + f_n(x_1, x_2) = 0$$

die Gleichung unserer Curve; und durch jene quadratische Transformation geht sie über in:

$$C' \equiv (\varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 y_1)^i y_1^{n-i} y_2^{n-i} + f_{i+1}(y_2, y_1) y_1^{n-i-1} y_2^{n-i-1} y_3 + \ldots = 0.$$

Diese Curve hat, entsprechend dem Punkte P von C, mit $y_3 = 0$ in dem Schnittpunkte der Linie $\varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 y_1 = 0$ i consecutive Punkte gemein, *ohne* daselbst jedoch einen *vielfachen* Punkt zu besitzen; eine weitere Trennung dieser benachbarten Punkte ist daher durch keine rationale Transformation mehr möglich. Wir behaupten nun, dass *in diesem Falle die Singularität von C in P aufzufassen ist als entstanden durch Zusammenrücken von $\frac{1}{2} i (i - 1)$ Doppelpunkten, unter denen $i - 1$ Rückkehrpunkte enthalten sind*, oder mit anderen Worten, dass *die Reduction, welche die Klasse $n(n - 1)$ von C in Folge der Singularität P erleidet, gleich $i(i - 1) + i - 1$ zu setzen ist.* Zum Beweise bemerken wir, dass den Linien durch den Punkt Q ($x_1 = 0$, $x_3 = 0$) in der Ebene E_y die geraden Linien durch den Punkt Q' ($y_1 = 0$, $y_3 = 0$) entsprechen, während im Allgemeinen einer Geraden in E_x ein Kegelschnitt in E_y zugeordnet ist, und umgekehrt. Da nun benachbarte Punkte von C in benachbarte Punkte von C' übergehen, so muss die Zahl der Tangenten, welche man von Q an C legen kann, gleich der Zahl der von Q' an C' zu legenden sein, wobei natürlich die in Q' selbst berührenden Tangenten nicht mitzuzählen sind. Man bestätigt diese Behauptung auch leicht direct mit Hülfe der obigen Sätze (p. 477). Die Curve C nämlich geht i-mal durch den Fundamentalpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, hingegen nicht durch die beiden andern Fundamentalpunkte; die Curve C' ist also von der Ordnung $2n - i$ und hat im Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ einen n-fachen, dagegen in den beiden andern Fundamentalpunkten je einen $(n - i)$-fachen Punkt, alle mit getrennten Tangenten. Bezeichnet nun δ den Einfluss, welchen alle andern singulären Punkte von C' (die dann ebenso bei C vorkommen) auf die Klasse von C' haben, so wird letztere:

$$k' = (2n - i)(2n - i - 1) - \delta - n(n - 1) - 2(n - i)(n - i - 1).$$

Wegen besagter Vielfachheit des Punktes Q' ist die Zahl der von ihm aus noch an C' gehenden Tangenten gleich

$$k' - 2(n - i) = n(n - 1) - \delta - i(i - 1).$$

Diese Zahl aber ist gleich der Klasse von C, vermehrt um die Zahl der in P vereinigten Rückkehrpunkte, also, da P nicht auf C ange-

nommen wurde, in der That gleich der Zahl der durch P gehenden Geraden, welche C in zwei benachbarten Punkten treffen; womit unsere Zwischenbehauptung bewiesen ist. — Unter jenen $k' - 2(n-i)$ von Q' ausgehenden Tangenten ist nun die Linie $y_3 = 0$ $(i-1)$-fach enthalten, denn auf ihr liegen i benachbarte Punkte von C'. Letztere aber sind aus dem Punkte P durch die Transformation hervorgegangen; also zählt die Linie $Q'P'$ ebenfalls $(i-1)$-fach als Tangente von C, d. h. *die Klasse von C ist:*

$$k = n(n-1) - \delta - i(i-1) - (i-1), \text{ q. e. d.}$$

Drittens nehmen wir an, dass der Coëfficient von x_3^{n-i} in C den Factor $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2$ zur l^{ten} Potenz enthalte $(l < i)$; die übrigen Factoren von x_3^{n-i} können unter einander auch wieder in verschiedene mehrwerthige Gruppen zerfallen, was dann einer weiteren ganz analogen Untersuchung bedarf; jedenfalls ist die folgende Untersuchung des Verhaltens von C gegen jenen l-fachen Factor davon unabhängig. Ferner möge der Factor $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2$ in jedem Factor $f_{i+r}(x_1, x_2)$ mindestens $(l_1 - r)$-mal enthalten sein, so dass also in C' für $y_3 = 0$ und $\varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 y_1 = 0$ alle späteren Glieder l_1-fach Null werden. Die neue Curve C' wird dann wieder von $y_3 = 0$ in i zusammenfallenden Punkten getroffen; aber diese liegen nicht wieder sämmtlich einander benachbart auf demselben Curvenzweige von C'. Vielmehr hat jetzt C' in dem Schnittpunkte von $y_3 = 0$ mit $\varkappa_2 y_1 + \varkappa_1 y_2 = 0$ einen l_1-fachen Punkt, dessen Zweige die Linie $y_3 = 0$ im Allgemeinen nicht sämmtlich berühren werden. Durch diesen vielfachen Punkt werden l_1 der l in ihm liegenden Schnittpunkte von $y_3 = 0$ mit C' absorbirt, und es bleiben nur noch $l - l_1$ einander benachbarte. Ganz ebenso, wie in vorstehendem Falle, ist daher der Punkt P von C, so weit es auf die von uns betrachteten l Zweige ankommt, äquivalent mit $\frac{1}{2} i(i-1)$ Doppelpunkten, unter denen $l - l_1$ Rückkehrpunkte sind, und mit $\frac{1}{2} l_1 (l_1 - 1)$ weiteren Doppelpunkten, unter denen ebenfalls noch Rückkehrpunkte vorkommen können, was einer weiteren Untersuchung bedarf. Die letztere geschieht ganz ebenso, indem man die Curve C' wieder durch eine quadratische Transformation umformt, deren einer Fundamentalpunkt in dem l_1-fachen Punkte liegt; u. s. w. Geometrisch hat man sich die Singularität von P so zu denken, dass von den i Zweigen l zusammenfallen, und dass von diesen wieder l_1 noch einen weiteren benachbarten Punkt gemein haben, dass also *an den i-fachen Punkt ein l_1-facher Punkt unendlich nahe herangerückt ist, und zwar in einer Richtung, in welche l Tangenten des i-fachen Punktes zusammenfallen.* In der That muss ja nach unsern obigen Sätzen (p. 489 f.) aus einem nicht in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ selbst, sondern nur dazu benachbart gelegenen l_1-fachen Punkte von C wieder ein l_1-facher Punkt von C' entstehen; wie es bei unserer letzten Transformation eintrat.

Wir erläutern das Vorstehende an dem folgenden Beispiele. Es sei eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(2n-2)$-fachem Punkte in P $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ gegeben durch die Gleichung:

$$C = x_3^2\,[f_{n-1}(x_1,\,x_2)]^2 + f_{2n}(x_1,\,x_2) = 0,$$

wo wieder der untere Index an f die Ordnung der beiden in x_1, x_2 homogenen Functionen f anzeigt. Durch Anwendung der Transformation (22) erhalten wir die Curve:

$$C' = y_1^2 y_2^2\,[f_{n-1}(y_2,\,y_1)]^2 + f_{2n}(y_2,\,y_1)\ \ y_3^2 = 0.$$

Dem singulären Punkte von C entsprechen auf C' die $n-1$ *gewöhnlichen Doppelpunkte*, bestimmt durch $y_3^2 = 0$ und $f_{n-1}(y_2,\,y_1) = 0$. Es bilden sich also zuerst $n-1$ Klassen, von denen jede sodann in zwei Punkte zerfällt, d. h. C hat in P einen $(2n-2)$-fachen Punkt mit $n-1$ getrennten Tangenten, in deren jeder noch ein Doppelpunkt zu P benachbart liegt, d. h. in dem Punkte P liegen $n-1$ Selbstberührungspunkte von C (vgl. p. 334). Die Zahl der getrennten Doppelpunkte, mit welchen P äquivalent ist, wird also schliesslich gleich

$$\tfrac{1}{2}(2n-2)(2n-3) + n - 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(2n-1).$$

Wie man durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich nach einer *endlichen* Anzahl von Operationen zu einer Curve mit nur einfachen, einander benachbarten oder von einander getrennten Punkten an Stelle der Singularität P kommt, wird aus Vorstehendem klar sein; in der That können sich zwei Curvenzweige ja nur in einer *endlichen* Anzahl von benachbarten Punkten treffen. Um uns nun einfacher ausdrücken zu können, wollen wir das Ausarten eines Doppelpunktes in einen Rückkehrpunkt dadurch bezeichnen, dass *an den Doppelpunkt ein Verzweigungspunkt herangerückt sei.**) Alsdann haben wir folgenden Satz:

Jeder i-fache Punkt einer algebraischen Curve kann definirt werden als Grenzfall eines gewöhnlichen i-fachen Punktes, zu dem eine in obiger Weise zu bestimmende Zahl von Verzweigungspunkten treten, und an welchen überdies eine Reihe von l_1-, l_2-, . . . fachen Punkten (wo $l_1 + l_2 + \ldots \leq i$), jeder wieder eine gewisse Zahl von Verzweigungspunkten enthaltend, unendlich nahe heranrücken.

*) Diese Bezeichnungsweise ist aus der Theorie der Riemann'schen Flächen herübergenommen. Die Verzweigungspunkte derselben entsprechen nämlich den Berührungspunkten der von dem unendlich fernen Punkte der Y-Axe aus an die Curve zu legenden eigentlichen Tangenten. Von letzteren aber rückt (nach den Plücker'schen Formeln) einer an einen Doppelpunkt unendlich nahe heran, wenn ein solcher in einen Rückkehrpunkt übergeht (so dass jeder Rückkehrpunkt zu einem Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche Veranlassung gibt).

Die Reduction, welche ein solcher Punkt an der Klasse von C verursacht, ist dann gleich

$$i(i-1) + l_1(l_1-1) + l_2(l_2-1) + \ldots + r,$$

wenn r die *Gesammtzahl* der in ihm liegenden Verzweigungspunkte bedeutet.

Um auch den *Einfluss von P auf das Geschlecht* der Curve C zu bestimmen, betrachten wir wieder die einfachsten Fälle. Wenn alle i Zweige von P getrennt verlaufen, so verursacht P eine Reduction um $\frac{1}{2}i(i-1)$. Fallen einige Zweige zusammen, ohne dass eine weitere Besonderheit hinzutritt, so transformiren wir C in obiger Weise in eine Curve C'; das Geschlecht der letzteren ist dann (vgl. p. 430):

$$p' = \tfrac{1}{2}(2n-i-1)(2n-i-2) - \tfrac{1}{2}n(n-1) - (n-i)(n-i-1) - \vartheta,$$

wenn ϑ die durch andere singuläre Punkte, welche auf C und C' gleichmässig vorkommen, hervorgerufene Reduction bedeutet. Diese Zahl ist aber gleich

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}i(i-1) - \vartheta.$$

Die letztere Zahl werden wir auch als das Geschlecht von C bezeichnen; dasselbe ist dann seiner Definition nach bei eindeutiger Transformation constant. — Für den allgemeinen Fall, der ja eine Combination der beiden genannten ist, folgt hieraus der Satz:

Die in P oder unendlich benachbart zu P liegenden Verzweigungspunkte haben auf die Bestimmung des Geschlechtes von C keinen Einfluss.

Man kann dies auch direct durch eine Grenzbetrachtung aus unserer Definition der Singularität von P erkennen, und so *direct* ohne Benutzung einer Curve C' das Geschlecht von C definiren. In der That ist ja der bei einem Rückkehrpunkte zum Doppelpunkte hinzutretende Verzweigungspunkt ohne Einfluss auf das Geschlecht; und der Punkt P ist eine Vereinigung verschiedener einzelner Doppelpunkte mit Verzweigungspunkten. Berechnet man nun das Geschlecht von C auf Grund dieser Bemerkung, so kommt man, wie leicht zu übersehen, zu demselben Werthe, welchen das Geschlecht von C' ergab: *Beide Definitionen stimmen also überein.* Mittelst dieser Ueberlegung ergibt sich auch, dass *für das so bestimmte Geschlecht von C ganz dieselben geometrischen Sätze gelten, wie für das Geschlecht einer Curve mit gewöhnlichen vielfachen Punkten* (vgl. p. 425—474). —

Wir machen schliesslich auf den Unterschied zwischen der hier gebrauchten Methode von Nöther und der früher zur Discussion eines singulären Punktes benutzten Cramer'schen Regel aufmerksam (p. 330, ff.). Zunächst lehrt ein Rückblick auf letztere sofort, dass auch sie eigentlich Transformationen der vorgelegten Curve benutzt. Diese sind aber im Allgemeinen nur eindeutig für die Nähe des be-

trachteten Punktes P, nicht für die ganze Ebene (z. B. die Transformation $x = x'^{\beta}$, $y = y'^{\alpha}$ auf p. 332); man beherrscht daher das Verhältniss von P zu der Curve C nicht so unmittelbar und erhält nicht so leicht Aufschluss über den Einfluss von P auf die Klasse von C, wie dies bei eindeutiger Transformation möglich ist. Die successive Trennung der durch P gehenden Zweige in verschiedene Klassen ist jedoch bei beiden Methoden dieselbe, insofern man jedesmal alle Zweige zu einer Klasse zusammenfasst, welche in Grössen von gleicher Ordnung der Kleinheit übereinstimmen. In der That kann man auch mittelst der quadratischen Transformationen dieselbe Reihenentwicklung für den singulären Punkt aufstellen, zu welcher die Anwendung der Cramer'schen Regel führt; wie hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden soll.*)

---

*) Zu dem Zwecke bedient man sich besser der quadratischen Transformation mit zwei zusammenfallenden Fundamentalpunkten:

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1 y_3 : y_1 y_2 : y_3^2 .$$

Dieselbe gibt für $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $y_1 = x'$, $y_2 = y'$, $y_3 = 1$ die Substitution $x = x'$, $y = x'y'$, welche Hamburger (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 16, p. 474 ff.) und Königsberger (Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, p. 187 ff.) zur Aufstellung jener Reihenentwicklung benutzen.

